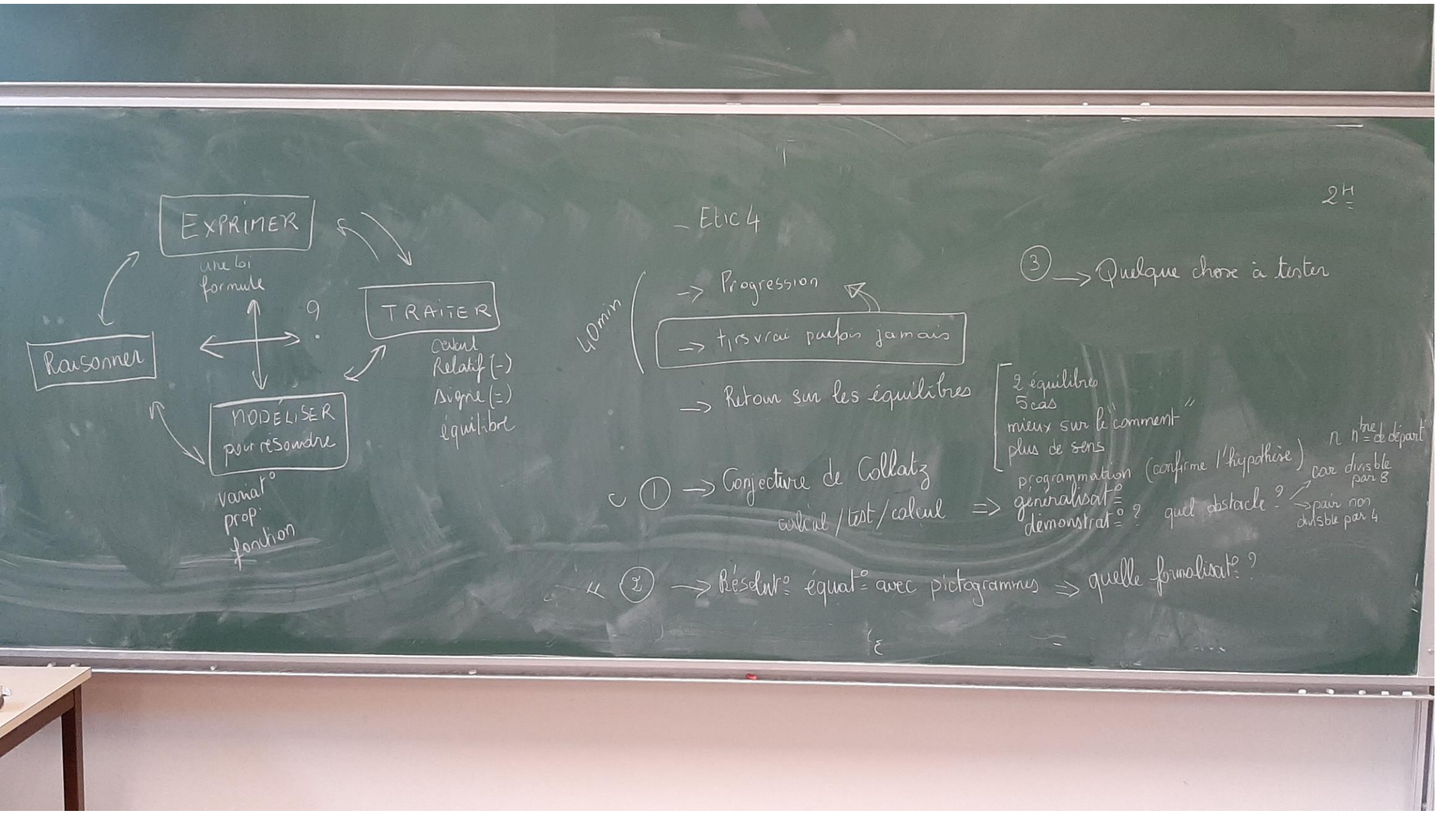
Journée échange de pratiques – La Roche-Sur-Yon - 2 février 2023

La lettre au collège

Compte-rendu des travaux du groupe collège
IREM des Pays de Loire
Sylvie GRAU MCF didactique des mathématiques
Sylvie.grau@univ-nantes.fr

1. Présentation du groupe IREM
2. Problématique et apports de la recherche
3. Expérimentations et analyses
4. Perspectives pour la classe

1. Présentation du groupe IREM



- Proposition d’un thème de travail
- Engagement des collègues : attentes, besoins, questions
- Un espace de mutualisation et des réunions
- Des temps de formation et d’analyse

Groupe « Collège » projet de travail 2020-2024

Depuis la réforme des programmes, l'**organisation mathématique** autour de l'algèbre a été modifiée et demande aux enseignants de repenser une progression sur le travail autour de « la lettre » en mathématiques au collège.
Le groupe propose de réfléchir à l'élaboration d'une séquence ayant pour objectif d'organiser un enseignement cohérent de l'algèbre au collège à partir des **multiples ressources existantes**. L'objectif est d'expliciter des critères de choix à partir des **obstacles et difficultés** rencontrées au collège comme au lycée.

- Analyse des programmes,
- Enquête sur les difficultés à l'entrée en seconde,
- Exploration des ressources pour un travail à distance ou en classe inversée,
- Création d'outils pouvant être numériques,
- Proposer une progression et la tester,
- Analyser les expérimentations.

Les questions que le groupe se pose sont de différentes natures :

1.Autour des programmes : quelle cohérence ? Quelle progressivité ? Comparer avec ce qui se fait en sciences avec la formule ? Voir se qui se fait au primaire ?

2.La question du sens : quels aller-retour entre sens et technique ? Pourquoi a-t-on besoin de la lettre ? Pour quelles activités la lettre est-elle indispensable ? Quand et comment passe-t-on du perceptif à l'abstraction ?

3.La question des mises en œuvre : quels usages des manuels, outils numériques ? Comment prendre en compte le contexte ? Que faire en classe inversée ? Comprendre les difficultés pour mieux y remédier. Tester et analyser des situations.

Les grands principes que se donne le groupe :

- travailler ensemble, coopérer, collaborer
- progresser et se voir progresser
- avoir des choses à tester et les analyser
- gagner en efficacité auprès des élèves

Le groupe s'oriente vers deux pistes :

- Qu'est-ce qui se fait à l'école primaire ?
- Faire des analyses de mises en œuvre des activités dans la classe

2. Problématique et apports de la recherche

https://www.oipa.education/pour-en-savoir-voir-plus

- Beaucoup de travaux et publications sur le sujet
- Un observatoire international de la pensée algébrique ouvert en 2013
- Le développement du Early algebra
- Des écarts importants entre les curricula

Quelle praxéologie, quelle organisation mathématique ? (TAD – Chevallard, 1999)

Bloc pratico-technique [T/τ]
« praxis »
savoir-faire

Bloc technologico-théorique [θ/Θ]
« logos »
discours qui justifient

- Un type de **tâches T**
- Une **technique** τ pour accomplir cette tâche

- Une **technologie Θ** qui permet de justifier, produire, et rendre compréhensible la technique
- Une **théorie** Θ qui permet de justifier, produire et rendre compréhensible la technologie

OM savante	OM à enseigner	OM enseignée	OM apprise
Institution légitimante	Noosphère	Institution scolaire	Communauté d'étude

Exemple de praxéologie :

Développer : $4(5 + 2x)$ **tâches T**

Distribuer : $4 \times 5 + 4 \times 2x$ **technique** τ_1

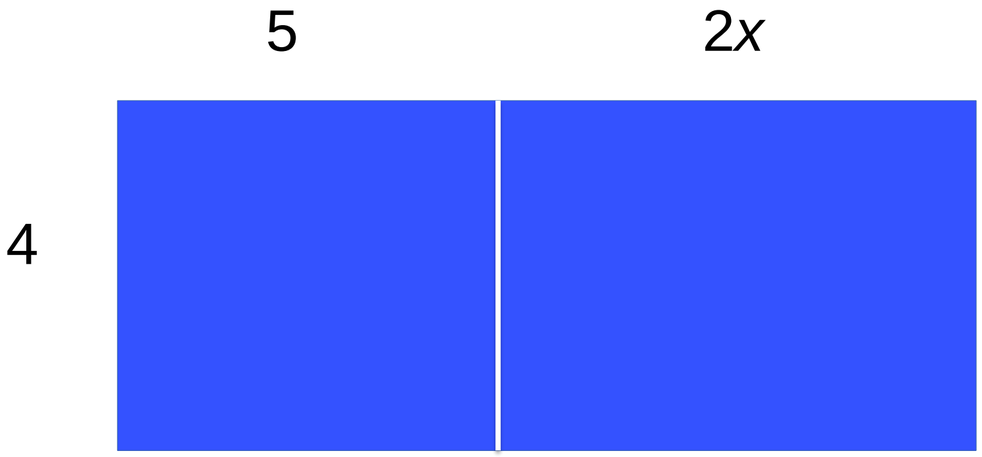
Calculer : $20 + 8x$ **technique** τ_2

Justifier, produire, comprendre

Quelle **technologie Θ** ?

$4 \times (10 + 2) = 40 + 8 = 48$

théorie Θ A
Calcul arithmétique



théorie Θ B
Mesure de grandeurs

Un genre de tâche ≠ type de tâche

Démontrer est un genre de tâche, calculer est un genre de tâche.

Résoudre une équation du second degré sur IR est un type de tâche.

Quelles tâches sont attendues des élèves ?

Quelles techniques et quelles technologies ?

Programme 2020 cycle 4

Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour modéliser une situation, démontrer une propriété générale et résoudre des problèmes se ramenant à des équations du premier degré. Les élèves sont progressivement familiarisés aux différents statuts de la lettre (indéterminée, variable, inconnue, paramètre) et du signe égal (pour fournir le résultat d'une opération, pour traduire l'égalité de deux représentations d'un même nombre, dans une équation, dans une identité). À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer des nombres irrationnels, par exemple dans l'utilisation du théorème de Pythagore ou la résolution d'équations de la forme $x^2 = a$.

Utiliser le calcul littéral

Connaissances

- Notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité.
- Propriétés de distributivité (simple et double).
- Annulation d'un produit (démonstration possible par disjonction de cas).
- Factorisation de $a^2 - b^2$.

Compétences associées

- Développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples.
- Utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation.
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.
- Résoudre algébriquement des équations du premier degré ou s'y ramenant (équations produits), en particulier des équations du type $x^2 = a$.

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, menées tout au long du cycle, d'abord dans le cadre numérique, puis dans le cadre algébrique, les élèves doivent avoir mémorisé ou automatisé :

- les règles de calcul sur les nombres relatifs et les fractions, notamment la condition d'égalité de deux fractions (si $ad = bc$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et réciproquement) ;
- les conventions d'écritures du calcul littéral ;
- les formules de distributivité simple et double ;
- l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- les procédures de résolution d'équations du type $ax = b$ et $a + x = b$.

Trois praxéologies locales :

- de **généralisation** : amène à la production de formules, à l'identification de structures
- de **modélisation** : permet des mises en équation
- de **calcul** : permet des transformations d'expressions, la résolution d'équations

Quelles continuités et quelles ruptures avec l'arithmétique ?

« Les trois caractéristiques des formes spécifiques de la pensée algébrique sont définies par Radford (2013) pour qui elles sont épistémologiquement différentes de celles de l'arithmétique : l'usage de nombres non connus (inconnues, variables, etc.) dans la résolution de problèmes, la désignation de ces nombres par différents moyens (codages, gestes, …), l'analycité, c'est-à-dire le traitement des quantités inconnues comme si elles étaient des nombres connus. » (Pilet, Grugeon-Allys, 2022)

Un nombre peut s'écrire sous la forme d'un « calcul ».

Une expression peut être procédurale (permettre un calcul) ou structurelle (montrer un agencement)

Le signe = a différents statuts (donne comme résultat, équivaut à, assigne, il peut avoir une valence de vérité)

Exemple : les programmes de calcul

Prendre un nombre
Lui ajouter 5
Multiplier le résultat par 4

Procédural

$7 + 5 = 12$
$12 \times 4 = 48$

Structurel

$(7 + 5) \times 4 = 48$

Structurel/Procédural

$(x + 5) \times 4 = 4x + 20$

Comment construire la pensée algébrique avant l'introduction de la lettre ?

Early algebra

- Nouveau domaine de recherche : métadiscipline comprenant un ensemble de concepts appartenant à la fois à l'arithmétique et à l'algèbre (Malara et Navarra, 2018)
- Symbolisme algébrique standard ni nécessaire ni suffisant

La pensée comme réflexivité sur l'action

Définir la pensée algébrique

Ainsi, le concept central de l'algèbre est l'opération. La pensée algébrique, elle, se déploie au moyen :

- D'un ensemble de raisonnements particuliers (comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles ; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.) ;
- Des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens, voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaine de calcul, etc.) ;
- Des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations.

(Jeannotte et Squalli, 2022)

La pensée algébrique avant la lettre

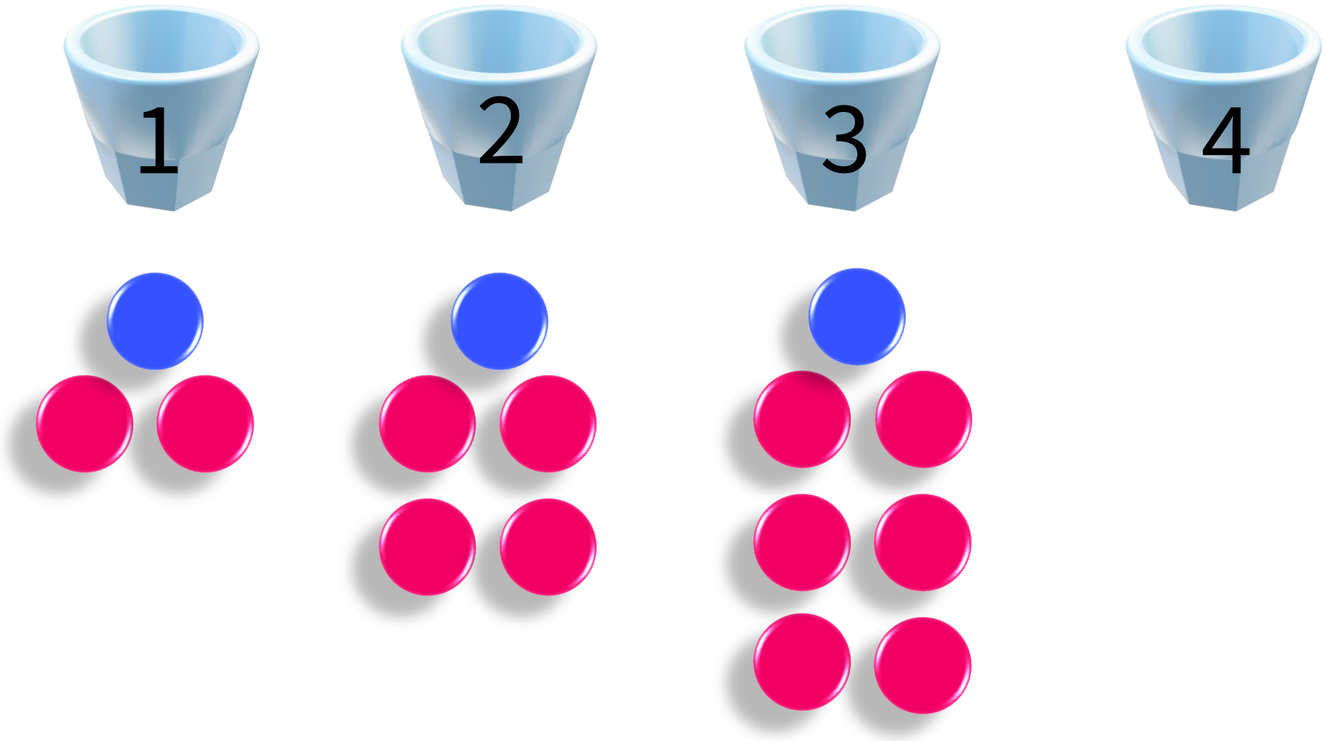
$2 + ? = 5$

1) **la généralisation liée aux activités de motifs** (patterns) numériques et géométriques (imagées)
2) la généralisation liée aux propriétés des opérations et aux structures numériques,
3) **la représentation des relations entre les quantités** (vers une pensée « fonctionnelle »).
4) l'introduction de **la notation alphanumérique**.

Pensée arithmétique	Pensée analytique
Tester des valeurs que l'on se donne et ajuster => essai/erreur sur des nombres	Penser que ? = 5 – 2 = > opération sur l'inconnue

(Radford, 2011)

Les patterns

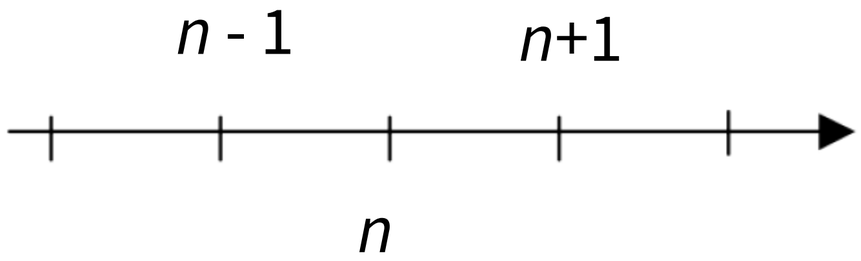


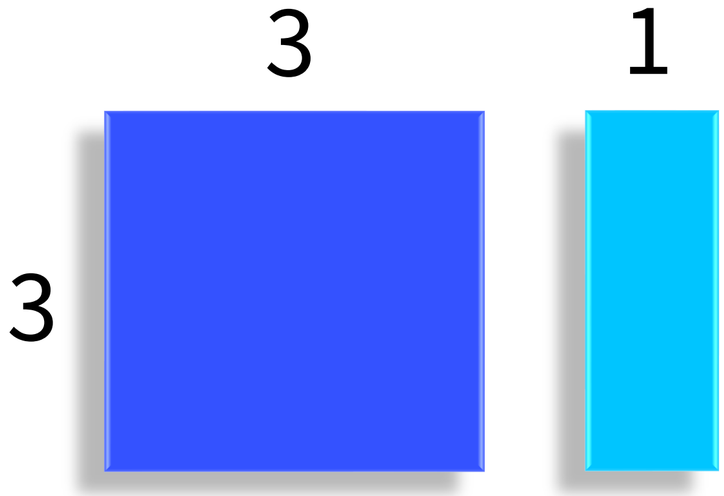
La généralisation des propriétés arithmétiques

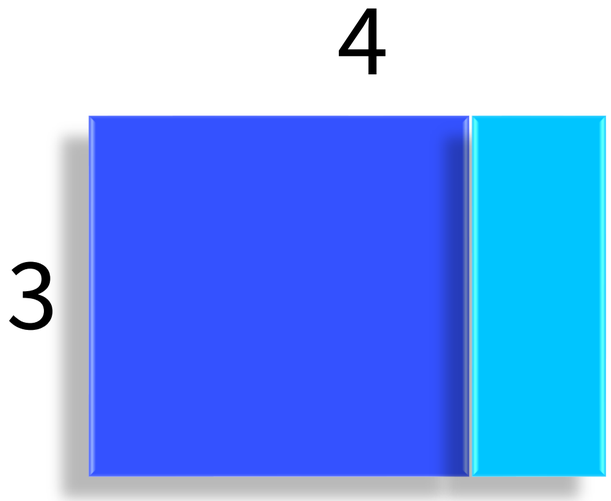
$6 \times 99 = 6 \times (100 - 1)$

$45 - 8 = 45 - (5 + 3)$

Nombre pair : 2 x



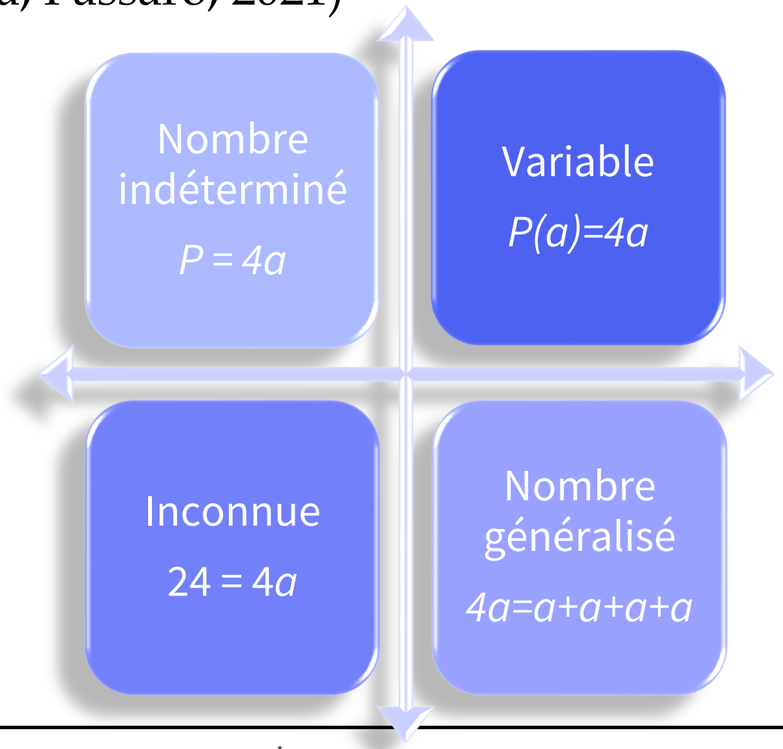


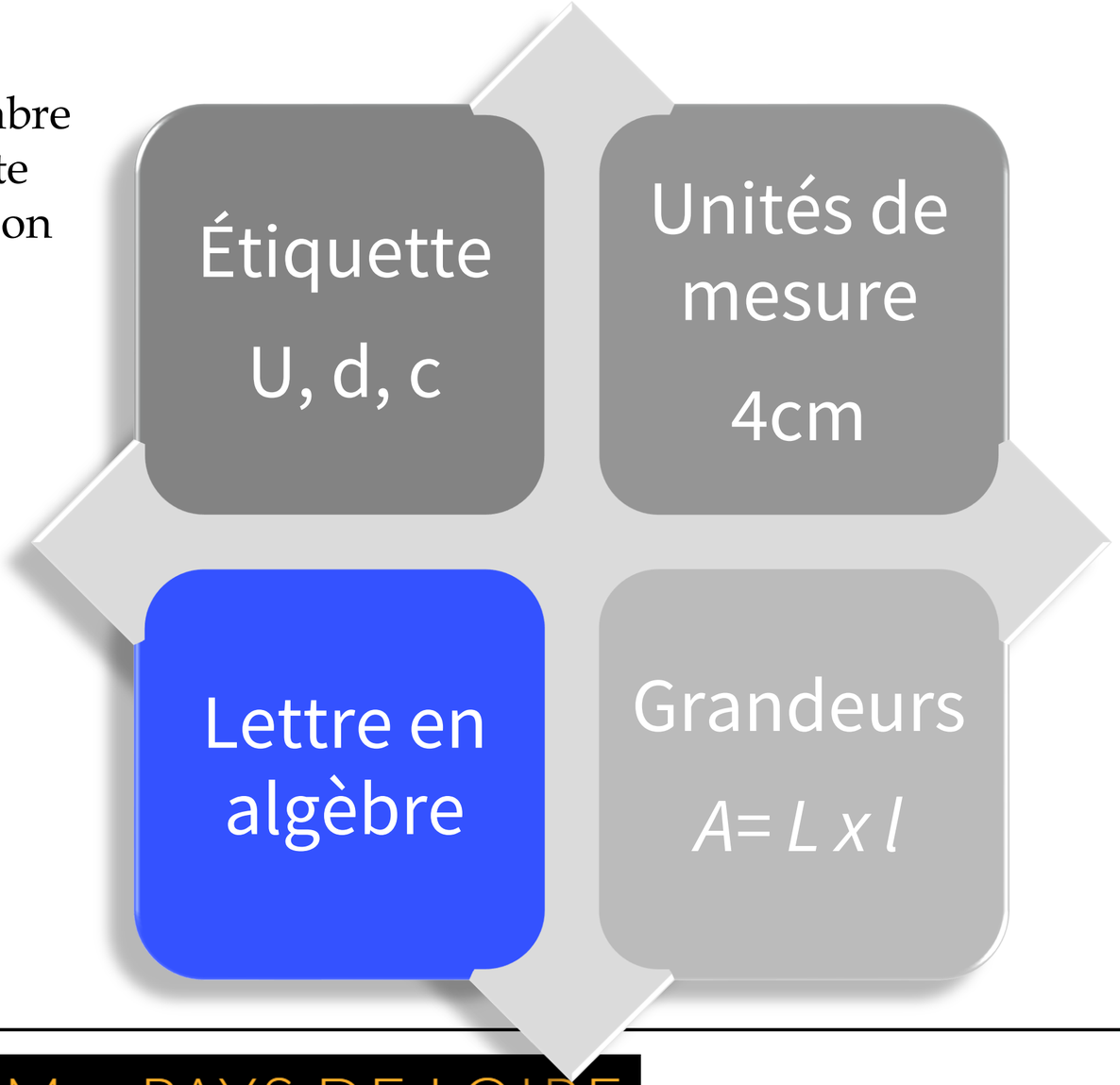


$3 + 9 = 3 \times 4$

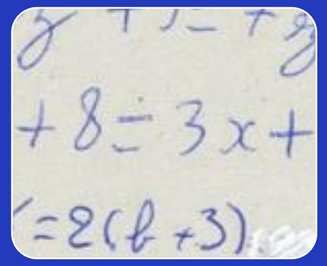
Différents usages de la lettre en mathématiques

« Dans une formule d'aire, une lettre pourra désigner une inconnue, une variable ou un nombre généralisé selon le regard que l'on porte sur cette formule, selon l'usage que l'on veut en faire, selon la question que l'on se pose. » (Tremblay, Polotskaia, Passaro, 2021)



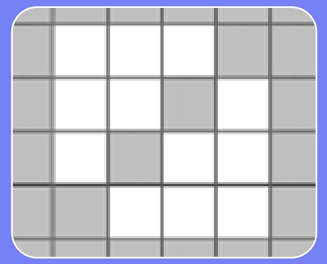


3. Expérimentations et analyses



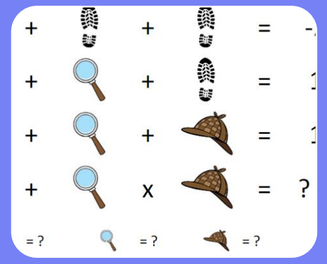
Le signe =

- Égalités contingentes en 6e
- Préconisations
- Expliciter les quantificateurs



La production de formules

- Rendre la formule nécessaire pour comprendre
- Rendre la formule nécessaire pour prouver
- Rendre la formule nécessaire pour résoudre



La résolution d'équations

- Les équations sans les lettres
- Les expressions équivalentes
- Les outils numériques

Le signe = en 6e

Que penses-tu de ces égalités ?

Aire d'un carré = côté×côté

1 baguette = 250g

□ + 5 = 12

1,99€ = 2€

100 × 3,2 = 3,200

15 + 5 = 10 × 2

Le signe = est un symbole complexe qui ne s'emploie pas n'importe comment....

Il ne remplace pas une association entre 2 éléments différents et il ne doit pas être confondu avec le signe ≈. (ex: 1 baguette pèse 250g, 1,99€ ≈ 2€)

Il ne désigne pas toujours un résultat, une réponse à un calcul (ex: 15 + 5 = 10 × 2)

Pour les égalités:
Une égalité **toujours vraie** peut se justifier par une formule ou des calculs (ex: A = c×c).
Certaines égalités sont **fausses** car on repère des erreurs de calculs par exemple (ex: 100×3,2 ≠3,200).
Quand on trouve des exemples (1 ex qui rend l'égalité vraie et 1 autre ex fausse), on dit qu'elles sont **parfois vraies** (ex: □ + 5 = 12)

Toujours vrai, parfois vrai, jamais vrai ?
En 5e

diamètre = 2 × rayon

♦ - ♥ = ♥ - ♦

☺+☺ = ☺×☺

1L = 1kg

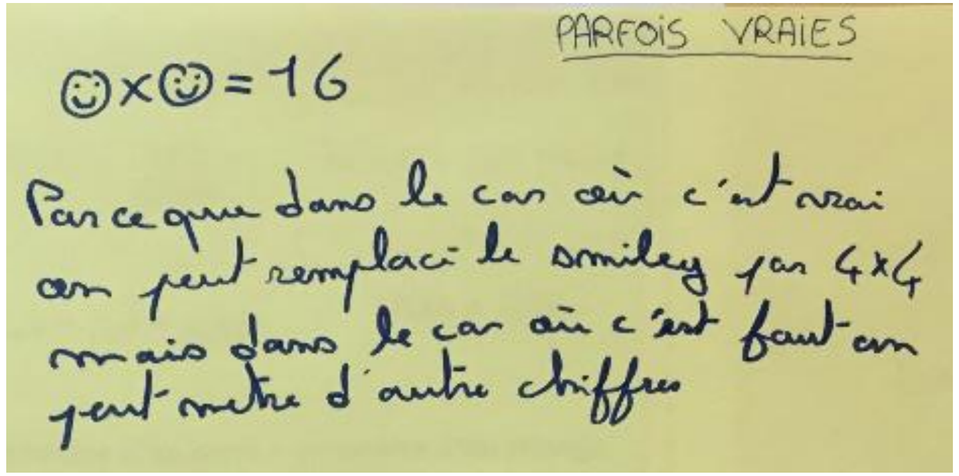
« est »

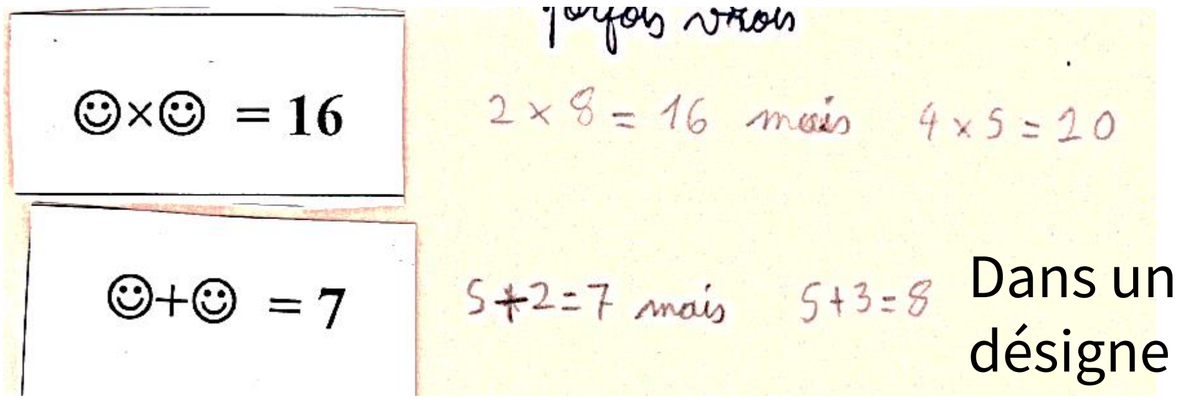
une règle

a la même valeur que

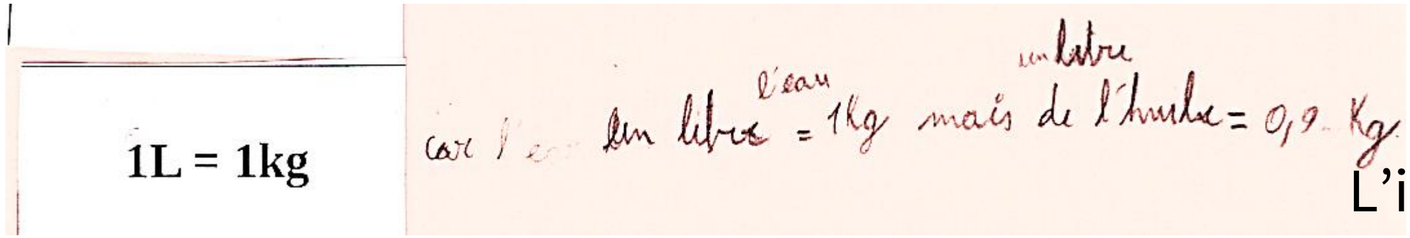
côté + côté + côté + côté = 4 × côté		☺+☺+☺ = 3618
♦ × ♥ = ♥ × ♦	diamètre = 2 × rayon	☺+☺ = ☺×☺
périmètre d'un carré = périmètre d'un triangle équilatéral		5 cts = 0,5 €
$0{,}23 = \frac{230}{1000}$	3h10min = 310 min	☺+☺ = 7
6m × 6m = 36m²	1m3cm =13cm	50min = 0,5h
1h30 = 1,5h	☺ : 10 = ☺ × 0,1	♦ - ♥ = ♥ - ♦
7 × 99 = 7 × 100 – 1	☺×☺ = 16	14 × 0,5 = 14 : 2
36 + 99 = 36 + 100 – 1	15 × 6 = 10 × 9	$\frac{2}{3}=2{,}3$
85 : 7 = 12	2,3 × 3,4 = 6,12	1L = 1kg

Le problème de la justification

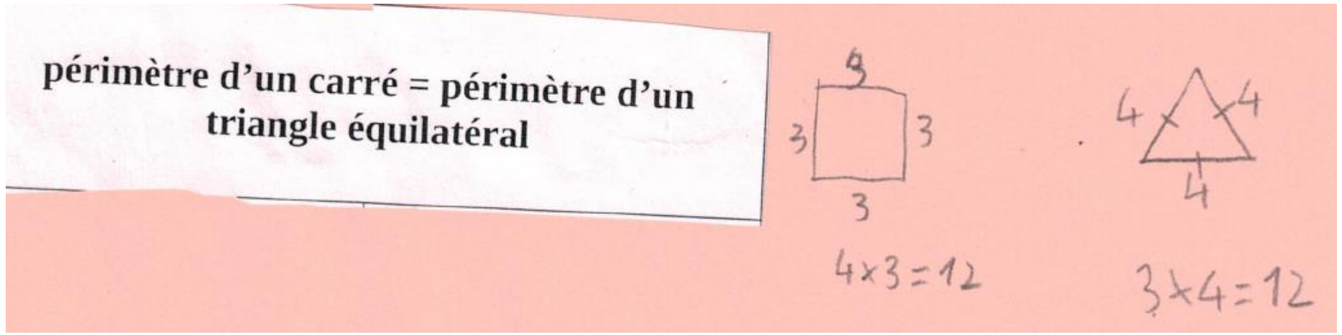




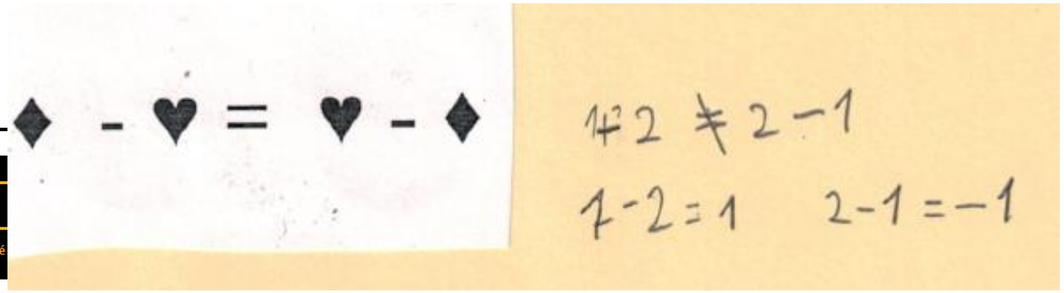
Dans une expression, un même symbole désigne la même valeur.



L'importance du contexte.



Les quantificateurs sont implicites.



En fin de 5e

L'égalité est PARFOIS vraie	L'égalité est TOUJOURS vraie	L'égalité n'est JAMAIS vraie
$x - 8{,}2 = 10$ $9n = 0$ $a = 3$.	$4z + 3 = 7z$ $a + a + a = 3a$ $4x + 2x = 6x$ $2 \times b \times 3b = 6b^2$ $2b + 6 = 2(b+3)$	$3x + 8 = 3x + 12$ $3x = 2$ $12 + y = 4$ $y^2 = 4 \times 2$
Justification : $9n = 0$ ça dépend de la valeur de n. si n n'est pas égale à 0 ça ne marchera pas.	**Justification :** $4z + 3 = 7z$ $4 + 3 = 7 \times z = 7z$ Si b = 2 alors les 2 calculs sont égale à 10. Car avec n'importe qu'elle valeur de b. ça marche	**Justification :** $y^2 = y \times 2$ car $y^2 = y \times y \neq y \times 2$

$$2b + 6 = 2(b + 3)$$

L'égalité est PARFOIS vraie	L'égalité est TOUJOURS vraie	L'égalité n'est JAMAIS vraie
$x-8,2=10$ $9n=0$ $12+y=a$ $3x=2$ $a=3$	$a+a+a=3a$ $4x+2x=6x$ $y^2=y\times 2$ $2\times b\times 3b=6b^2$	$4z+3=7z$ $3x+8=3x+12$ $2b+6=2(b+3)$
Justification : $a=3$ car a = un nombre quelconque	**Justification :** $y^2=y\times y=y\times 2$ $2b+6=2(b+3)$ car même si on change la valeur de b le résultat sera toujours le même	**Justification :** $4z+3$, c'est faux, car on ne mélange pas une lettre avec une autre lettre ou avec un nombre sans lettre

Justification :

Si $a + a + a = 3a$ $\quad 3a = 3 \times a$

$a = 1a$ $\quad a + a = 2a$

donc c'est égalité est toujours vraie

Justification :

Imaginons que a est une tomate :

1 tomate + 1 tomate + 1 tomate = 3 tomates

$a + a + a = 3a$

Il y a 3 fois a

Justification : Le resultat depend de la valeur de x.

ex : $x = 2$

$x - 8, 2 \neq 10$

Justification : Peu importe la valeur de la lettre le resultat seras le meme.

ex $= a = 4$

$a + a + a = 3a$

Justification :

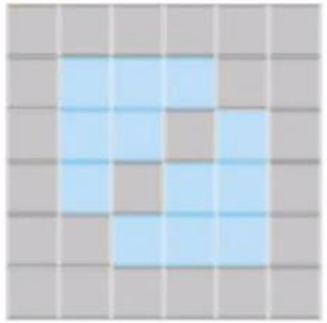
$2(B + 6) = B^2 + 6$ alors que $2(B + 3) = 2(B + 3)$

Production de formules en 5e

1 Produire une expression littérale

OBJECTIF 1

Pour décorer des piscines carrées, on fabrique des motifs à l'aide de carreaux de faïence. Les carreaux du bord et d'une des diagonales sont gris, les autres sont bleus.
Une petite piscine carrée de 6 carreaux de côté est représentée ci-contre.



1 a. Combien y aurait-il eu de carreaux gris dans toute la piscine si on avait utilisé 8 carreaux pour le côté de la piscine ?
b. Et si on avait utilisé 15 carreaux gris pour le côté de la piscine ?
c. Même question pour 543 carreaux gris.

2 Expliquer comment trouver le nombre total de carreaux gris à utiliser en fonction du nombre de carreaux utilisés pour le côté de la piscine.

3 Julien affirme : « Sur ma figure, j'ai colorié 316 carreaux en gris. »
Est-ce possible ? Expliquer.

Myriade 5e Bordas 2016

Trois genres de tâches

Généralisation

Modélisation

Résolution d'une équation

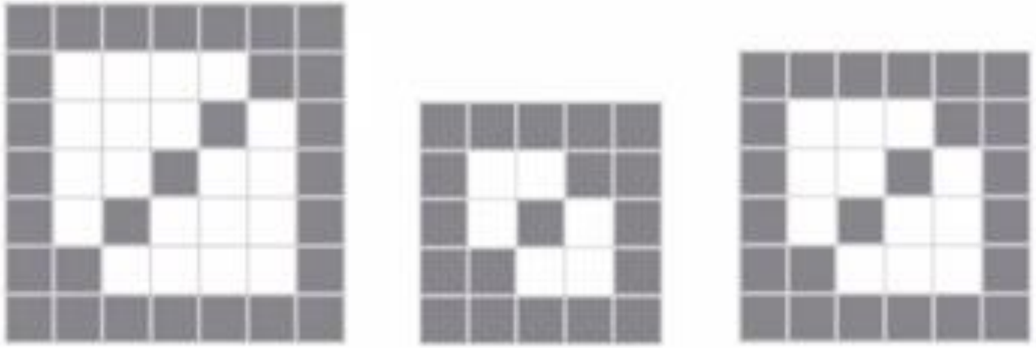
Myriade 5e Bordas 2021

1 Produire une expression littérale

OBJECTIF 1

Julien dispose de carreaux de mosaïque gris et de carreaux de mosaïque blancs.
Avec ces carreaux, il forme un grand carré dont le contour et une diagonale sont faits de carreaux gris, les autres carreaux du carré sont blancs.

Voici quelques figures qu'il a réalisées :



1 a. Combien y aurait-il eu de carreaux gris si on avait utilisé 8 carreaux pour faire le côté du grand carré ?

b. Et si on avait utilisé 15 carreaux pour faire le côté du grand carré ? Et 543 carreaux ?

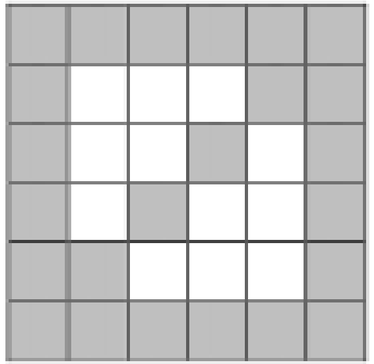
2 Écrire un texte qui explique comment trouver le nombre de carreaux gris à utiliser en fonction du nombre de carreaux utilisés pour le coté du grand carré.

3 Julien affirme : « Sur ma figure, j'ai colorié 316 carreaux en gris ». Est-ce possible ? Expliquer.

Quelles nécessités pour écrire une formule :

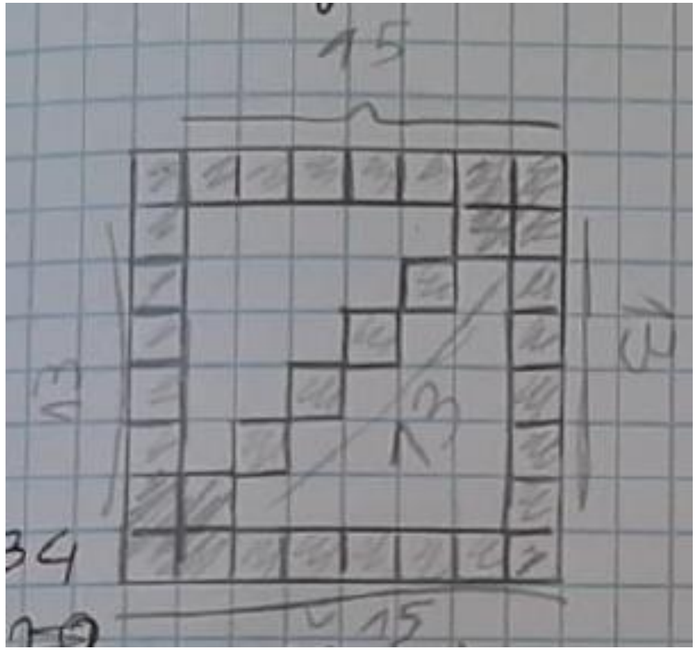
- Mémorisation
- Economie de calculs
- Economie de symboles
- Trace d'un raisonnement
- Programmation d'une suite d'opérations
- Pour calculer, résoudre…

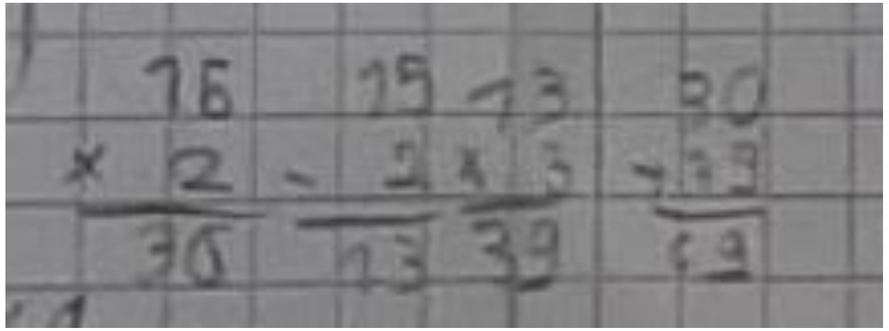
On souhaite décorer le fond d'une piscine carrée. Pour cela, on fabrique des motifs à l'aide de carreaux de faïence gris et blancs. Les carreaux du bord et d'une des diagonales sont gris les autres sont blancs. Suivant la taille de la piscine, le nombre de carreaux à commander est différent. On veut permettre au client de prévoir son budget en lui indiquant le nombre de carreaux à commander.

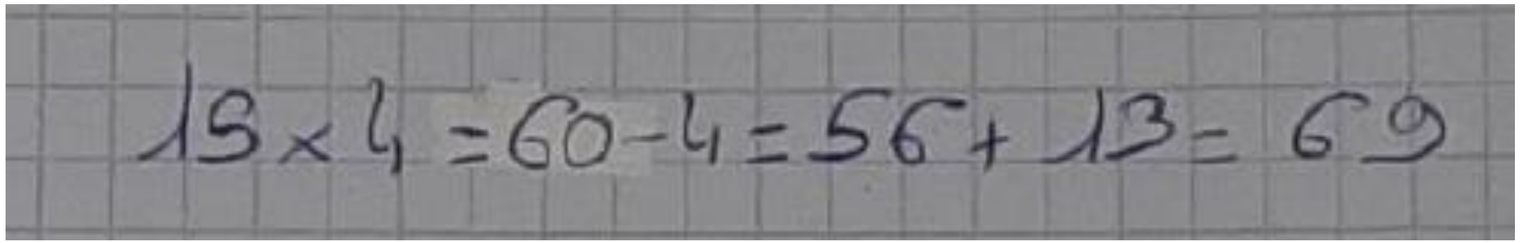


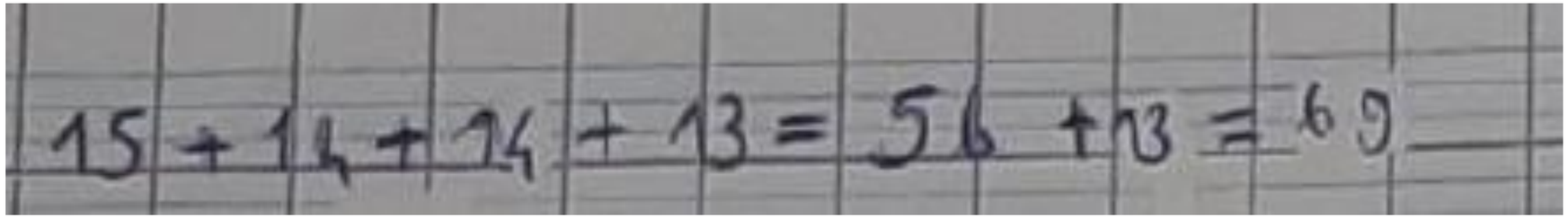
1) Pour une petite piscine carrée de 6 carreaux de côté comme représentée ci-contre, combien faut-il de carreaux gris ?
2) Pour une piscine de 8 carreaux de côté, faire le dessin et compter combien il faut de carreaux gris ?
3) Et pour 15 carreaux, peux-tu réfléchir sans faire le dessin au nombre de carreaux gris nécessaires ?
4) Et si on avait utilisé 543 carreaux pour le côté ?
5) Expliquer comment trouver le nombre total de carreaux gris à utiliser en fonction du nombre de carreaux utilisés pour le côté de la piscine.

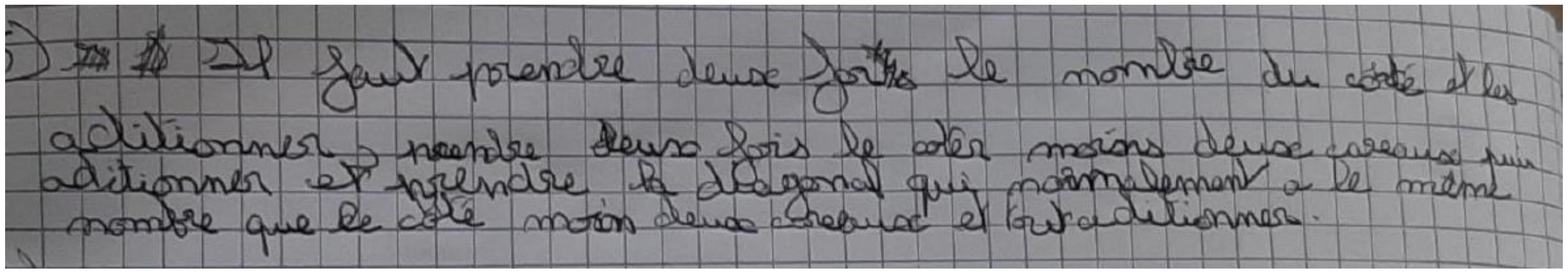
Production de formules en 5e



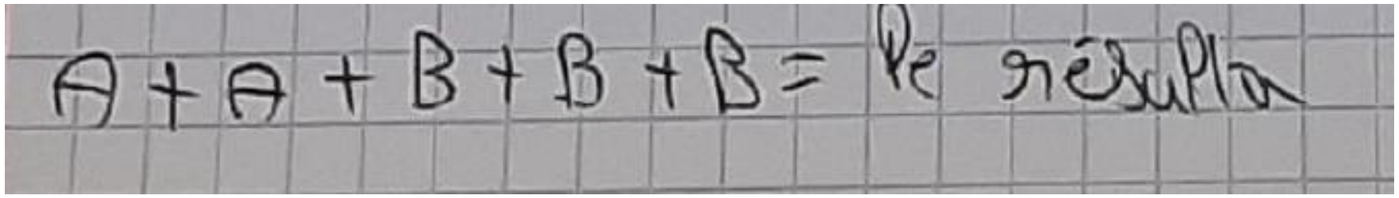


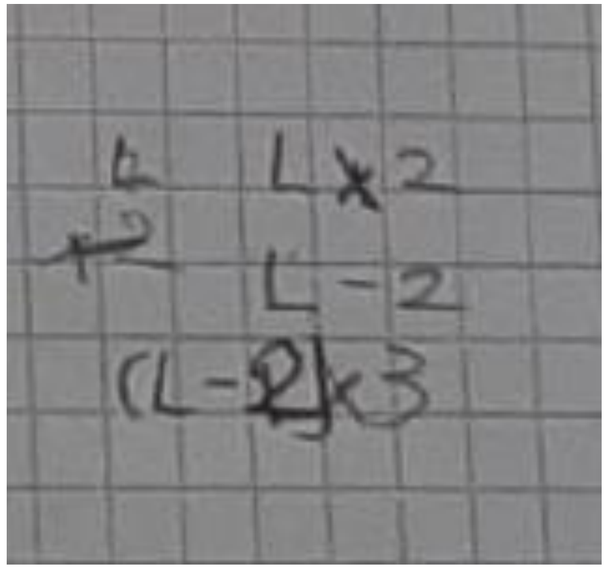




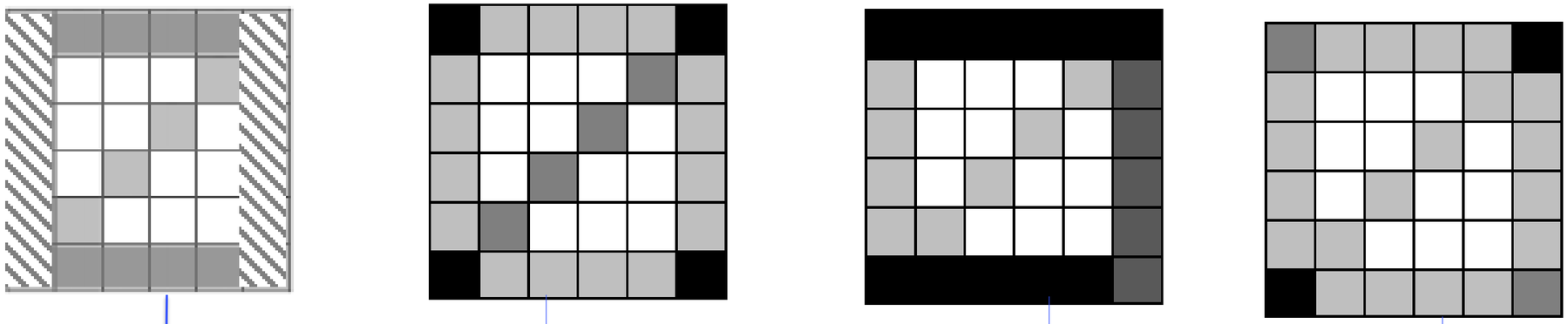


« Il faut prendre deux fois le nombre du côté et les aditionner, prendre deux fois le coter moins deux carreaux puis aditionner et prendre la diagonale qui normalement a le même nombre que le côté moins deux careaux et tout aditionner. »





Les procédures de dénombrement



$c + c + (c - 2) + (c - 2) + (c - 2)$

$c \times 4 + (c - 2) - 4$

$c + (c - 1) + (c - 1) + (c - 2) + (c - 2)$

$c \times 5 - 4 - 2$

6 carreaux ⟶ 24 carreaux gris

8 carreaux ⟶ 34 carreaux gris

15 carreaux ⟶

- $\underbrace{15+15}_{\text{2 bords}} + \underbrace{13+13}_{\text{2 autres bords sans les coins}} + \underset{\text{diago}}{13} = \underline{69}$

- $15 \times 4 = 60$

  $60 - 4 = 56$

  coins comptés 2 fois

  $56 + \underset{\text{diago}}{13} = \underline{69}$

- $15 + \underbrace{14+14}_{\text{2 bords}} + \underbrace{13}_{\text{4e bord}} + \underset{\text{diago}}{13} = 69$

3) $\boxed{15}$

. $\underbrace{15+15}_{\text{2 lignes}} + \underbrace{13+13}_{\text{2 autres lignes}} + \underset{\text{diago}}{13} = 69$

. $\underbrace{4\times 15}_{\text{tour}} \underset{\text{compté 2 fois}}{-4} + \underset{\text{diago}}{13} = 69$ expression littérale : $\boxed{4\times c-4+c-2}$

. $\underset{1^{re}}{15} + \underset{2^{e}}{14} + \underset{3^{e}}{14} + \underset{4^{e}}{13} + \underset{\text{diago}}{13} = 69$ expression littérale : $\boxed{c+c-1+c-1+c-2+c-2}$

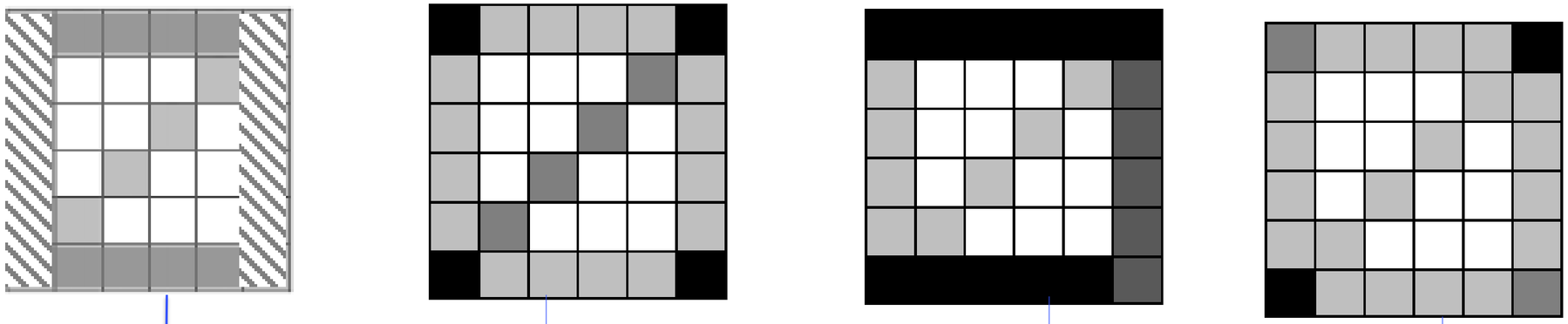
4) $\boxed{543}$ 2709 carreaux gris.

5) On considère qu'il y a c carreaux sur le bord.

L'expression littérale du nombre de carreaux gris est :

$$\underbrace{c+c}_{\text{2 lignes pleines}} + \underbrace{c-2+c-2}_{\text{2 autres lignes}} + \underbrace{c-2}_{\text{diagonale}}$$

L’algèbre pour prouver



$c + c + (c - 2) + (c - 2) + (c - 2)$

$c + (c - 1) + (c - 1) + (c - 2) + (c - 2)$

$c \times 4 + (c - 2) - 4$

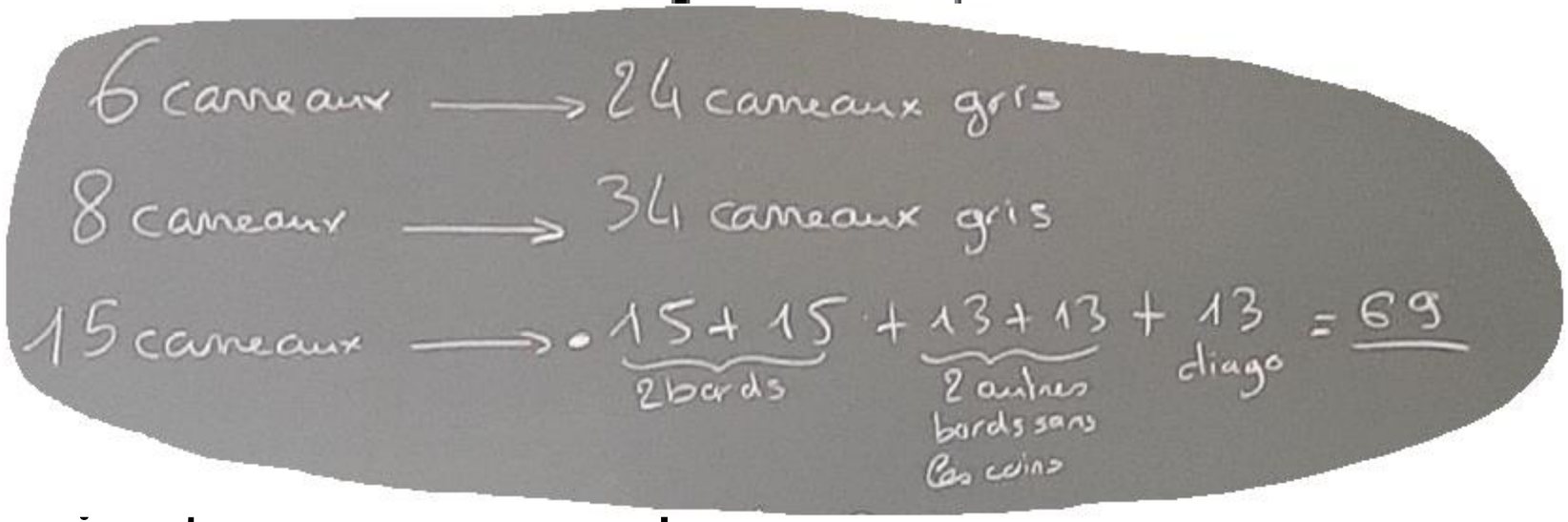
$c \times 5 - 4 - 2$

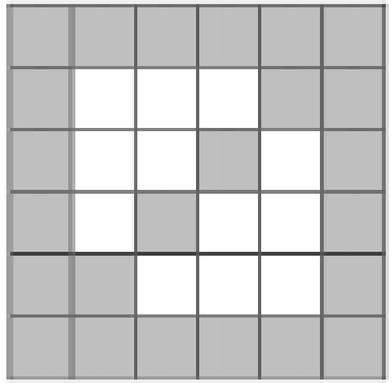
$5c - 6$

Forme réduite

En 5e la relation fonctionnelle n’apparait pas

Julien affirme : « On peut fabriquer un motif avec 316 carreaux gris ». Est-ce possible ? Expliquez.

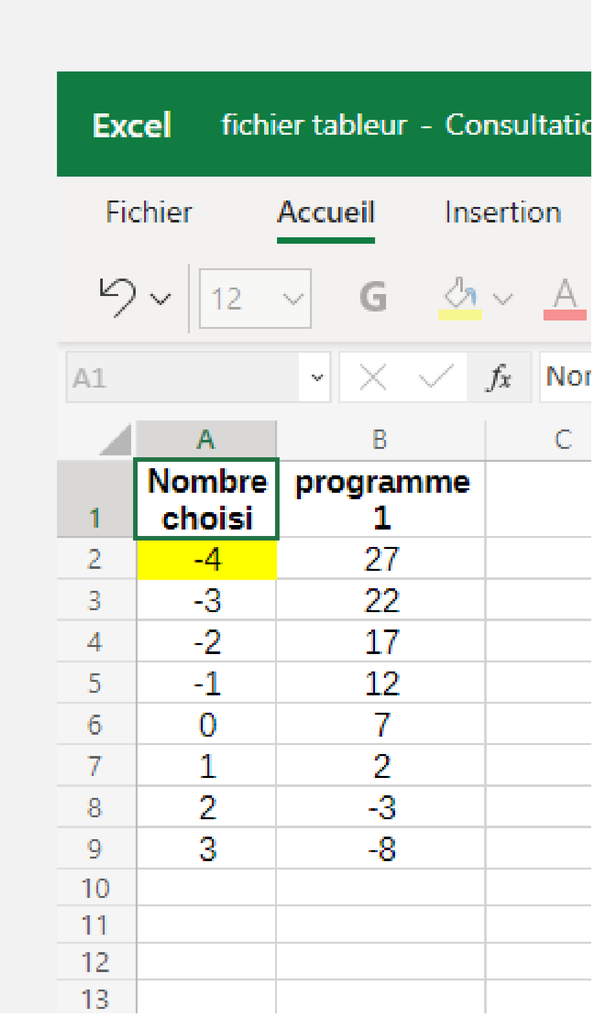




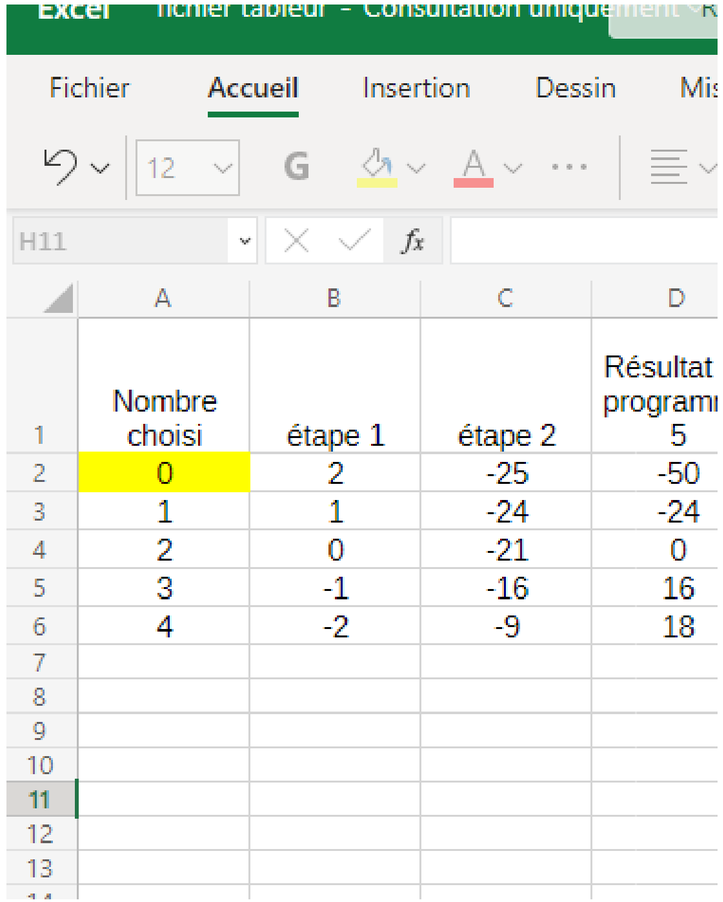
« si on ajoute un carreau de côté, il faut ajouter 5 gris. »

« C’est le nombre de côtés fois 5 moins 6 coins »

La formule pour programmer

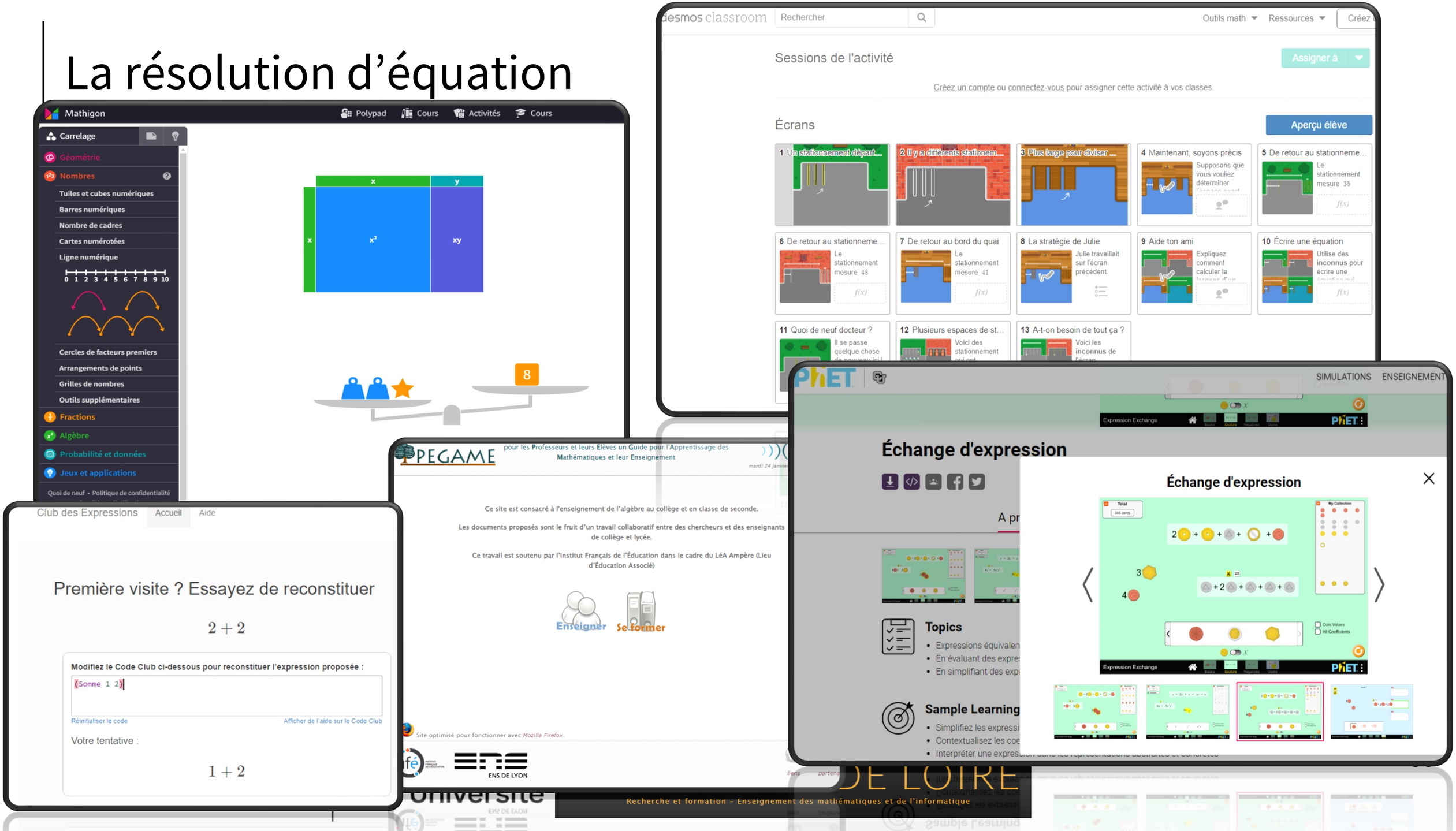


	A	B	C
1	Nombre choisi	programme 1	
2	-4	27	
3	-3	22	
4	-2	17	
5	-1	12	
6	0	7	
7	1	2	
8	2	-3	
9	3	-8	
10			
11			
12			
13			



	A	B	C	D
1	Nombre choisi	étape 1	étape 2	Résultat programı 5
2	0	2	-25	-50
3	1	1	-24	-24
4	2	0	-21	0
5	3	-1	-16	16
6	4	-2	-9	18
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

La résolution d'équation



L’activité « Pictogrammes »

Trouver les valeurs des pictogrammes

♥ + ♣ + ♠ = 410

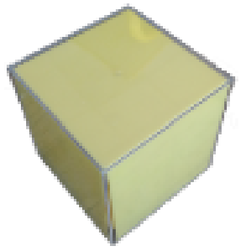
♥ = ♣ + 150

♠ = ♥ - 130

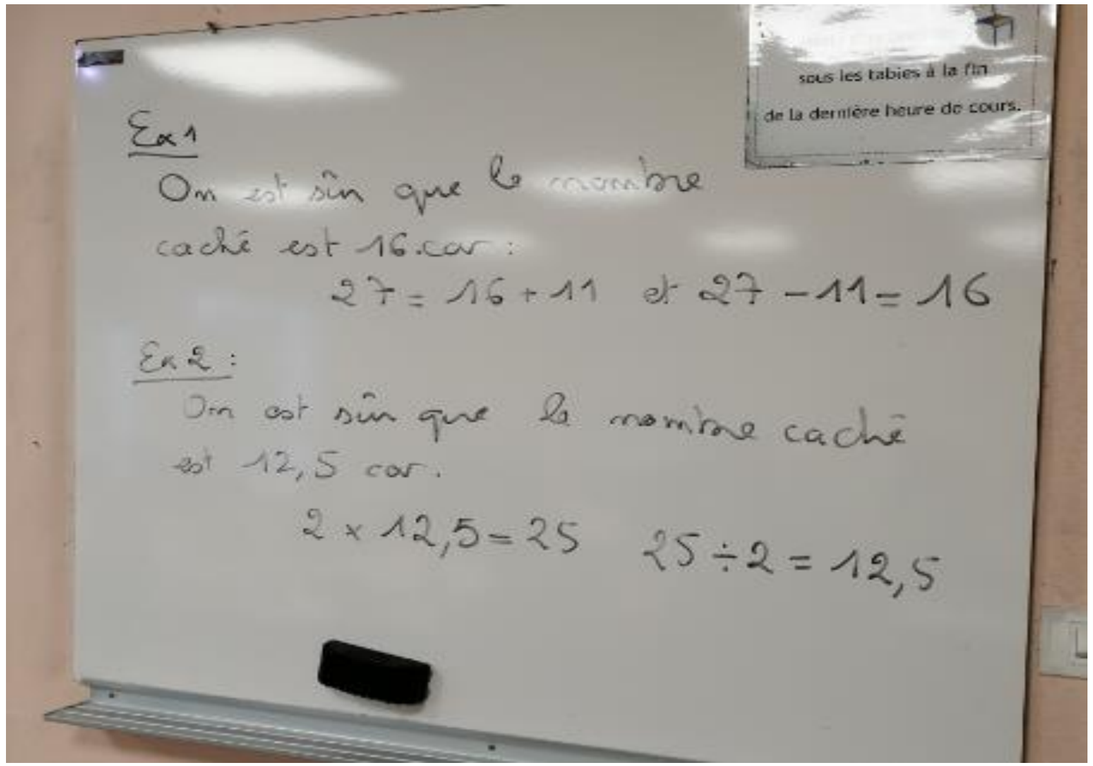
♥ = ? ♣ = ? ♠ = ?

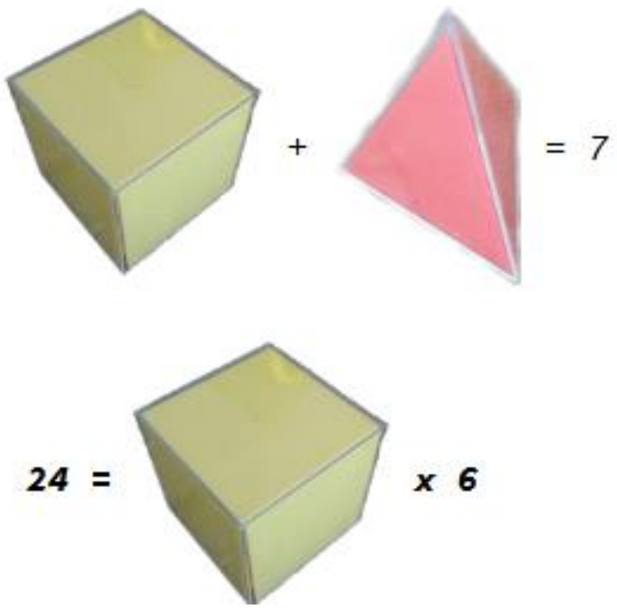
Activité « Les nombres en boite »

Sauras tu retrouver le ou les nombres que le professeur a caché dans les différents solides ? Voici un indice pour t'y aider :

27 =  + 11

2 x = 25

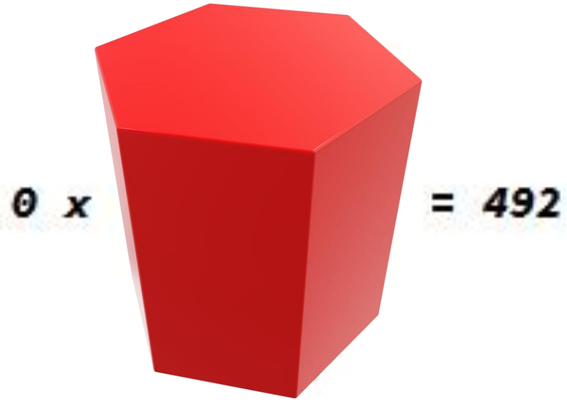


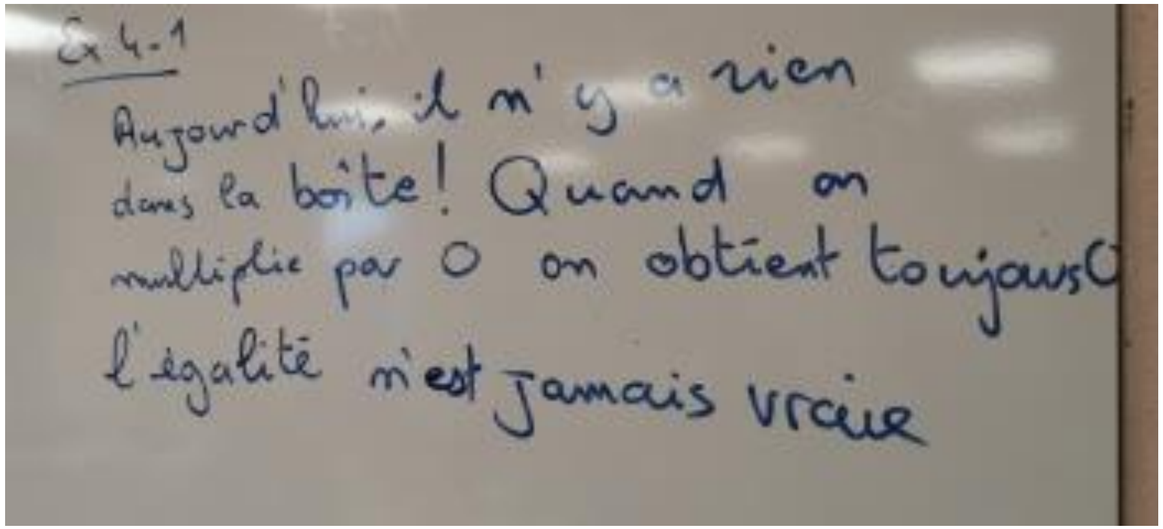


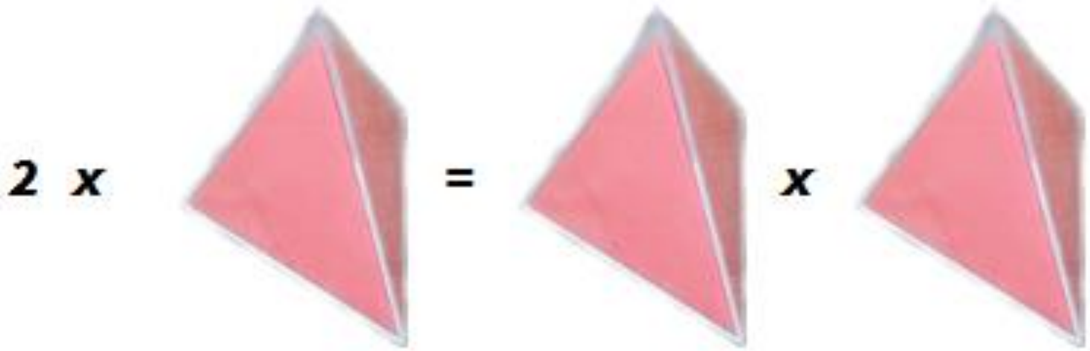
Un élève dit « il peut y avoir des nombres différents dans le cube dans l'indice du haut et dans celui du bas ! »
« non, ce n'est pas possible, c'est le même cube, il y en a qu'un... »

« pour trouver, l'ordre des indices à une importance »

« il faut tenir compte de tous les indices »







<u>Réponses proposées :</u>

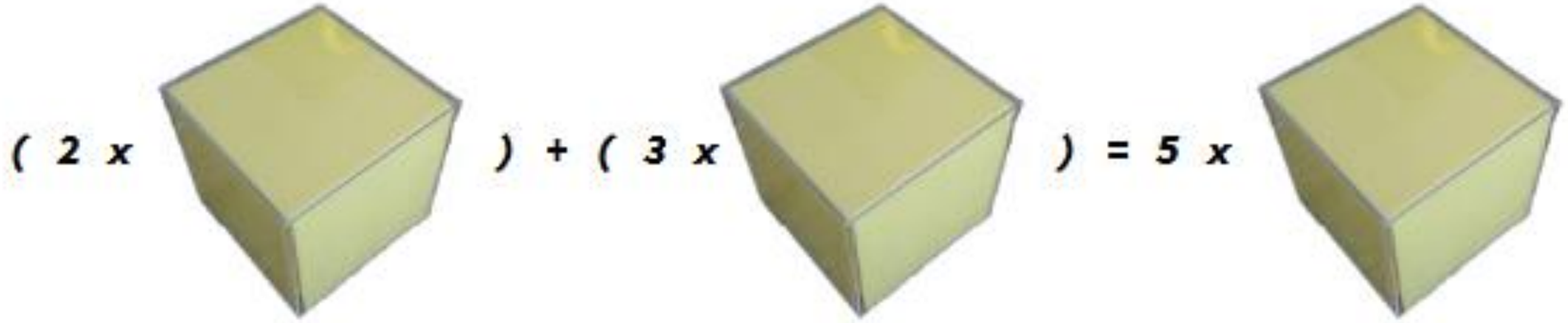
2

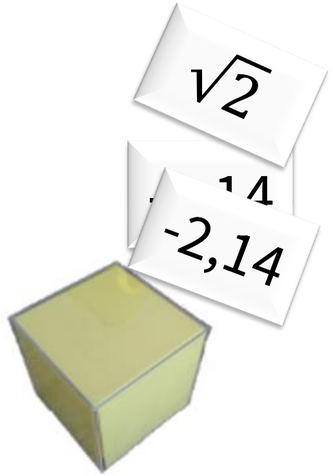
Rien

0

2 ou 0

1 ou 0





<u>Réponses proposées :</u>

0 1 2 5 9 plein tous les nombres
les multiples de 5

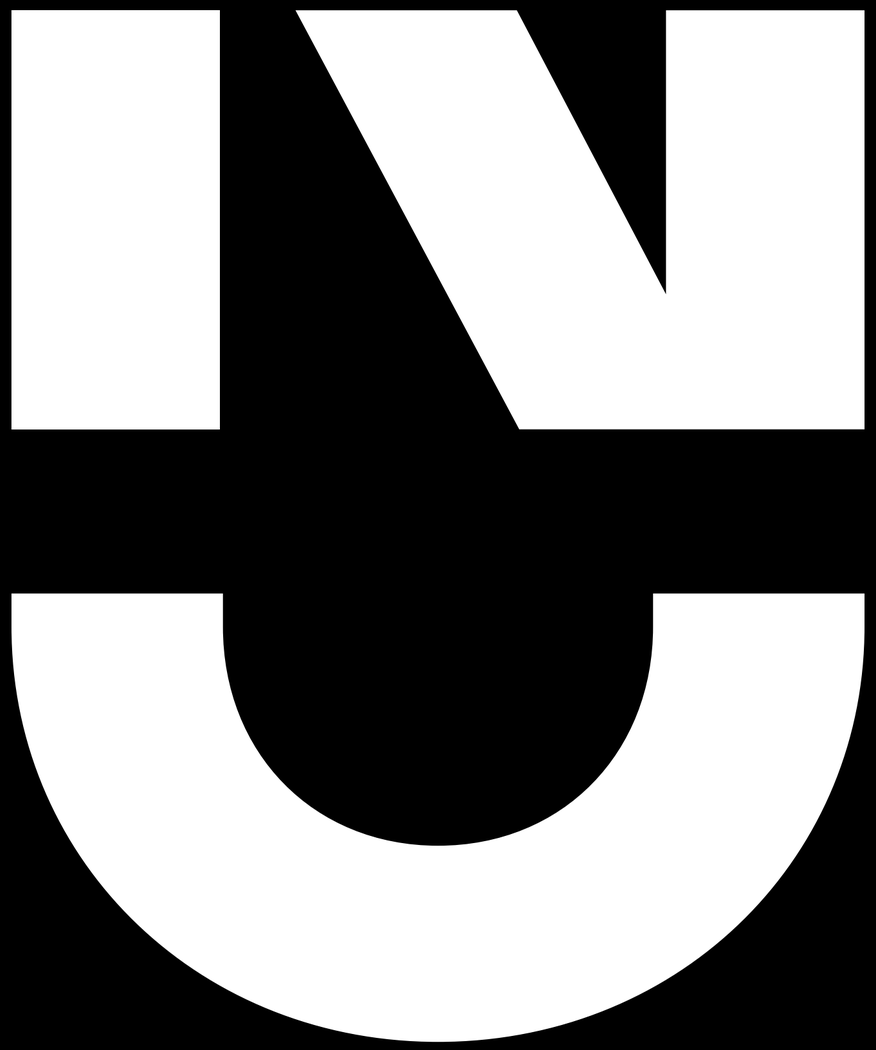
« il y en a à l'infini ! »

« c'est parce que 2 fois le cube + 3 fois le cube, on peut faire 2 + 3 et ça fait 5 fois le cube. »

« On aurait pu mettre un seul papier avec le signe de l'infini »

Perspectives

- Travailler la pensée algébrique dès la classe de 6e
- Expliciter la fonction de la lettre
- Mettre en évidence les propriétés du calcul numérique
- Utiliser le signe = uniquement entre deux membres
- Expliciter les quantificateurs
- Expliciter la différence entre identité et égalité
- Travailler explicitement les différents genres de tâches

Merci pour votre attention !

Badri BELHAJ, Céline SAUVETRE, Thierry BARON, Nicole DERSOIR, Vincent LE GLAUNEC, Christian JUDAS, Sylvie GRAU, Anne ARNEAULT, Franck BERNARD