- Implications via les intervalles de $\mathbb{R}$ -

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation des probabilités $\bar{A}$, ou la notation $E \setminus A$.

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

- **Manipuler les nombres réels**

Au cycle 4, les élèves ont étudié les inégalités pour comparer des valeurs numériques. La notion d'intervalle, présentée comme ensemble de nombres vérifiant des inégalités, est nouvelle.

La notation de la valeur absolue est introduite pour exprimer la distance entre deux nombres réels et caractériser les intervalles de centre donné. Toute autre utilisation est hors programme.

Contenus

- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.
- Représentation de l'intervalle $[a - r , a + r]$ puis caractérisation par la condition $|x - a| \leqslant r$.
- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π.

Capacités attendues

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

- Implications via les intervalles de $\mathbb{R}$ -

Logique : Si ... Alors ... , contre-exemple
Connaitre les différents ensembles de nombres, utilisation des intervalles de $\mathbb{R}$, Savoir passer des encadrements aux intervalles

Séance 1

VRAI ou FAUX ?

1. $5 \in]-\infty\ ;\ 4]$
2. Si $x > 6$ alors $x > 5$
3. Soit $x \leq 5$
   $x - 7 \in [-2\ ;\ +\infty[$

....

Séance 2

VRAI ou FAUX ?

1. $-\dfrac{5}{2} \in [-2\ ;\ 5]$
2. Si $x \leq 3$ alors $x > 2$
3. Soit $x \leq 5$
   $-2x \in [-10\ ;\ +\infty[$

....

Séance 3

VRAI ou FAUX ?

1. $3,72 \in]3,719\ ;\ 3,721[$
2. Si $x \leq 4$ alors $x < 4$
3. Soit $x \geq -3$
   $x + 9 \in]6\ ;\ +\infty[$

Séance 4

VRAI ou FAUX ?

1. $3,4 \in]3,3\ ;\ 3,4[$
2. Si $x > -1$ alors $x \geq -1$
3. Soit $x \geq -6$
   $\dfrac{1}{3}x \in]-\infty\ ;\ -2]$

....

Séance 5

VRAI ou FAUX ?

1. $10^{-15} \in]0\ ;\ 1[$
2. Si $-2 \leq x \leq 0$ alors $x \leq 0$
3. Soit $x \leq 5$
   $3x + 4 \in [18\ ;\ +\infty[$

....

Séance 6

VRAI ou FAUX ?

1. $(-1)^{15} \in [0\ ;\ +\infty[$
2. Si $2 \leq x \leq 5$ alors $0 \leq x \leq 7$
3. Soit $x \leq 5$
   $-\dfrac{1}{2}x + 1 \in]-\infty\ ;\ -1,5]$

Questions de débat

- $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal. Vrai ou Faux ? Justifier.
- Le produit de deux irrationnels différents est un irrationnel. Vrai ou Faux ? Justifier.
- L'inverse d'un nombre rationnel non nul est un rationnel non nul. Vrai ou Faux ? Justifier.
- Soient a et b deux nombres réels tels que $2 < a < 4$ et $5 < b < 6$. Donner un encadrement de $a - b$.