

Les fractions décimales :

La question de l'appropriation
des savoirs par les élèves

Journée académique de l'IREM – Mercredi 6 avril 2022

Groupe IREM 1^{er} degré

Plan de l'atelier :

- Présentation d'un début de séquence pour introduire les fractions décimales en CM1
- La phase d'entraînement : quelles tâches pour permettre aux élèves de s'appropriier les connaissances ?
- Nos choix didactiques.

Une séquence pour introduire les fractions décimales au CM1

Une séquence inspirée d'Ermel CM1

Séance n°1

Objectifs :

- Établir les relations $1 = 100/100 = 10/10$ et $1/10 = 10/100$
- Se repérer sur une bande graduée en centièmes
- Envisager la fraction comme un nombre plus que comme une mesure de longueur

Séance n°1

Matériel :

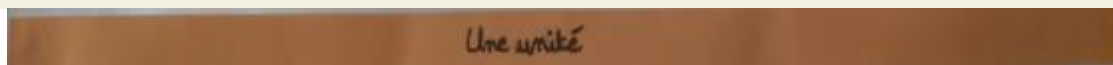
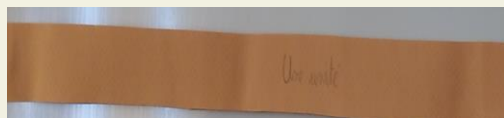
Une grande bande blanche graduée en $1/100^{\text{ème}}$ (2,5 mètres)



0



Du papier coloré pour représenter l'unité et le $1/10^{\text{ème}}$ u



Séance n°1

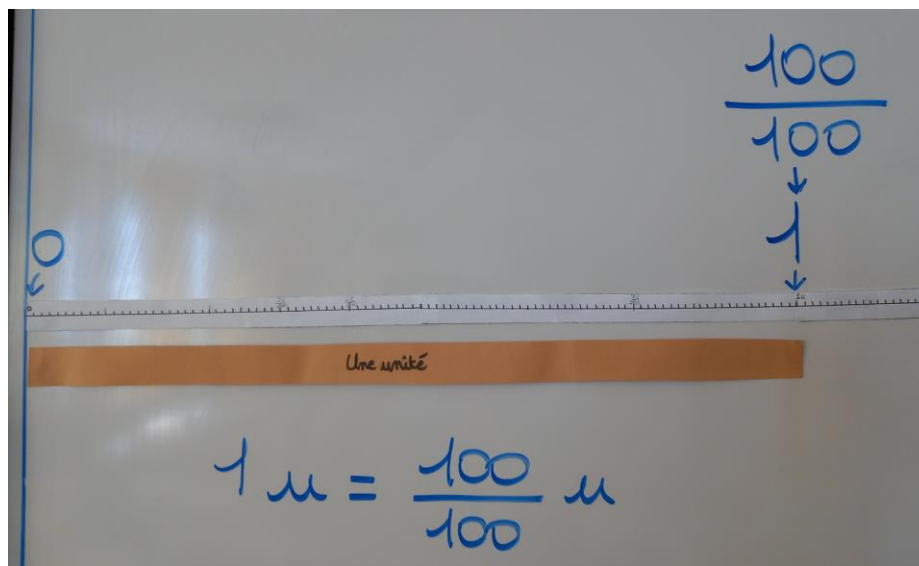
Trois principales étapes :

🔑 Etape 1 : établir la relation entre centièmes et unité

Consigne : Vous allez découper la bande de couleur pour qu'elle mesure 1 unité.

Institutionnalisation : Il y a 100 centièmes dans une unité.

Pour construire une bande de 1 unité, il faut donc 100 intervalles.



Séance n°1

👉 **Etape 2 : placer les unités sur la bande graduée blanche**

Consigne : *Sur votre bande graduée blanche, vous allez pouvoir placer les nombres 1, 2, 3, etc.*

Institutionnalisation : *1, 2, 3, 4, 5 correspondent à des nombres entiers, les autres graduations vont correspondre à des nombres non entiers qui peuvent s'écrire sous la forme de fractions.*

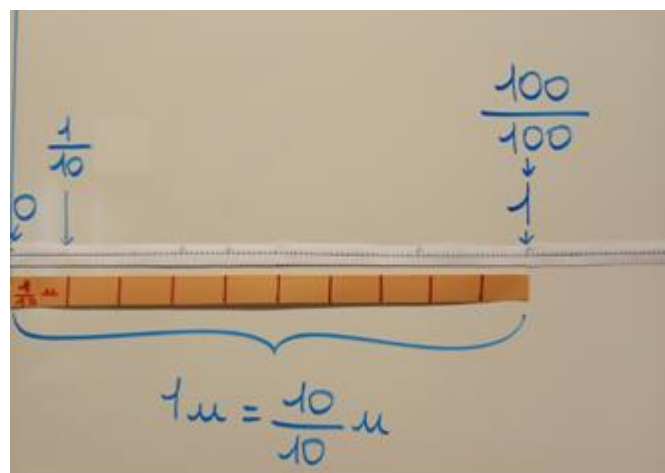
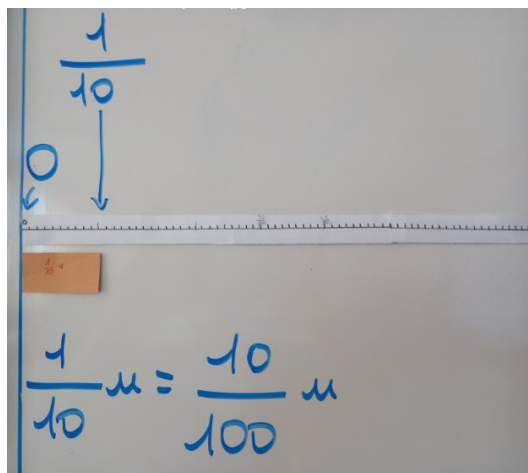
Séance n°1

👉 Etape 3 : établir la relation entre centièmes et dixièmes

Consigne : Avec votre droite graduée en centièmes, vous allez construire une bande de $\frac{1}{10} u$.

Institutionnalisation : Il y a 10 centièmes dans un dixième.

Pour construire une bande de $1/10$ unité je compte donc 10 intervalles de un centième.



Séance n°2

Séance 2 : Décomposition (de façon canonique) d'une fraction décimale (1h)

Objectif : Apprendre à décomposer une fraction décimale, de façon canonique, afin de l'encadrer entre deux nombres entiers et de la situer facilement sur une ligne graduée.

Pour atteindre cet objectif, nous procédons en trois phases :

- Utilisation collective de l'équivalence $1 = \frac{100}{100}$ puis de l'équivalence $1 = \frac{10}{10}$ pour placer des nombres entiers sur la droite graduée (15 min)
- Vers la décomposition des fractions décimales (30 min)
- Entraînement (15 min)

Matériel à prévoir

Pour les élèves :

- La droite graduée
- Bandes 1u et $\frac{1}{10}$ u de couleur
- Ardoise

Pour l'enseignant :

- La droite graduée au tableau
- Bandes 1u et $\frac{1}{10}$ u de couleur
- Une bande 1u graduée en dixièmes
- L'affiche « mémoire » de la classe

Phase A : Utilisation de l'équivalence $1 = \frac{100}{100}$ puis de l'équivalence $1 = \frac{10}{10}$

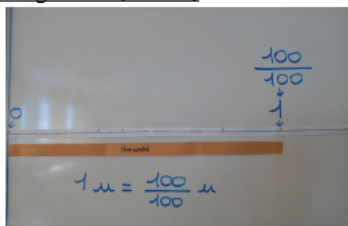
pour placer des nombres entiers sur la droite graduée (15 min)

Recherches en binômes, validation en groupe classe

1) Utilisation de l'égalité $1 = \frac{100}{100}$

En reprenant la bande de couleur 1u, l'enseignant demande aux élèves de rappeler l'égalité trouvée lors de la séance précédente.

Il place, pour mémoire, la bande 1u sous la ligne graduée blanche et écrit l'équivalence.



Relation entre écriture fractionnaire et écriture chiffrée

L'enseignant demande aux élèves « où va-t-on placer $\frac{300}{100}$? »

Les élèves, en comptant de 100 en 100, placent cette fraction sur la graduation 3. En reprenant les propositions des élèves, l'enseignant précise que « $\frac{300}{100} = \frac{100}{100} + \frac{100}{100} + \frac{100}{100}$

et comme $\frac{100}{100} = 1$ alors $\frac{300}{100} = 3$. »

Relation entre écriture chiffrée et écriture fractionnaire

L'enseignant demande maintenant « 4, c'est combien de centièmes ? »

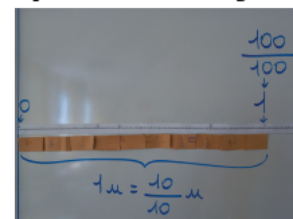
Il explicite la démarche qui est à l'inverse de celle utilisée ci-dessus. « Avec la bande unité qu'on positionne au tableau, on sait que dans une unité il y a 100 centièmes, donc dans 2 unités il y a 200 centièmes, dans 3 unités il y a 300 centièmes et dans 4 unités il y a 400 centièmes. Donc 4 se trouve à 400 centièmes de 0. »

L'enseignant écrit $\frac{400}{100}$ sous la droite graduée à la graduation 4. Il écrit également

l'égalité $4 = \frac{400}{100}$ sur l'affiche « mémoire » de la classe.

En fonction de l'avancée du groupe classe, l'enseignant pourra, ou non, proposer le même questionnement avec 7 et 9.

A ce moment, nous choisissons délibérément des nombres qui vont au-delà de la ligne graduée dont disposent les élèves afin de les obliger à utiliser l'équivalence $1 = \frac{100}{100}$.



2) Utilisation de l'égalité $1 = \frac{10}{10}$

En reprenant plusieurs bandes de couleur $\frac{1}{10}$ u, l'enseignant demande aux élèves « combien doit-on prendre de bande $\frac{1}{10}$ u pour faire 1 unité ? »

En suivant les propositions des élèves, il place, pour mémoire, 10 bandes $\frac{1}{10}$ u sous la bande unité disposée précédemment et écrit sous la fraction $\frac{100}{100}$ la fraction $\frac{10}{10}$. Il montre également l'égalité $1 = \frac{10}{10}$ sur l'affiche « mémoire » de la classe.

Relation entre écriture fractionnaire et écriture chiffrée

Puis l'enseignant demande aux élèves « où va-t-on placer $\frac{50}{10}$? »

Certains élèves vont compter les petites graduations, donc les centièmes. L'enseignant peut les inciter à prendre la bande $\frac{1}{10}$ pour réaliser que l'on cherche 50 fois cette bande. Ils tenteront alors de la reporter 50 fois. Cette démarche est longue et peu fiable.

D'autres élèves, en utilisant l'égalité $1 = \frac{10}{10}$ comptent de 10 en 10 et placent cette fraction sur la graduation 5.

L'enseignant précise que « $\frac{50}{10} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{10}{10}$ et comme $\frac{10}{10} = 1$ alors $\frac{50}{10} = 5$ ». Lors de cette mise en commun, il insiste sur le fait « qu'il est plus rapide d'utiliser directement les égalités sans passer par le comptage des graduations »

Afin de s'assurer que les élèves font bien le lien entre l'écriture fractionnaire en dixièmes et l'écriture chiffrée, l'enseignant demande également « où placer $\frac{30}{10}$ sur la droite graduée ? ». Si besoin, il réitère avec $\frac{20}{10}$.

A chaque fois l'enseignant insiste sur la démarche en reprenant les égalités comme lors des phases précédentes.

En fonction de l'avancée du groupe classe, l'enseignant pourra, ou non, proposer le même questionnement avec $\frac{60}{10}$ et $\frac{80}{10}$ pour, à nouveau, que les élèves réfléchissent sur des nombres qui vont au-delà de la ligne graduée et, ainsi, les obliger à utiliser l'équivalence $1 = \frac{10}{10}$.

Séance n°2

Relation entre écriture chiffrée et écriture fractionnaire

L'enseignant demande « 4 c'est combien de dixièmes ? »

Il peut utiliser une bande unité partagée en dixièmes si nécessaire. Il explicite à nouveau la démarche. « Dans une unité, il y a 10 dixièmes, dans 2 unités il y a 20 dixièmes, dans 3 unités il y a 30 dixièmes, et dans 4 unités il y a 40 dixièmes. Donc 4 se trouve à 40 dixièmes de 0. »

L'enseignant écrit $\frac{40}{10}$ sous la droite graduée à la graduation 4. Il écrit également l'égalité

$4 = \frac{40}{10}$ sur l'affiche « mémoire » de la classe.

En fonction de l'avancée du groupe classe, l'enseignant pourra, ou non, proposer le même questionnement avec 11 et 13.

Phase B : Vers la décomposition des fractions décimales (30 min)

Lors de cette phase, il est important que les élèves se libèrent petit à petit du matériel. A partir de cette étape, celui-ci sera utilisé comme un matériel de validation.

1) Première recherche en binômes

L'enseignant demande « Placez sur votre droite graduée les nombres : $\frac{23}{100}$, $\frac{32}{100}$ »

Pour les plus rapides, on peut proposer d'autres valeurs numériques : $\frac{78}{100}$, $\frac{99}{100}$, $\frac{34}{10}$

L'enseignant passe de binômes en binômes. Il oriente les groupes en difficultés et les incite à recourir à la droite graduée et aux équivalences. Il valide les réponses. Pour les plus rapides, il leur propose les autres valeurs.

Mise en commun des différentes stratégies sans hiérarchie pour $\frac{23}{100}$

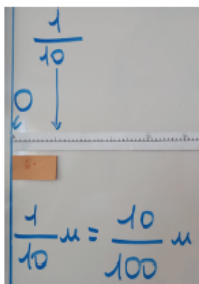
Certains élèves comptent 23 petites graduations, les centièmes.

D'autres utilisent la bande $\frac{1}{10}$ et construisent l'égalité $\frac{23}{100} =$

$\frac{2}{10} + \frac{3}{100}$. D'autres encore peuvent marquer les dixièmes sur leur bande graduée pour aller plus vite.

L'enseignant revient sur une bande de couleur $\frac{1}{10}$, il écrit $\frac{1}{10}$ sur

la bande graduée et demande aux élèves de trouver une autre façon de l'écrire : $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$. Il écrit cette égalité au tableau et la montre sur l'affiche « mémoire » de la classe. Il propose également de marquer, en rouge par exemple, les graduations des dixièmes.



Mise en commun pour $\frac{32}{100}$

L'enseignant met en avant le fait que c'est plus rapide et plus sûr de compter $\frac{3}{10}$ puis $\frac{2}{100}$

2) Deuxième recherche en binômes

L'enseignant demande « Placez sur votre ligne graduée le nombre : $\frac{127}{100}$ ».

Mise en commun

L'enseignant revient sur les différentes stratégies des élèves. Il met en évidence que le comptage n'est pas opérant et que c'est plus facile de trouver où placer le nombre quand on compte 1 puis $\frac{2}{10}$ puis $\frac{7}{100}$.

3) Troisième phase individuelle

L'enseignant demande « Placez sur votre ligne graduée le nombre : $\frac{260}{100}$ ».

Mise en commun

L'enseignant revient sur les différentes stratégies des élèves. Il met en évidence que le comptage n'est pas opérant et que c'est plus facile de trouver où placer le nombre quand on compte 2 puis $\frac{6}{10}$ puis $\frac{0}{100}$. Il fait remarquer aux élèves que $\frac{260}{100}$ tombe sur une graduation en dixième. Il demande alors « comment peut-on écrire $\frac{260}{100}$ autrement, en dixièmes ? ».

Ainsi, l'égalité $\frac{260}{100} = \frac{26}{10}$ est mise en évidence par les élèves.

4) Institutionnalisation

L'enseignant explique : « On a placé des fractions, donc des nombres, exprimés en centièmes sur la droite graduée en centièmes. Sur la droite graduée, on peut aussi retrouver les unités, les dixièmes, les centièmes... Pour placer une fraction rapidement, on peut chercher combien il y a d'unités, de dixièmes et de centièmes dedans. On dit alors qu'on décompose la fraction. »

L'enseignant écrit sur l'affiche « mémoire » les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{127}{100} &= \frac{100}{100} + \frac{20}{100} + \frac{7}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} \\ \frac{260}{100} &= \frac{200}{100} + \frac{60}{100} + \frac{0}{100} = 2 + \frac{6}{10} + \frac{0}{100} \\ 2 + \frac{6}{10} &= \frac{20}{10} + \frac{6}{10} = \frac{26}{10} \\ \frac{260}{100} &= \frac{26}{10}\end{aligned}$$

Phase C : Entraînement (15 min)

La phase d'entraînement

Comment permettre aux élèves de s'appropriier les connaissances ?

☛ Quels exercices proposeriez-vous aux élèves sur cette troisième partie de séance 2 ?

Nos choix

Nos choix

- Principes qui sous-tendent nos choix :
 - Jouer sur les variables didactiques pour faire évoluer les procédures des élèves et leur faire fréquenter les différents cas possibles
 - Jouer sur les modalités de travail pour permettre l'appropriation des savoirs par chacun des élèves : une dialectique dévolution (à l'échelle de chaque élève) - institutionnalisation
- Une tension entre :
 - Installer des routines rassurantes pour certains élèves et permettre l'acquisition des raisons mathématiques
 - permettre de réussir et permettre d'apprendre des maths

Phase A

	1=100/100	1=10/10
Tâches	• Rappel séance 1 : <i>par les élèves</i>	• Équivalence : <i>par les élèves + affiche</i>
	• <i>Collectif classe</i> puis correction P : $300/100 =$	• <i>Collectif classe</i> puis correction P : $50/10 =$
	• <i>Collectif classe</i> puis correction P : $4 =$	• <i>Collectif classe</i> puis correction P : $30/10$ (20/10)
	• $(7= 9 =)$	• (Collectif classe puis correction P : $60/10$; $80/10$)
		• <i>Collectif classe</i> puis correction P : 4 ; (11*, 13*)
Choix de variables didactiques	Nombres entiers car première étape Nombres entiers hors de la bande -> obliger à utiliser l'égalité Nombres entiers inférieurs à 10 (sauf *) : plus facile pour raisonner au début mais peut installer une connaissance erronée (le nombre cherché correspond au premier chiffre du dénominateur) Fraction décimale -> écriture décimale Écriture décimale -> fraction décimale *	
Choix de modalité de travail	Notions en début d'apprentissage : utilisation des égalités en collectif classe avec correction de P après chaque cas	

Phase B

		Choix de variables didactiques
	<ul style="list-style-type: none"> Recherche en <i>binôme</i> : placer 23/100 ; 32/100 	<ul style="list-style-type: none"> Nombres inférieurs à 1 -> 3 procédures encore possibles dont le comptage des 100^è (pas d'usage des égalités) de la fraction décimale à la position sur la droite numérique : permet plusieurs procédures 2 cas analogues minimum
	<ul style="list-style-type: none"> Pour certains : 78/100 ; 99/100 ; 24/10 	
Choix modalités de travail	<ul style="list-style-type: none"> Cas nouveau -> situation de recherche par 2 et mise en commun après chaque cas Mise en commun pour 23/100 -> partage de ce qui est nouveau par tous : $1/10 = 10/100$ Temps de travail sur 32/100 -> appropriation de connaissances nouvelles Mise en commun pour 32/100 : mise en évidence d'une procédure plus rapide et plus sûre 	
	<ul style="list-style-type: none"> Recherche en binôme : placer 127/100 	<ul style="list-style-type: none"> Nombre supérieur à 1 et inférieur à 10 -> comptage des centièmes long, obliger à utiliser les égalités
	<ul style="list-style-type: none"> Recherche en binôme : placer 260/100 	<ul style="list-style-type: none"> Nombre supérieur à 1 et inférieur à 10, nombre de dixièmes nul -> 2 écritures possibles
Choix modalités de travail	<p>mise en commun après chaque cas-> invalider la procédure de comptage, montrer l'usage des égalités et permettre leur réinvestissement</p> <p>Institutionnalisation -> constituer la mémoire de classe, indiquer les outils pour la phase d'entraînement</p>	

Phase C

	Sur ardoise : décomposer	
Choix de variables didactiques	263/100	<ul style="list-style-type: none"> • Ligne graduée disponible -> validation des réponses • Nombres supérieurs à 1 • 2 cas par 2 cas
	324/100	
	49/10	<ul style="list-style-type: none"> • 1 et 2 : analogues au cas 1 de l'affiche -> stabiliser les K • 3 et 4 : adaptation des connaissances • 5 : analogue au cas 2 de l'affiche • 6 : nouvelle adaptation des K -> importance de faire fréquenter ce cas mais pas au début -> revenir au raison de la décomposition -> identifier les élèves qui fonctionnent par imitation
	17/10	
	450/100	
	105/100	
Choix de modalité de travail	<ul style="list-style-type: none"> • Sur ardoise -> chaque élève + rythme • Correction après chaque cas avec explication -> poursuivre l'institutionnalisation de la procédure canonique et son réinvestissement immédiat • P place chaque fraction sur la droite graduée et fait un lien avec l'encadrement entre 2 entiers : lien entre décomposition de la fraction et ordre des nombres 	

Séance 3

	Sur ardoise : décomposer		Écrire « la » fraction qui correspond	
Choix de variables didactiques	234/100	<ul style="list-style-type: none"> • Ligne graduée disponible -> validation des réponses • Alternance /100 /10 -> éviter le fonctionnement par imitation • Faire fonctionner l'ancien • Pas de cas avec 0 	3u + 6/10 + 9/100	<ul style="list-style-type: none"> • Tâche « inverse » -> fait fonctionner les égalités « dans l'autre sens » • On commence toujours par les u • Cas avec des 0
	15/10		4u + 8/100	
	45/100		23u + 4/10	
	125/10			
Choix de modalité de travail	<ul style="list-style-type: none"> • Sur ardoise -> chaque élève + rythme • Correction après chaque cas avec explication permet de poursuivre l'institutionnalisation de la procédure canonique et son réinvestissement immédiat • P place chaque fraction sur la droite graduée et fait un lien avec l'encadrement entre 2 entiers : lien entre décomposition de la fraction et ordre des nombres 			