Les mathématiques pour comprendre le monde : Un enjeu de l'enseignement scientifique

Guillaume FRANÇOIS-LEROUX

irem des Pays de la Loire

Journée académique de

IREM des Pays de la Loire

Nantes - Le 30 juin 2021

1. Les nouveautés du programme de 2019
   - En seconde
   - L'enseignement scientifique
2. L'enseignement scientifique
   - La Terre, un astre singulier
     - La méthode d'Ératosthène
     - La triangulation
     - Bilan
3. Linéarité, exponentielle, logarithme
   - Activités rapides
   - Introduire le Logarithme
4. D'autres exemples
5. Conclusion
6. Mes sources

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

Préambule - Organisation du programme

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur peut s'appuyer sur l'étude de documents historiques.

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

Nombres et calculs

- **Histoire des mathématiques**

La notion apparemment familière de nombre ne va pas de soi. Deux exemples : la crise provoquée par la découverte des irrationnels chez les mathématiciens grecs, la différence entre « nombres réels » et « nombres de la calculatrice ». Il s'agit également de souligner le gain en efficacité et en généralité qu'apporte le calcul littéral, en expliquant qu'une grande partie des mathématiques n'a pu se développer qu'au fur et à mesure de l'élaboration, au cours des siècles, de symbolismes efficaces. Il est possible d'étudier des textes anciens d'auteurs tels que Diophante, Euclide, Al-Khwarizmi, Fibonacci, Viète, Fermat, Descartes et mettre en évidence leurs aspects algorithmiques.

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

Géométrie

- **Histoire des mathématiques**

Les progrès apportés par la « méthode des coordonnées » de Descartes, puis par la notion de vecteur, permettent de relier efficacement géométrie, physique et calcul.

On pourra évoquer les mathématiques grecques, en mettant en évidence le rôle central de la géométrie dans la naissance de l'idée de démonstration ainsi que le faible développement de l'algèbre sous l'Antiquité, en partie dû à l'appui systématique sur la géométrie.

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

Fonctions

- **Histoire des mathématiques**

On peut évoquer la très lente élaboration de la notion de fonction, depuis l'Antiquité jusqu'à la codification actuelle par Dirichlet, en mettant en évidence quelques étapes importantes : Newton, Leibniz, Euler. On souligne alors l'importance de la notation algébrique.

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

Statistiques et probabilités

- **Histoire des mathématiques**

L'histoire des probabilités fournit un cadre pour dégager les éléments de la mathématisation du hasard. Un exemple est le problème des partis, dit aussi du chevalier de Méré, l'échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce point puis les travaux de Pascal, Fermat et Huygens qui en découlent. Le problème du duc de Toscane ou les travaux de Leibniz sur le jeu de dés peuvent aussi être évoqués.

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

Algorithmique et programmation

- **Histoire des mathématiques**

Les textes évoqués dans la thématique « Nombres et calculs » indiquent une préoccupation algorithmique tout au long de l'Histoire. Lorsqu'un texte historique a une visée algorithmique, transformer les méthodes qu'il présente en un algorithme, voire en un programme, ou inversement, est l'occasion de travailler des changements de registre qui donnent du sens au formalisme mathématique.

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

Il y a donc une véritable volonté :

Introduire une perspective historique
dans l'enseignement des mathématiques.

Les nouveautés du programme de 2019

En seconde

- Les obstacles épistémologiques.
- Une source de problèmes.
- Construction d'une notion et contextualisation.
- Des anecdotes.

Les nouveautés du programme de 2019

L'enseignement scientifique

Objectifs généraux de formation :

- Comprendre la nature du savoir scientifique et ses méthodes d'élaboration
- Identifier et mettre en œuvre des pratiques scientifiques
- Identifier et comprendre les effets de la science sur les sociétés et sur l'environnement

Comprendre la nature du savoir scientifique et ses méthodes d'élaboration

Dans le cadre de l'enseignement scientifique, il s'agit donc, en permanence, d'associer l'acquisition de quelques savoirs et savoir-faire exigibles à la compréhension de leur nature et de leur construction.

Identifier et mettre en œuvre des pratiques scientifiques

Dans le cadre de l'enseignement scientifique, il s'agit, chaque fois que l'on met en œuvre une authentique pratique scientifique, de l'expliciter et de prendre conscience de sa nature.

Identifier et comprendre les effets de la science sur les sociétés et sur l'environnement

Dans le cadre de l'enseignement scientifique, il s'agit de faire comprendre à chacun en quoi la culture scientifique est aujourd'hui indispensable pour saisir l'évolution des sociétés comme celle de l'environnement et de contrôler cette évolution.

Les nouveautés du programme de 2019

L'enseignement scientifique

- **Une place importante pour l'histoire raisonnée des sciences**

L'une des manières de comprendre comment se construit le savoir scientifique est de retracer le cheminement effectif de sa construction au cours de l'histoire des sciences. Il ne s'agit pas de donner à l'élève l'illusion qu'il trouve en quelques minutes ce qui a demandé le travail de nombreuses générations de chercheurs, mais plutôt, en se focalisant sur un petit nombre d'étapes bien choisies de l'histoire des sciences, de faire comprendre le rôle clé joué par certaines découvertes. Le rôle prépondérant joué parfois par tel ou tel chercheur sera souligné. Ce sera aussi l'occasion de montrer que l'histoire du savoir scientifique est une aventure humaine. Des controverses, parfois dramatiques, agitent la communauté scientifique. Ainsi, peu à peu, le savoir progresse et se précise.

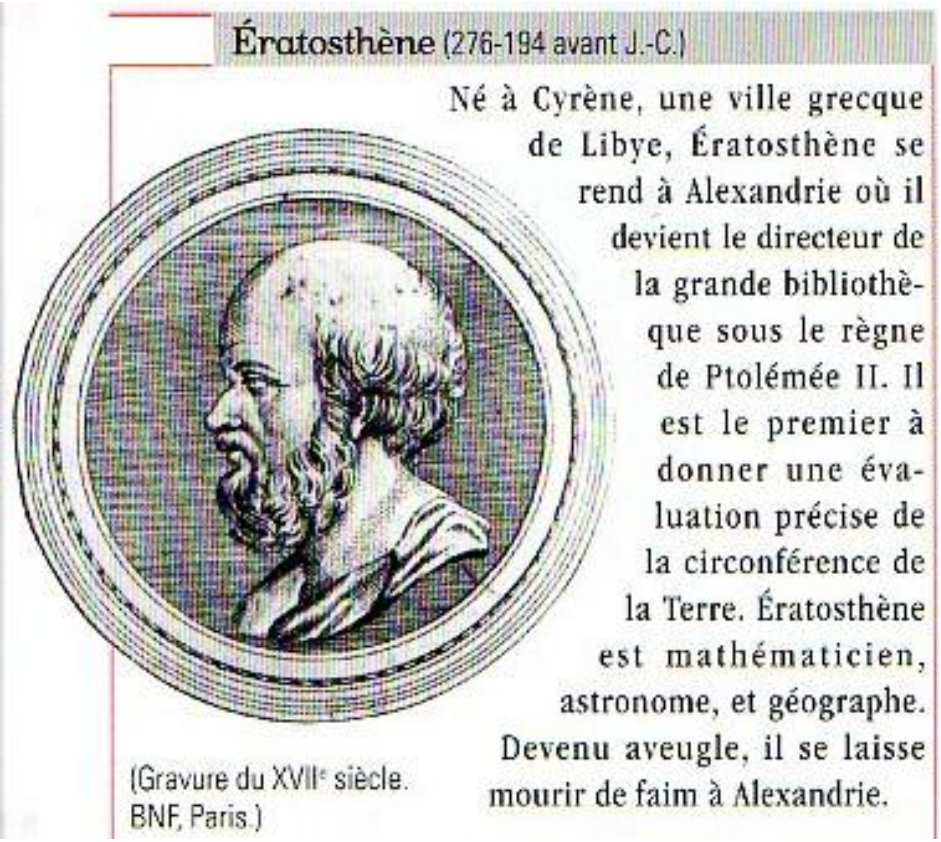
Les mathématiques pour comprendre le monde :
Un enjeu de l'enseignement scientifique

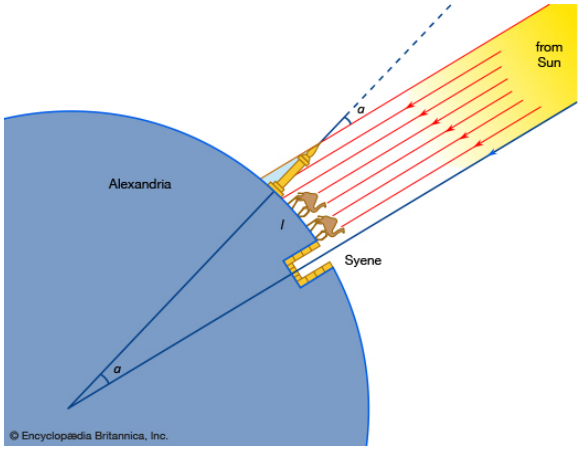
L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier

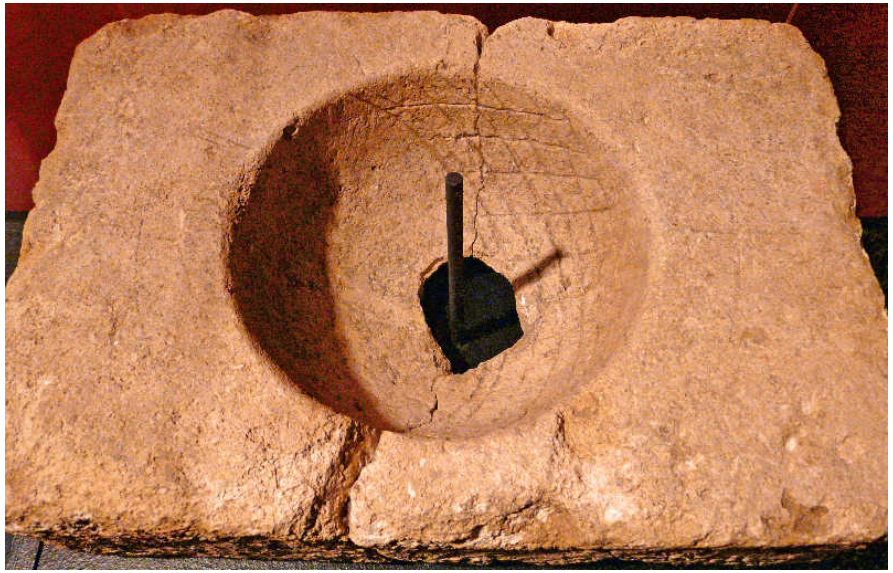
3.1 - La forme de la Terre	
L'environnement « plat » à notre échelle de perception cache la forme réelle de la Terre, dont la compréhension résulte d'une longue réflexion. Au-delà de la dimension historique et culturelle, la mise en œuvre de différentes méthodes de calcul de longueurs à la surface de la Terre permet de développer des compétences mathématiques de calcul et de représentation et invite à exercer un esprit critique sur les différents résultats obtenus, les approximations réalisées et les limites d'un modèle.	
Savoirs	**Savoir-faire**
Dès l'Antiquité, des observations de différentes natures ont permis de conclure que la Terre était sphérique, alors même que, localement, elle apparaît plane dans la plupart des expériences quotidiennes. Historiquement, des méthodes géométriques ont permis de calculer la longueur d'un méridien (environ 40 000 km) à partir de mesures d'angles ou de longueurs : méthodes d'Ératosthène et de triangulation plane.	Calculer la longueur du méridien terrestre par la méthode d'Ératosthène. Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain. Calculer le rayon de la Terre à partir de la longueur du méridien.
On repère un point à la surface de la Terre par deux coordonnées angulaires, sa latitude et sa longitude. Le plus court chemin entre deux points à la surface de la Terre est l'arc du grand cercle qui les relie.	Calculer la longueur d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle. Comparer, à l'aide d'un système d'information géographique, les longueurs de différents chemins reliant deux points à la surface de la Terre.
Prérequis et limites	
La connaissance de la loi des sinus ($\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$) n'est pas exigible. Elle est fournie pour mettre en œuvre le principe de triangulation plane (calcul d'une longueur à partir de la mesure d'une autre longueur et de deux angles). On admet que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle qui l'intercepte. Le repérage sur une sphère, déjà connu des élèves, est remobilisé. Le calcul de la longueur entre deux points le long d'un grand cercle n'est pas exigible.	

Version la plus courante lue dans les livres.



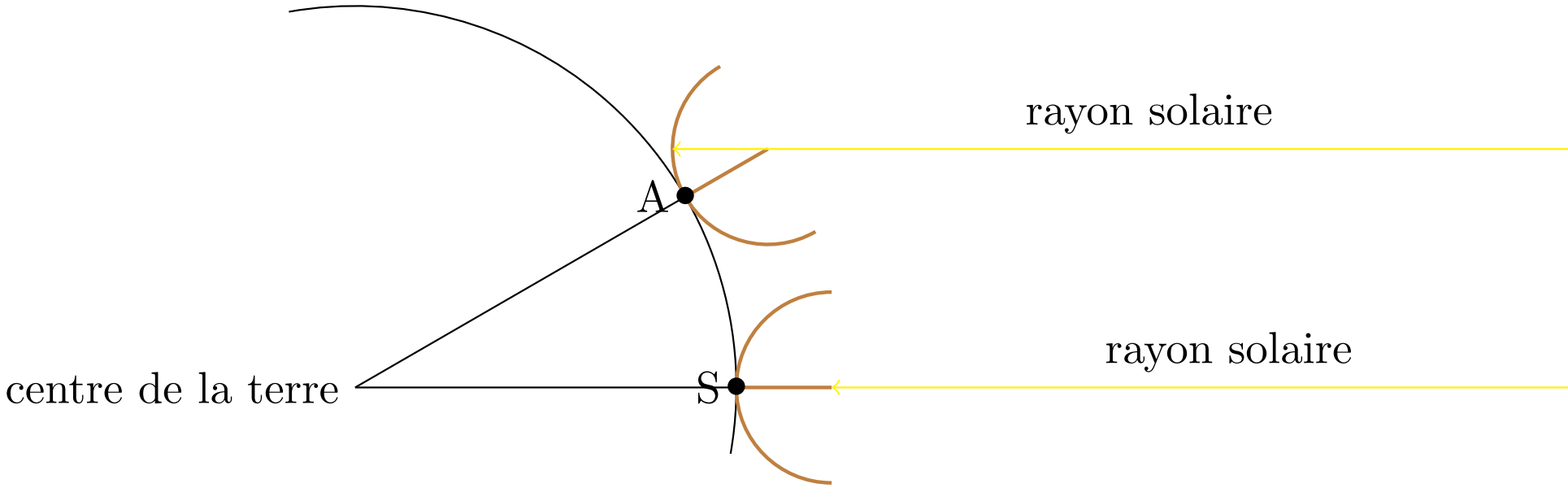


De motu circulari corporum caelestium
Cléomède
Écrivain grec du 1er siècle avant J.C.



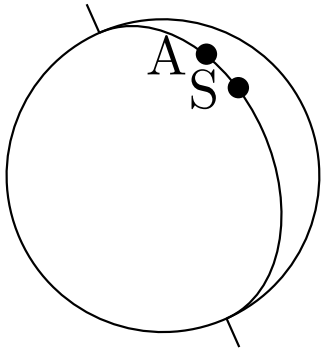
Source : Wikipédia

De motu circulari corporum caelestium
Cléomède
Écrivain grec du 1er siècle avant J.C.



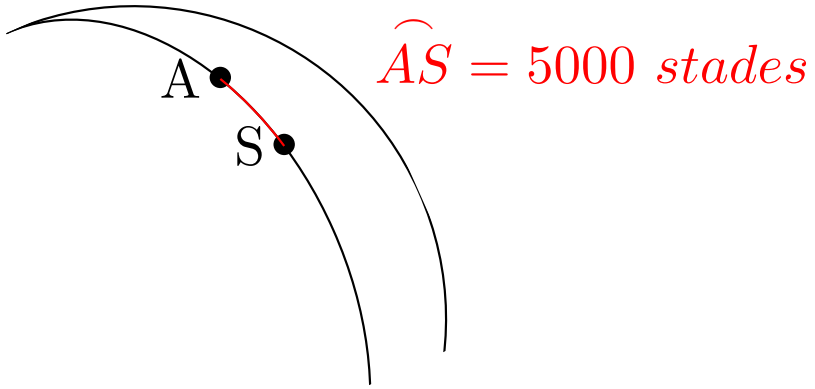
Les hypothèses d'Ératosthène :

1. Alexandrie et Syène sont situées sous un même méridien.



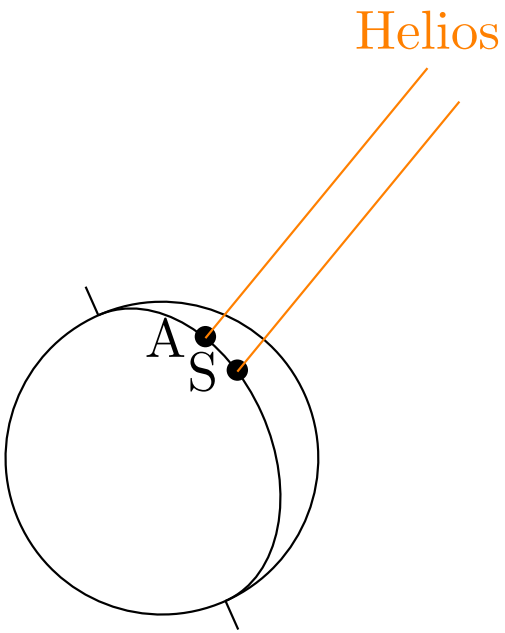
Les hypothèses d'Ératosthène :

2. La distance entre Alexandrie et Syène est de 5000 stades.



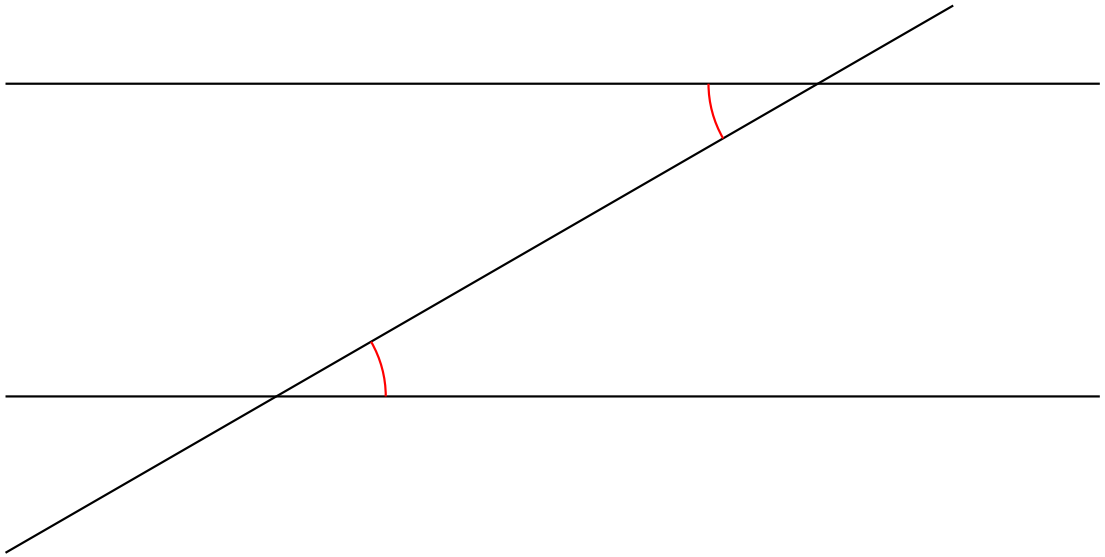
Les hypothèses d'Ératosthène :

3. Les rayons émis par différentes parties du soleil sur différentes parties de la Terre sont parallèles.



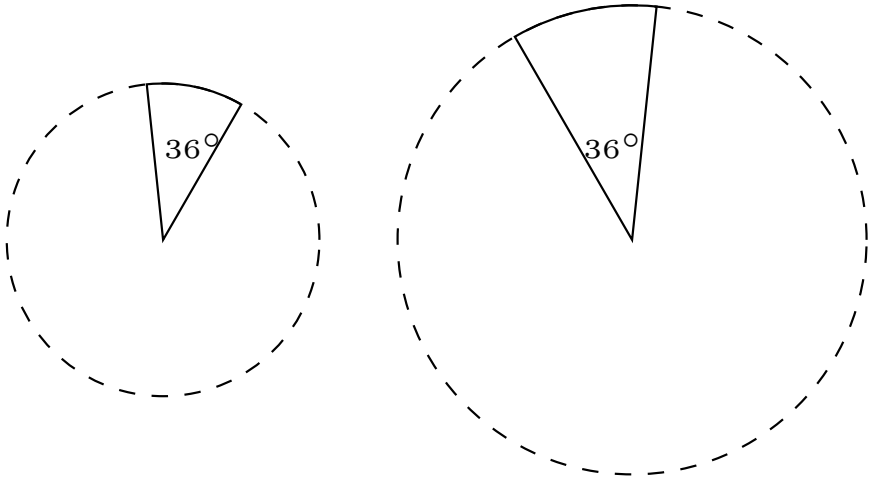
Les hypothèses d'Ératosthène :

4. Les droites qui coupent des parallèles déterminent des angles alternes égaux.



Les hypothèses d'Ératosthène :

5. les arcs interceptés par des angles égaux sont semblables.

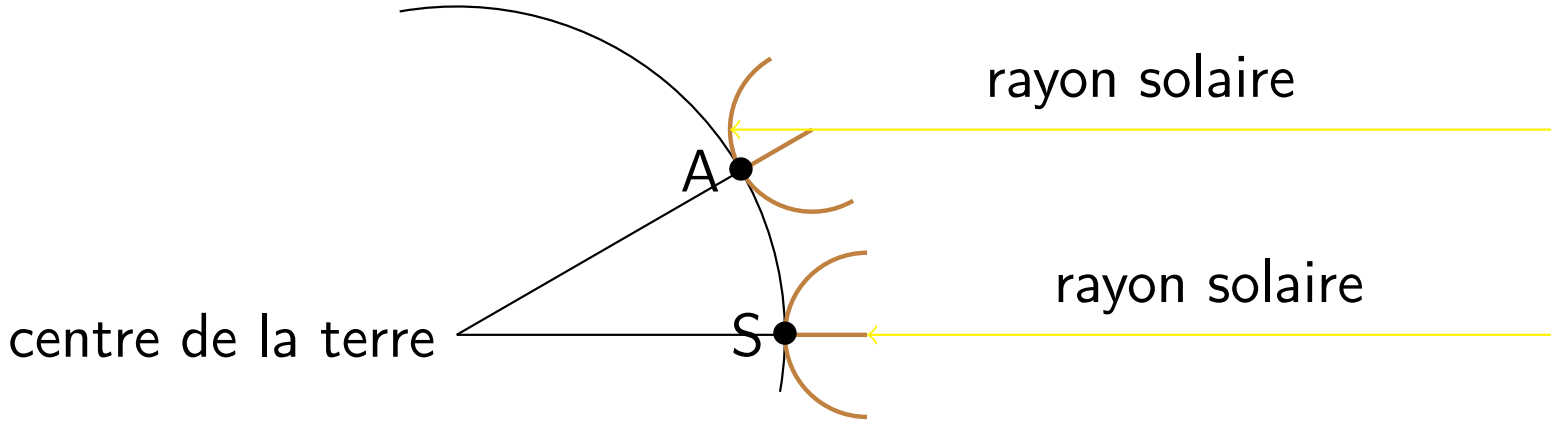


Les questions posées aux élèves :

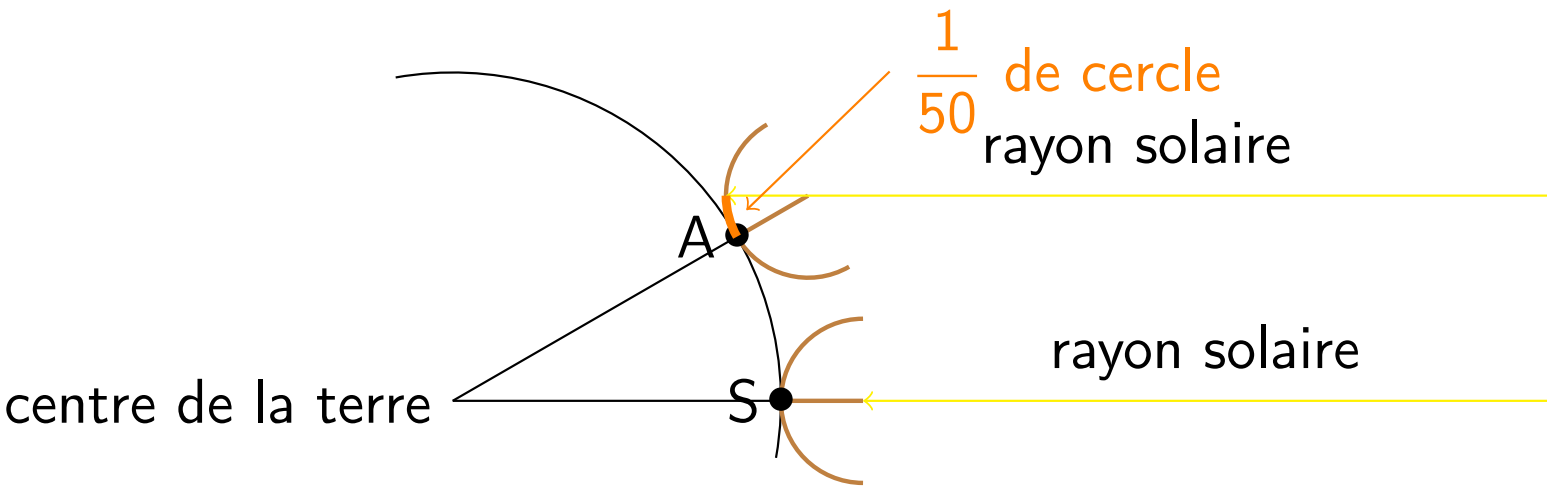
Questions

1. Qui est Ératosthène ?
2. De quand date ce texte ?
3. Donner et expliquer les 5 hypothèses de départ énoncées par Cléomède.
4. Compléter le schéma avec les mesures données dans le texte.
5. En déduire le rayon de la terre en stade, puis en km.

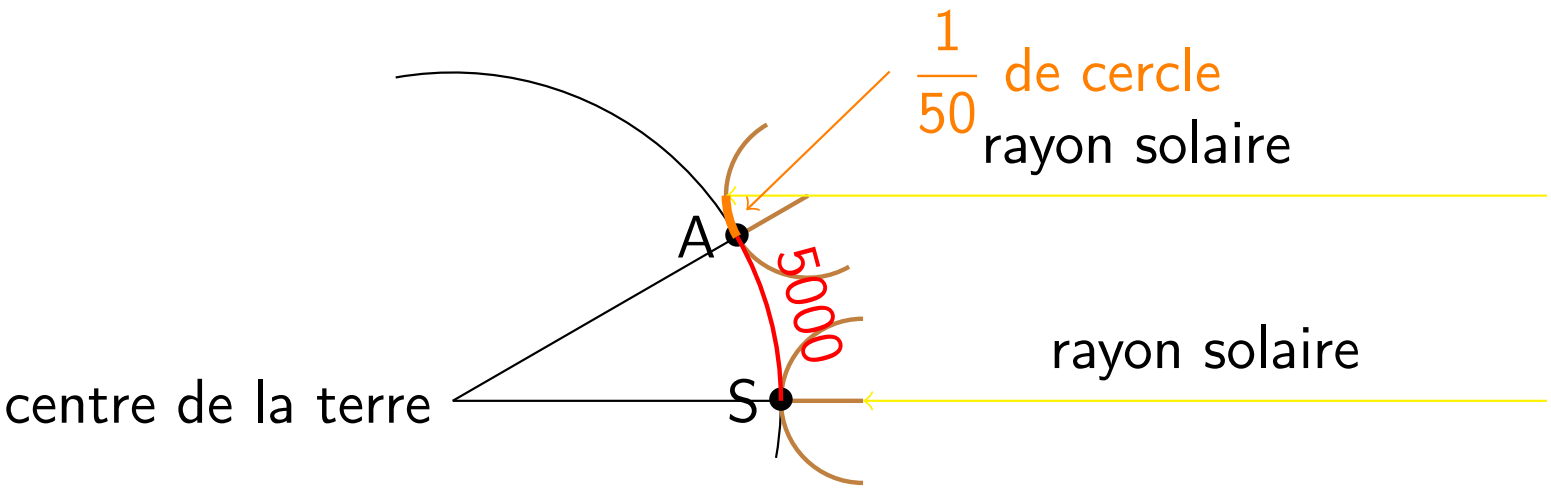
Réponses 4 et 5 :



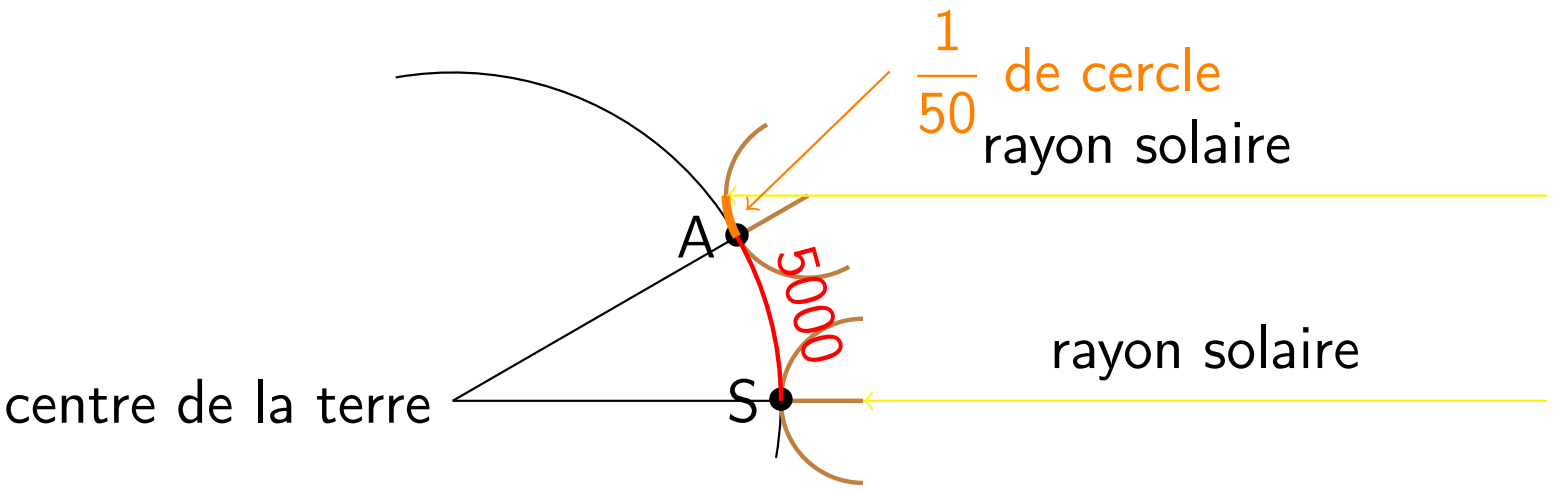
Réponses 4 et 5 :



Réponses 4 et 5 :



Réponses 4 et 5 :



$$R_T = \frac{50 \times 5\ 000}{2\pi} \approx 39\ 788\ stades \underset{157{,}5}{\propto} 6\ 266\ 726\ m \text{ soit} \approx 6\ 267\ km$$

Mesures

Avec le matériel mis à disposition (*un scaphé non gradué, un scaphé gradué, un globe terrestre, un projecteur à faisceaux parallèles*), retrouver la latitude d'une ville, ainsi que sa distance par rapport au tropique du Capricorne.

1. Écrire le protocole d'expérimentation.
2. Réaliser l'expérience.
3. Expliquer les éventuelles erreurs de mesure.

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La méthode d'Ératosthène

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La méthode d'Ératosthène

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La méthode d'Ératosthène

- Réalisation d'un protocole d'expérimentation.

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La méthode d'Ératosthène

- Réalisation d'un protocole d'expérimentation.
- Source lumineuse : téléphone portable.

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La méthode d'Ératosthène

- Réalisation d'un protocole d'expérimentation.
- Source lumineuse : téléphone portable.
- Réinvestissement du texte de Cléomède.

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La méthode d'Ératosthène

- Réalisation d'un protocole d'expérimentation.
- Source lumineuse : téléphone portable.
- Réinvestissement du texte de Cléomède.
- Travail sur l'erreur.

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

3.1 - La forme de la Terre

L'environnement « plat » à notre échelle de perception cache la forme réelle de la Terre, dont la compréhension résulte d'une longue réflexion. Au-delà de la dimension historique et culturelle, la mise en œuvre de différentes méthodes de calcul de longueurs à la surface de la Terre permet de développer des compétences mathématiques de calcul et de représentation et invite à exercer un esprit critique sur les différents résultats obtenus, les approximations réalisées et les limites d'un modèle.

Savoirs	**Savoir-faire**
Dès l'Antiquité, des observations de différentes natures ont permis de conclure que la Terre était sphérique, alors même que, localement, elle apparaît plane dans la plupart des expériences quotidiennes. Historiquement, des méthodes géométriques ont permis de calculer la longueur d'un méridien (environ 40 000 km) à partir de mesures d'angles ou de longueurs : méthodes d'Ératosthène et de triangulation plane.	Calculer la longueur du méridien terrestre par la méthode d'Ératosthène. Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain. Calculer le rayon de la Terre à partir de la longueur du méridien.
On repère un point à la surface de la Terre par deux coordonnées angulaires, sa latitude et sa longitude. Le plus court chemin entre deux points à la surface de la Terre est l'arc du grand cercle qui les relie.	Calculer la longueur d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle. Comparer, à l'aide d'un système d'information géographique, les longueurs de différents chemins reliant deux points à la surface de la Terre.

Prérequis et limites

La connaissance de la loi des sinus ($\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$) n'est pas exigible. Elle est fournie pour mettre en œuvre le principe de triangulation plane (calcul d'une longueur à partir de la mesure d'une autre longueur et de deux angles).
On admet que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle qui l'intercepte.
Le repérage sur une sphère, déjà connu des élèves, est remobilisé.
Le calcul de la longueur entre deux points le long d'un grand cercle n'est pas exigible.

Nicolas de Condorcet (1743 - 1794)

Source : Wikipédia

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

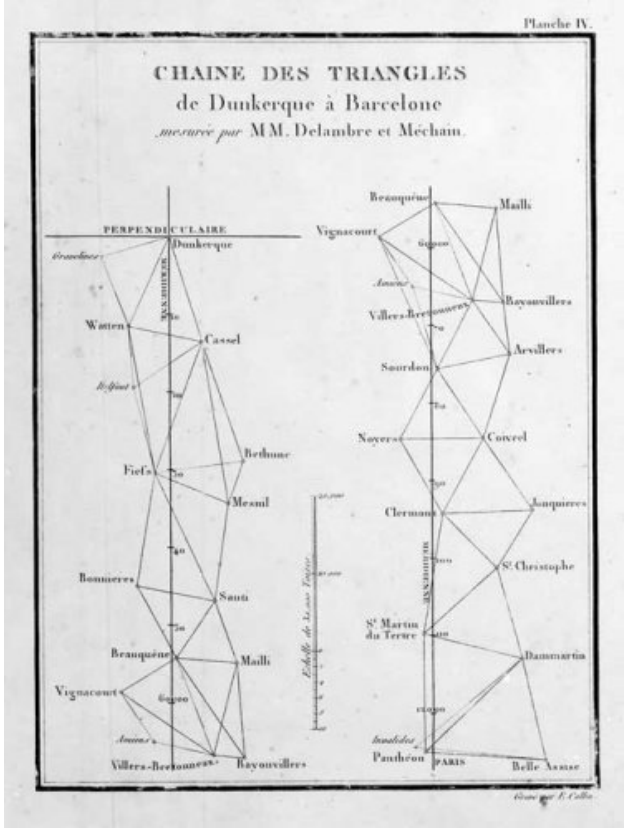
Jean-Baptiste Delambre
(1749 - 1822)

Pierre Méchain
(1744 - 1804)

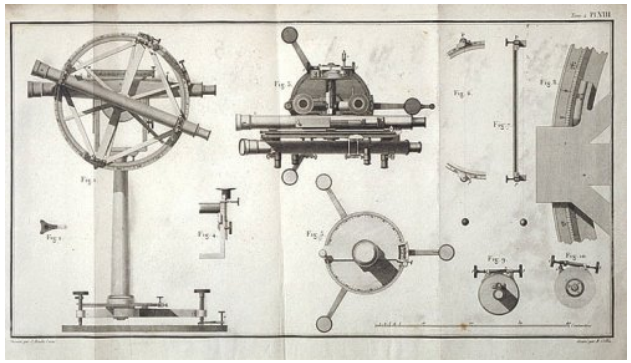
Source : Wikipédia

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation



Triangulation



Cercle répétiteur de Borda

Source : Observatoire de Paris

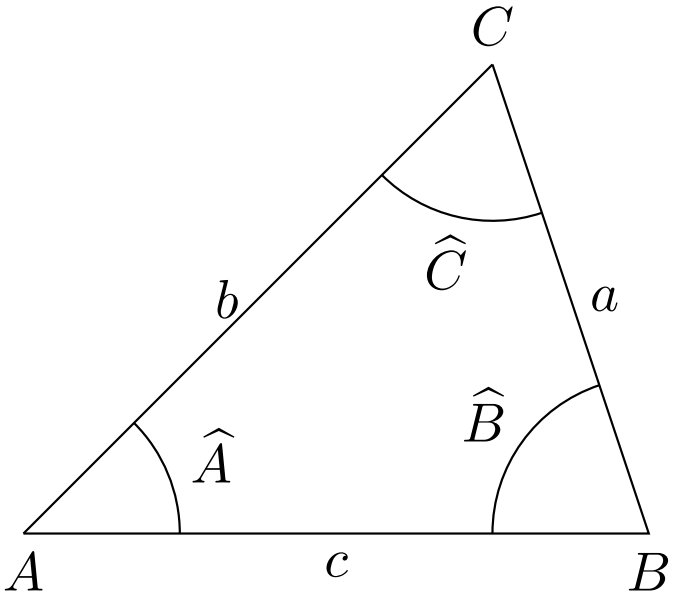
L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

Le mètre est défini pour une valeur de 1 $m \approx 0,513074$ *toises*

Place Vendôme à Paris

La propriété à connaître :



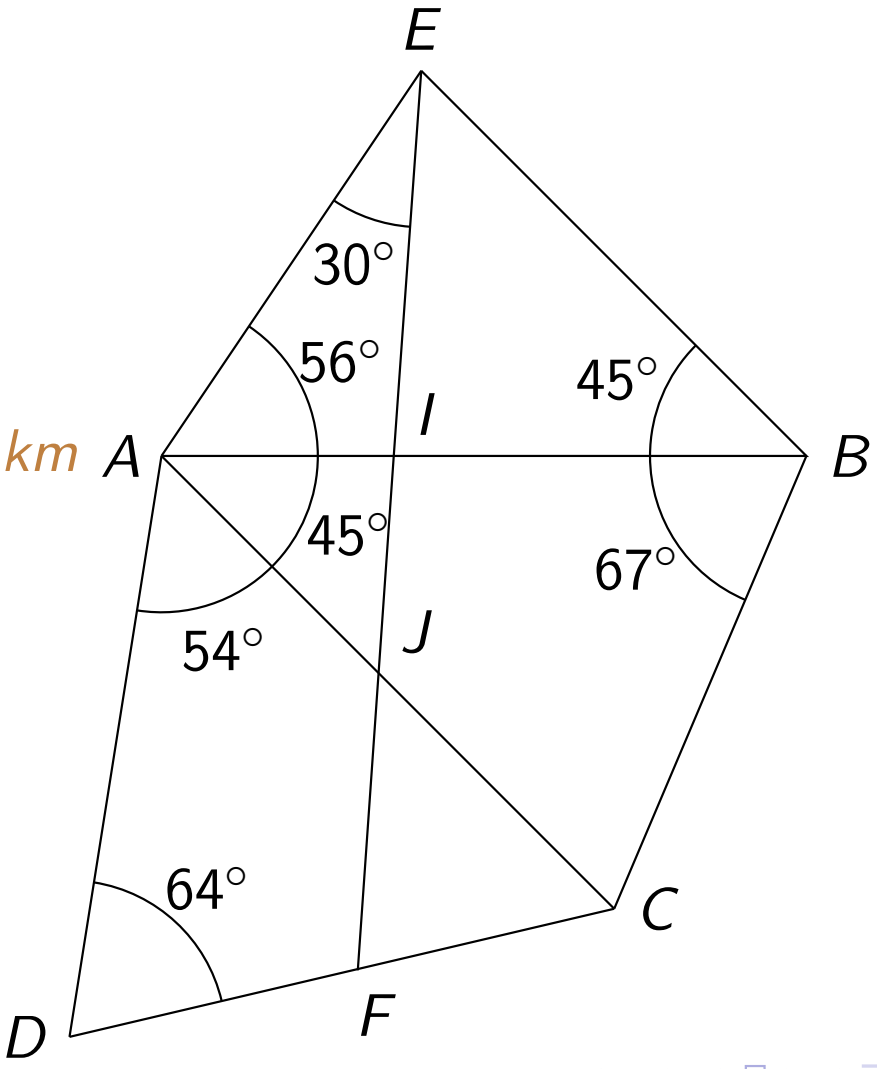
$$\frac{a}{sin\left(\widehat{A}\right)} = \frac{b}{sin\left(\widehat{B}\right)} = \frac{c}{sin\left(\widehat{C}\right)}$$

L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

$AB = 7,5\ km$

$EF = ?$

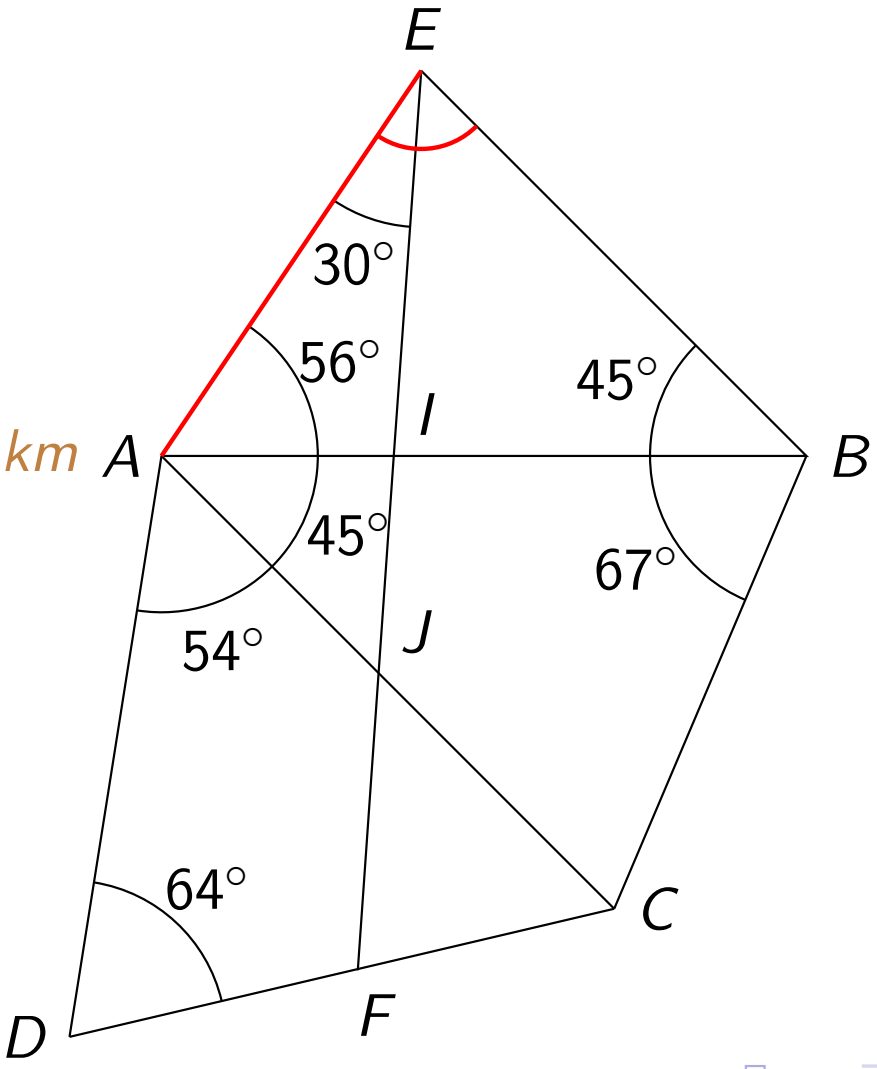


L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

$AB = 7,5\ km$

$EF = ?$

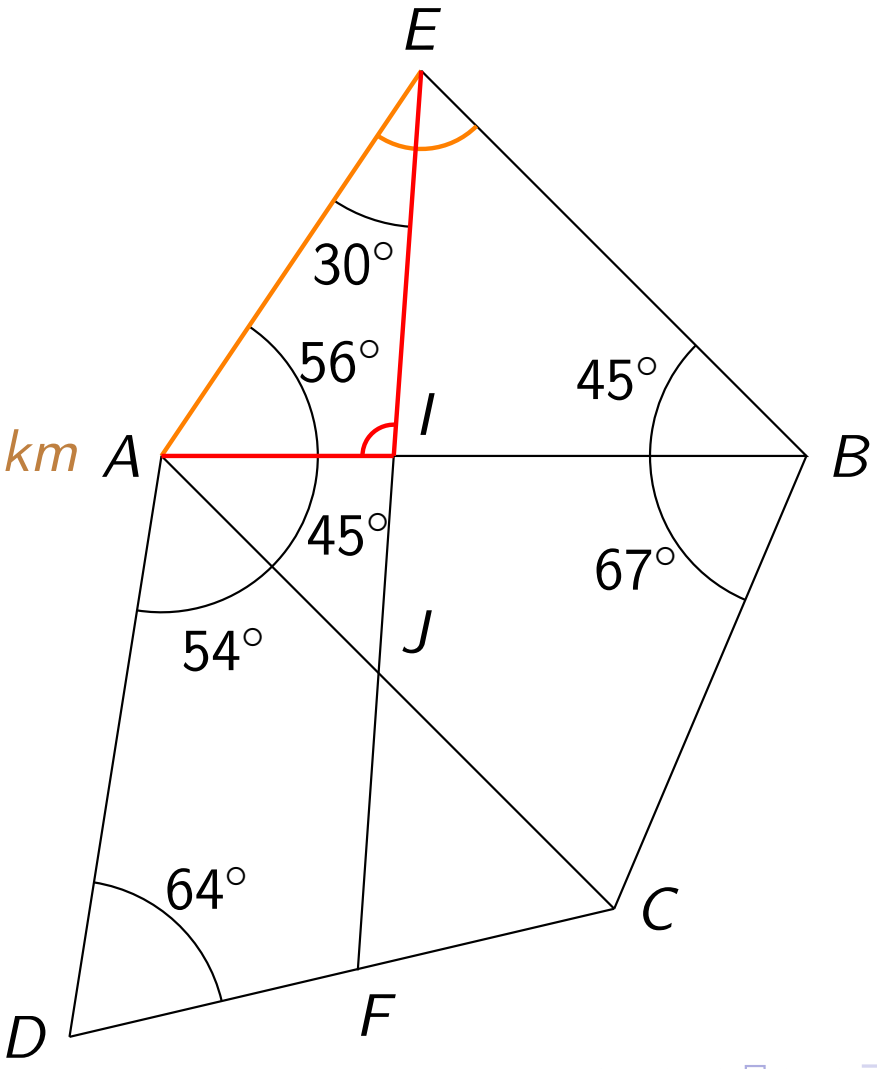


L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

$AB = 7,5\ km$

$EF = ?$

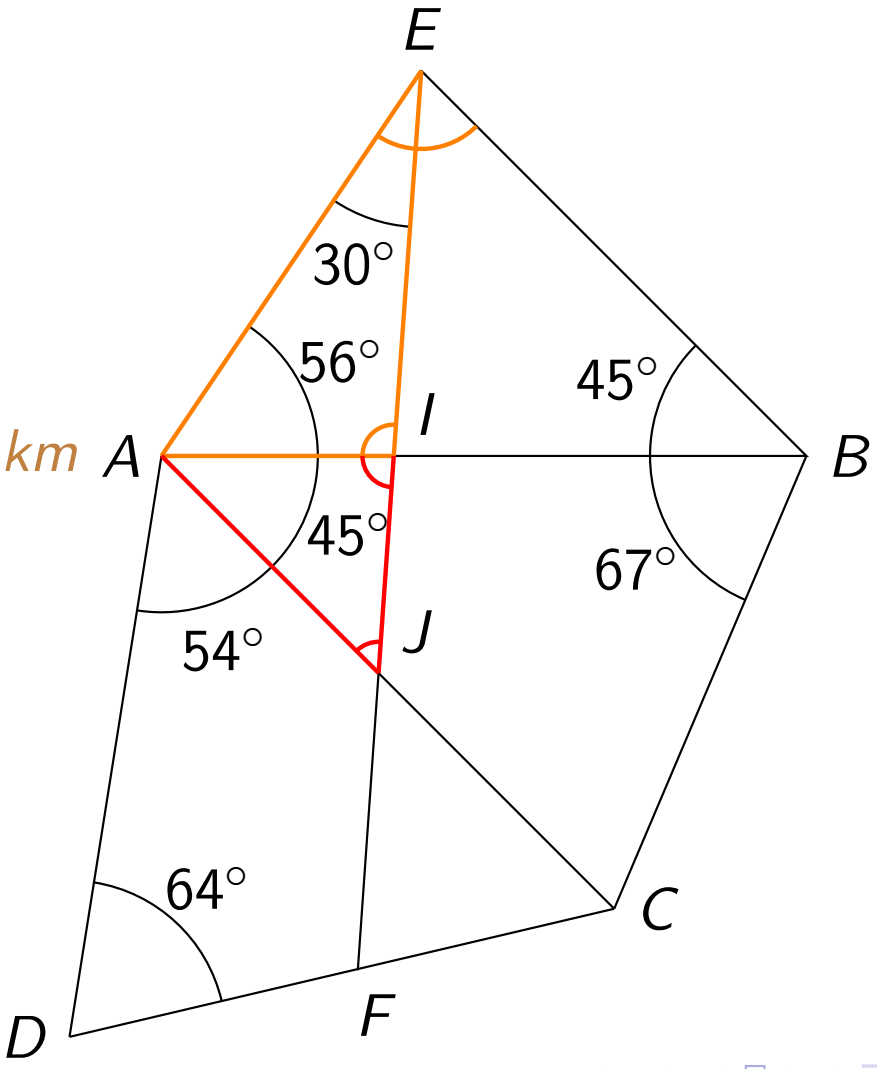


L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

$AB = 7,5\ km$

$EF = ?$

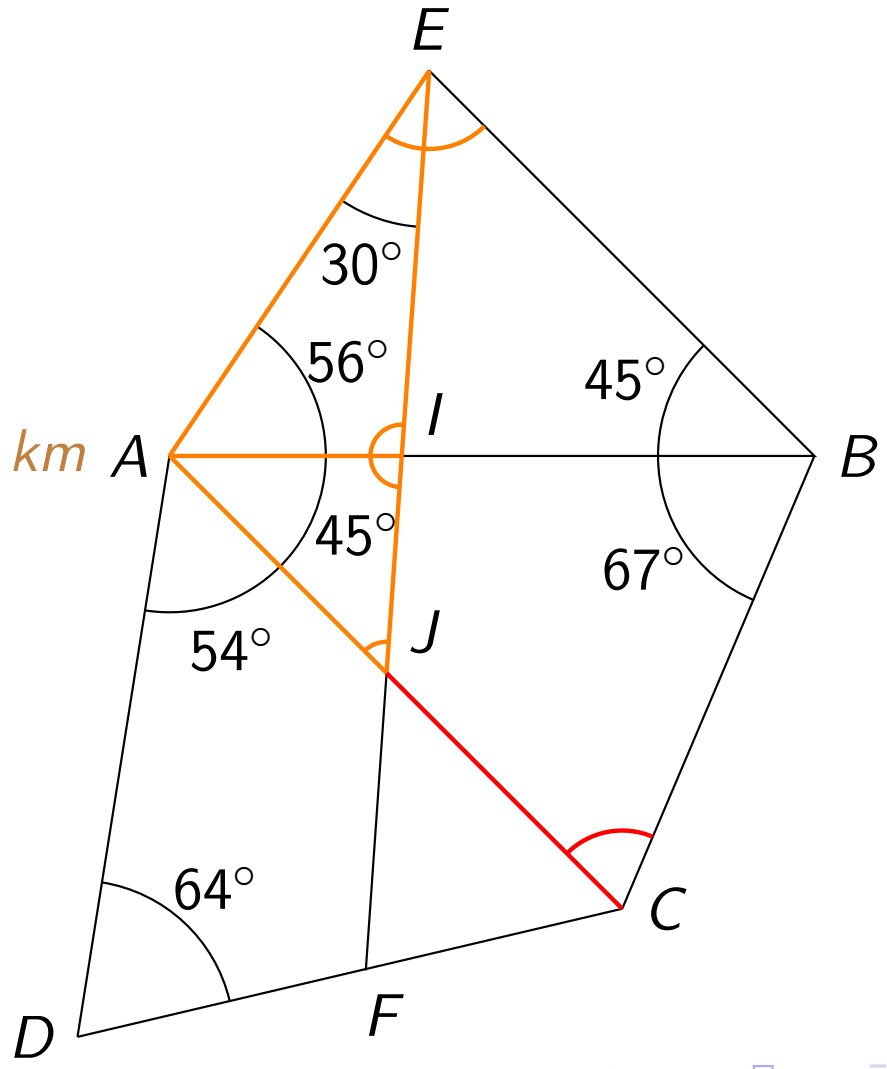


L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

$AB = 7,5\ km$

$EF = ?$

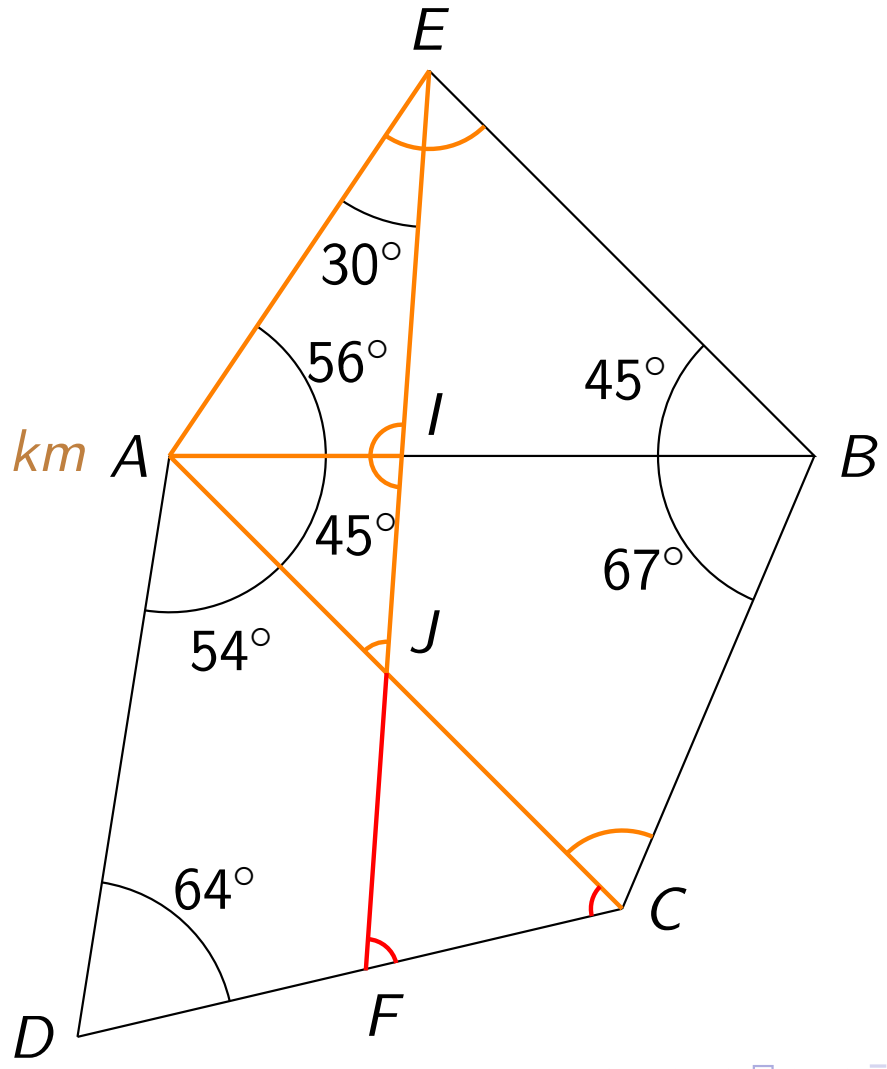


L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

$AB = 7,5\ km$

$EF = ?$

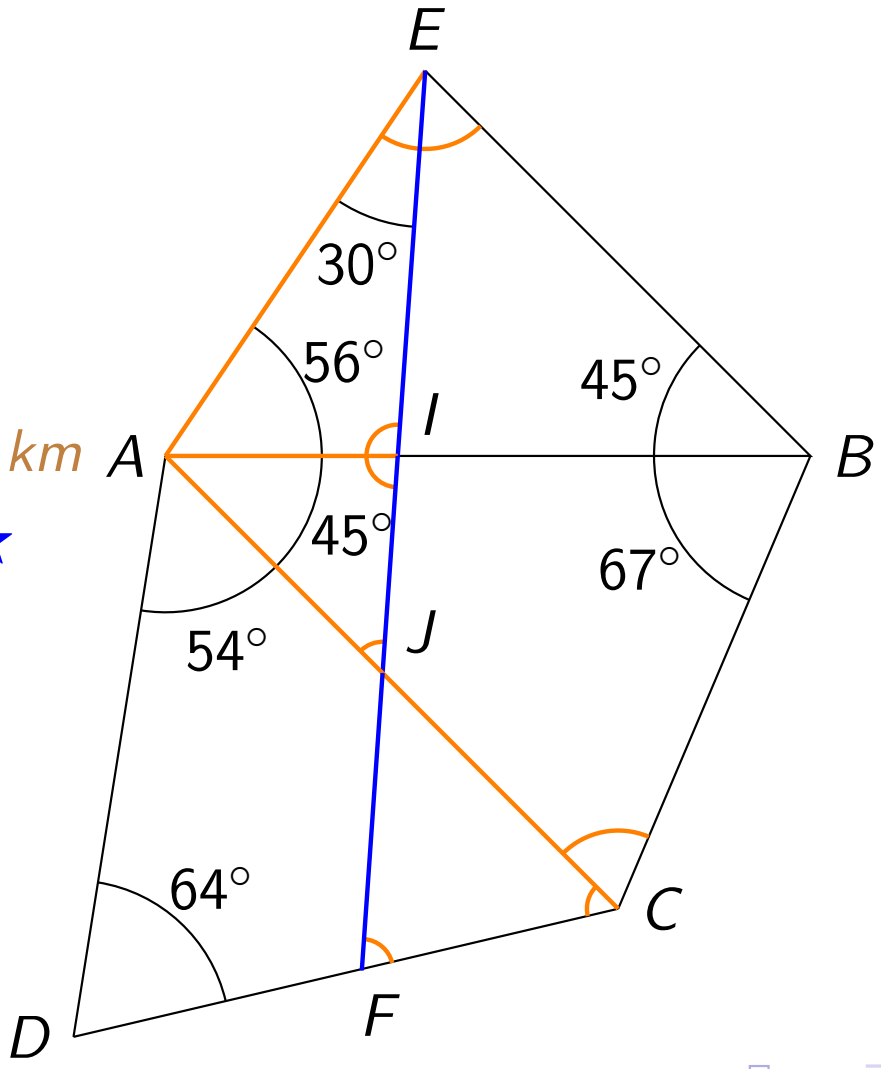


L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - La triangulation

$AB = 7,5\ km$

$EF = \bigstar$



L'enseignement scientifique

La Terre, un astre singulier - Bilan

- Les mathématiques pour comprendre le monde.
- Le rôle du professeur de mathématiques ?

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ?

- les professeur·e·s de SVT et de sciences physiques utilisent ces notions et en connaissent les propriétés.

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ?

- les professeur·e·s de SVT et de sciences physiques utilisent ces notions et en connaissent les propriétés.
- Nous connaissons les mathématiques et la didactique de cette matière.

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ?

- les professeur·e·s de SVT et de sciences physiques utilisent ces notions et en connaissent les propriétés.
- Nous connaissons les mathématiques et la didactique de cette matière.
- Nous avons notre rôle à jouer dans cet enseignement.
  - Les activités rapides pour introduire et consolider des notions.
  - Travailler le passage du continu au discret pour introduire la fonction exponentielle et la fonction logarithme.
  - Introduire une perspective historique pour mieux comprendre la construction de ces notions.

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Exemples d'activités rapides :

Compléter la suite logique :

n	0	2	7	9	11
$f(n)$	0	6	21		

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Exemples d'activités rapides :

Compléter la suite logique :

n	0	2	7	9	11
$f(n)$	0	6	21	27	33

Nous avons une fonction linéaire

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Exemples d'activités rapides :

Compléter la suite logique :

x	1	2	3	4	7
y	2,5	6,25	15,625	39,0625	

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Exemples d'activités rapides :

Compléter la suite logique :

n	1	2	3	4	7
$f(n)$	2,5	6,25	15,625	39,0625	610,3516

On a : $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Exemples d'activités rapides :

Compléter la suite logique :

x	3	6	18	108	1944	11664
y	1	2	3	5		

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Exemples d'activités rapides :

Compléter la suite logique :

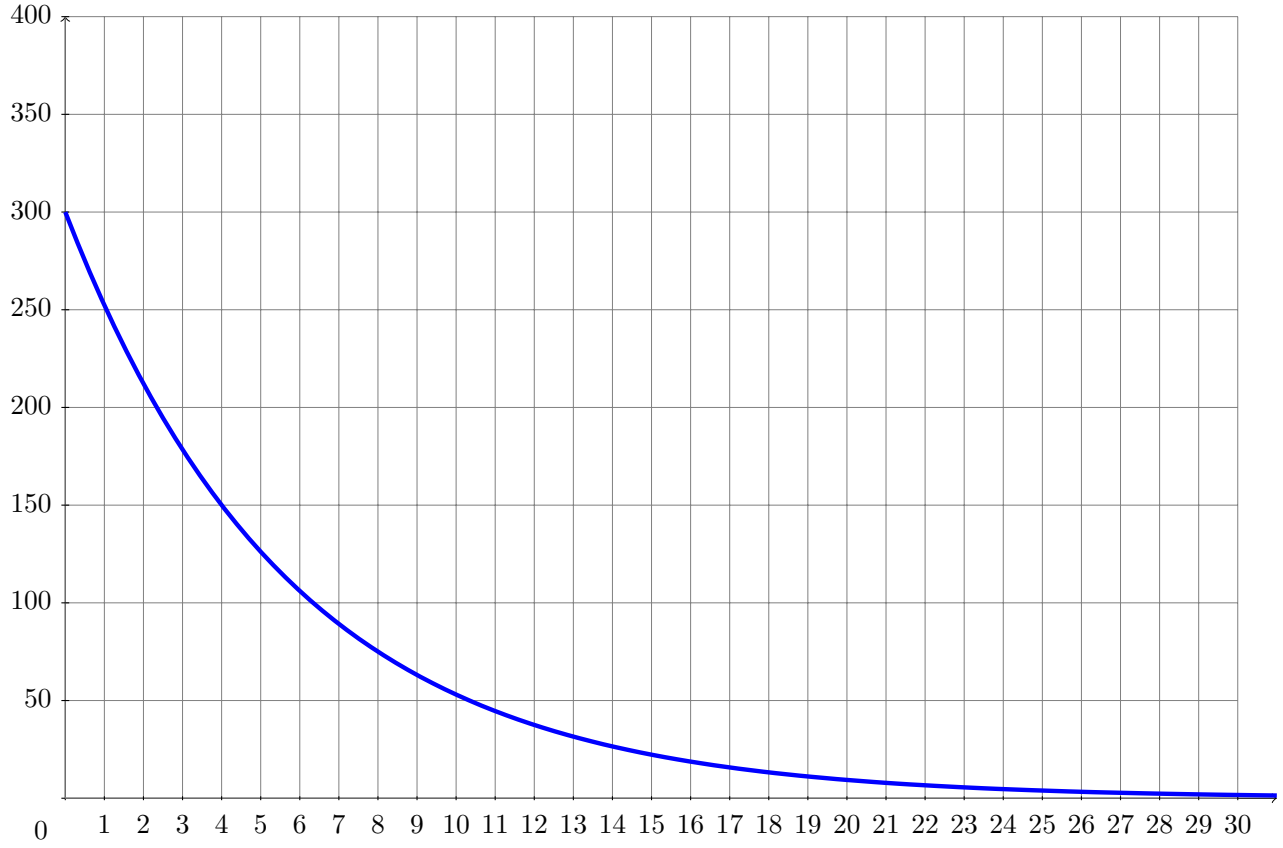
n	3	6	18	108	1944	11664
$f(n)$	1	2	3	5	8	10

On a : $f(a \times b) = f(a) + f(b)$

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Exemples d'activités rapides :

À partir de la lecture graphique de la demi-vie, au bout de combien de temps la valeur initiale sera divisée par 16 ?



Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

John Neper (1550 - 1617)

Source : Wikipédia

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

"Les logarithmes sont les nombres qui à des nombres proportionnels ont des différences égales". C'est Neper qui donne le nom logarithme qui signifie (en grec) nombre de raison (logos : raison, sous-entendu raison de progression géométrique, et arithmos : nombre, quantité).

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

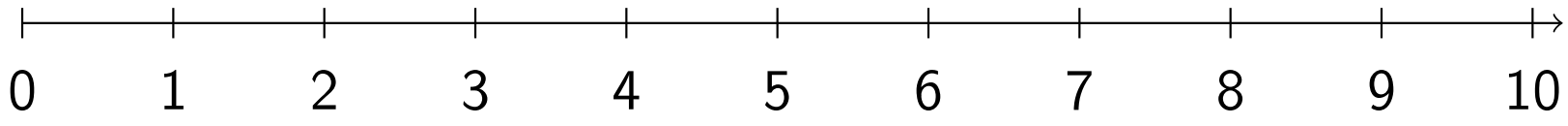
Voici l'idée de John Neper :

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Voici l'idée de John Neper :

Axe additif

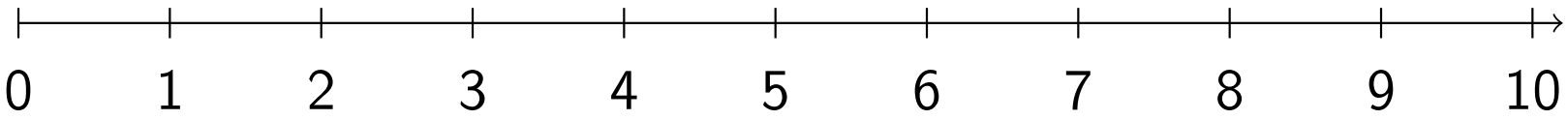


Linéarité, exponentielle, logarithme

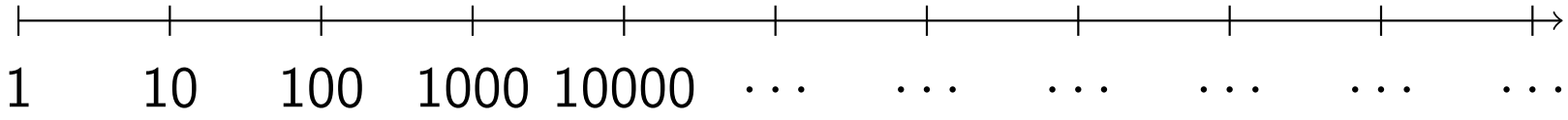
Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Voici l'idée de John Neper :

Axe additif



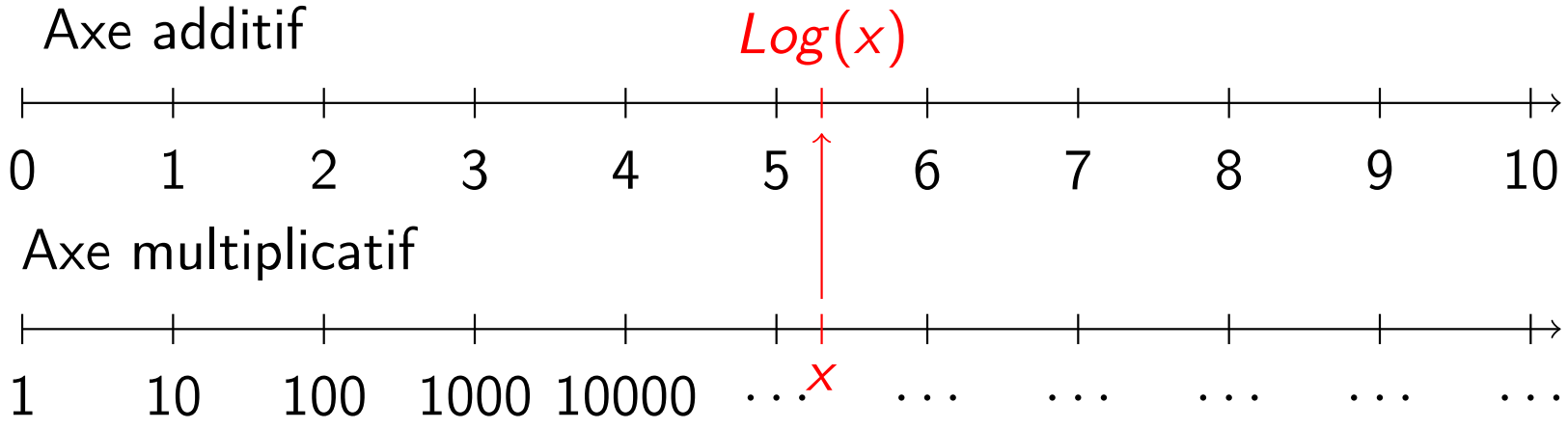
Axe multiplicatif



Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

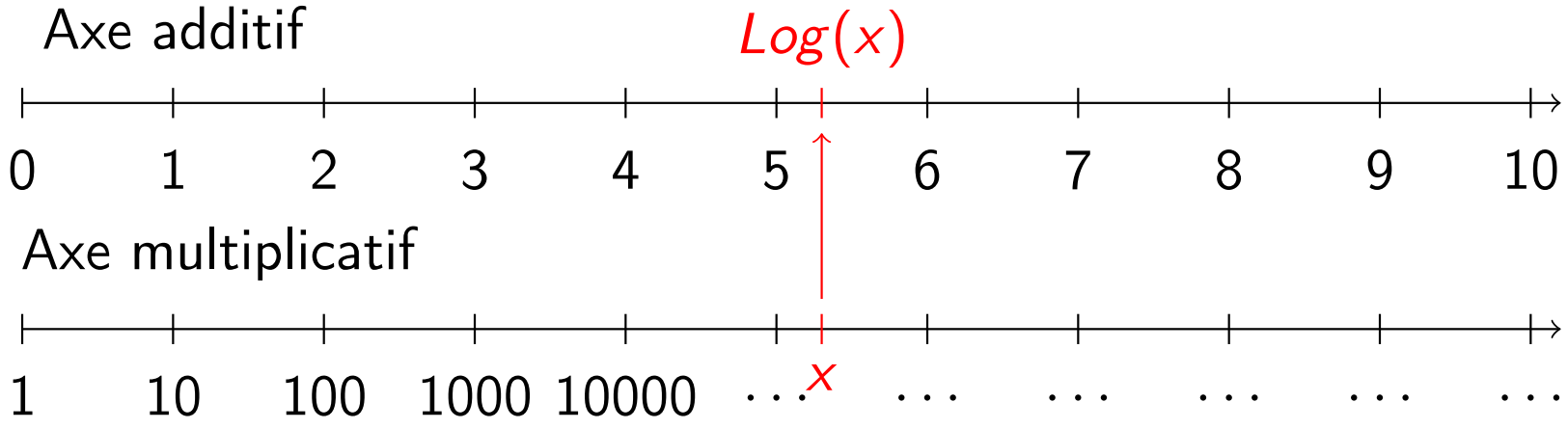
Voici l'idée de John Neper :



Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Voici l'idée de John Neper :

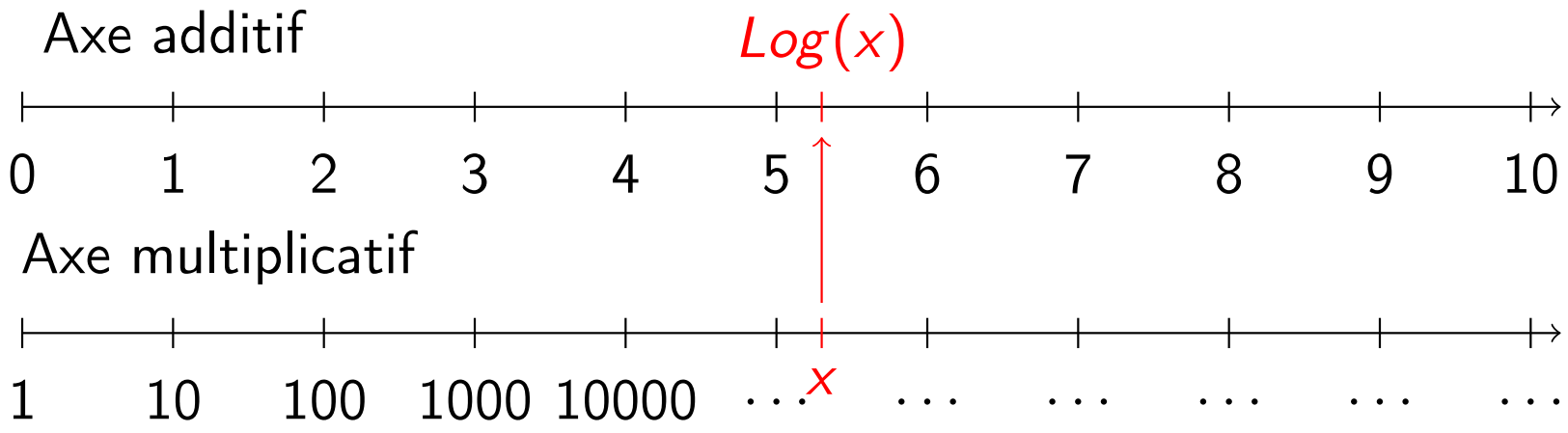


$Log(10) = 1$ et $Log(100) = 2$

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Voici l'idée de John Neper :

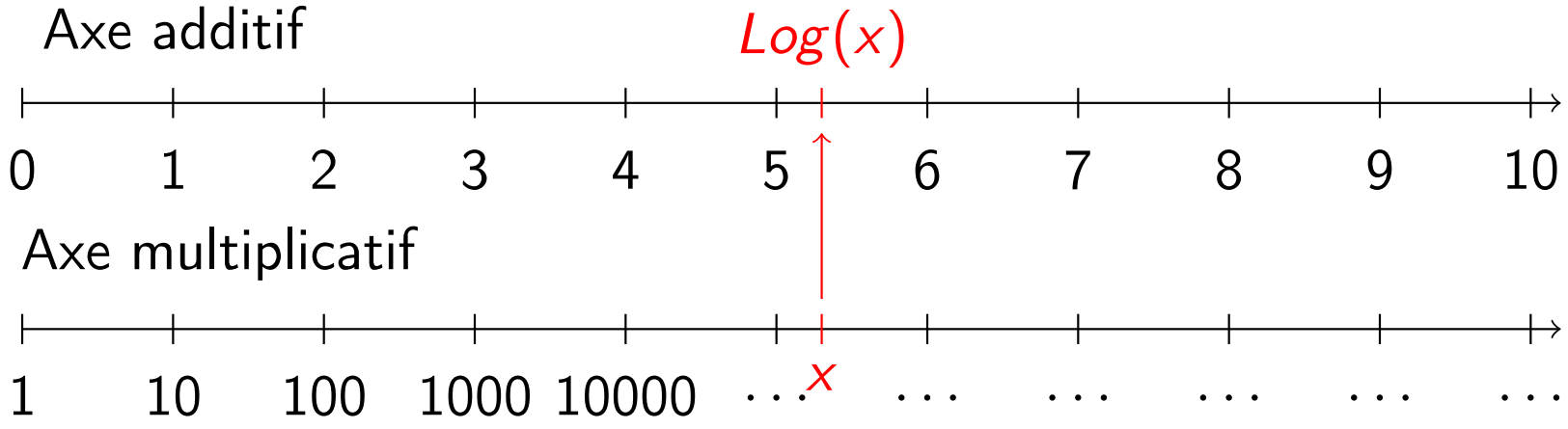


$Log(10) = 1$ et $Log(100) = 2$
Or $1 + 2 = 3$ et $Log(1000) = 3$

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Voici l'idée de John Neper :



$Log(10) = 1$ et $Log(100) = 2$
Or $1 + 2 = 3$ et $Log(1000) = 3$
On a bien : $Log(10 \times 100) = Log(10) + Log(100)$

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Plus généralement : Pour tous nombres a et b positifs, on a :

$$Log(a \times b) = Log(a) + Log(b)$$

Remarque : Le Log est la notation du logarithme à base 10 (la raison de notre suite), mais nous verrons qu'il existe des logarithmes dans d'autres bases.
Ainsi en créant des tables de Logarithmes, John Neper pouvait remplacer les multiplications par des additions.
En effet, pour calculer $a \times b$, je lis dans les tables de logarithmes $Log(a)$ et $Log(b)$. J'additionne $Log(a)$ et $Log(b)$, et dans la table je cherche le nombre dont le Log vaut cette somme.

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Par exemple, à l'aide de la table de logarithmes ci-contre, on peut voir qu'une personne ne sachant pas calculer 2×3 mais sachant calculer une somme, peut quand même connaître ce produit.

En effet, dans la table on lit :

$Log(2) = 0,3010299957$

$Log(3) = 0,4771212547$

Or 0,3010299957+0,4771212547=0,77815125

Et dans la table on lit :

$Log(6) = 0,7781512504$

Donc $2 \times 3 = 6$

Nu.	Logarithmi
1	0,00000.00000
2	0,30102.99957
3	0,47712.12547
4	0,60205.99913
5	0,69897.00043
6	0,77815.12504
7	0,84509.80400
8	0,90308.99870
9	0,95424.25094
10	1,00000.00000
100	2,00000.00000
1 000	3,00000.00000

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

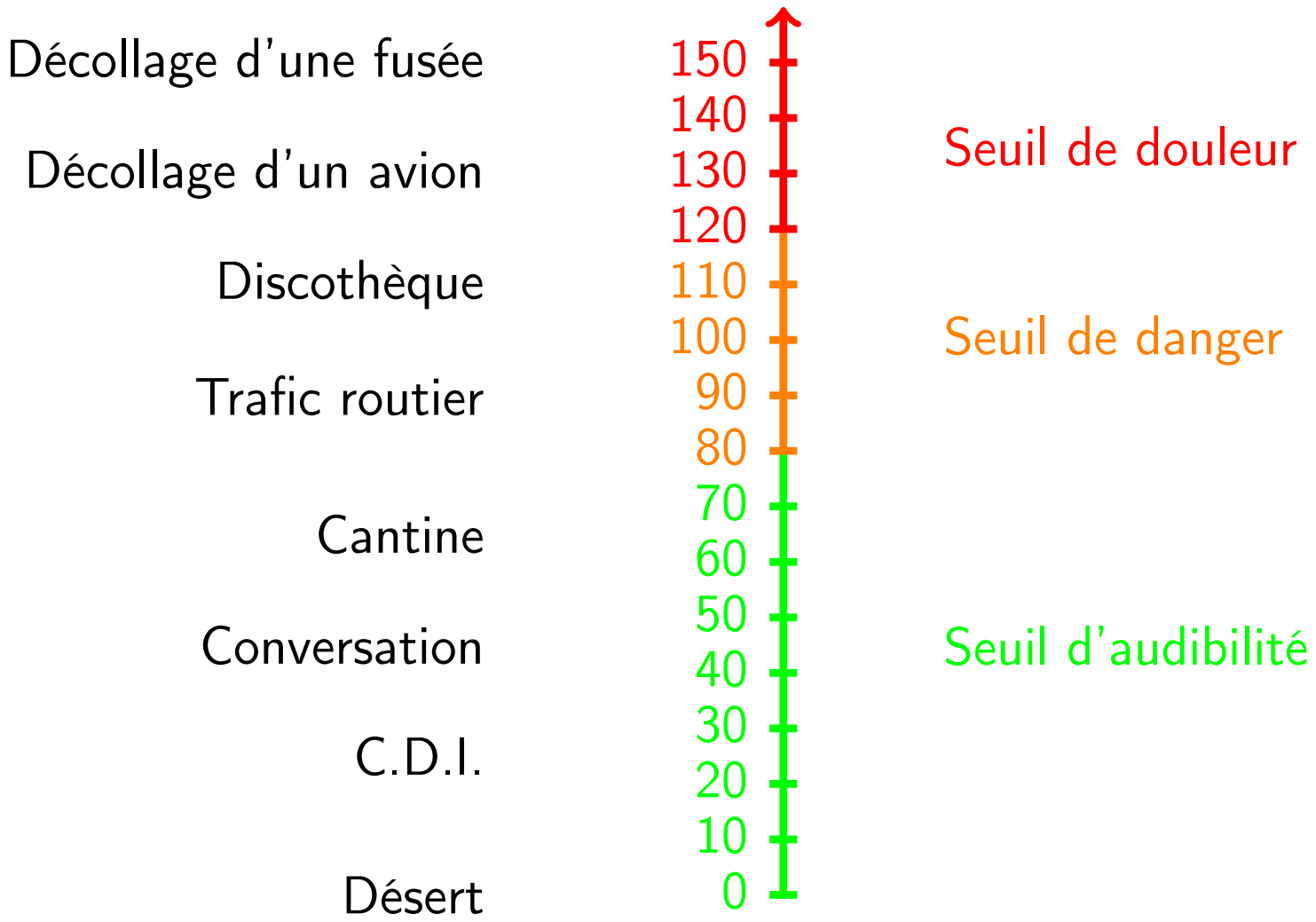
À l'aide des extraits suivants, déterminer le produit de 114 par 786, en calculant une somme.

114	2,05690.48513
786	2,89542.25460

89601	4,95231.28567
89602	4,95231.77036
89603	4,95232.25505
89604	4,95232.73974
89605	4,95233.22442

Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :



Linéarité, exponentielle, logarithme

Le rôle du professeur de mathématiques ? - Introduction de la fonction Log :

Conclusion

Le·la professeur·e de mathématiques a un rôle à jouer dans cet enseignement.

D'autres exemples

1ère

en 1ère

- La musique ou l'art de faire entendre les nombres :

Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave. Dans l'Antiquité, la construction des gammes était basée sur des fractions simples, (2/1, 3/2, 4/3, etc.). En effet, des sons dont les fréquences sont dans ces rapports simples étaient alors considérés comme les seuls à être consonants. Une quinte est un intervalle entre deux fréquences de rapport 3/2. Les gammes dites de Pythagore sont basées sur le cycle des quintes. Pour des raisons mathématiques, ce cycle des quintes ne « reboucle » jamais sur la note de départ. Cependant, les cycles de 5, 7 ou 12 quintes « rebouclent » presque. Pour les gammes associées, l'identification de la dernière note avec la première impose que l'une des quintes du cycle ne corresponde pas exactement à la fréquence 3/2.	Calculer des puissances et des quotients en lien avec le cycle des quintes. Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.
Les intervalles entre deux notes consécutives des gammes dites de Pythagore ne sont pas égaux, ce qui entrave la transposition. La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVIIe siècle, de construire des gammes à intervalles égaux.	Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.

D'autres exemples

T^{ale}

en T^{ale}

- Thème 3 : Une histoire du vivant
  3.1 La biodiversité et son évolution

Estimer une abondance par la méthode de capture, marquage, recapture, fondée sur le calcul d'une quatrième proportionnelle.
À l'aide d'un tableur, simuler des échantillons de même effectif pour visualiser la fluctuation d'échantillonnage.
En utilisant une formule donnée pour un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, estimer un paramètre inconnu dans une population de grande taille à partir des résultats observés sur un échantillon.

CMR

D'autres exemples

Tale

- Thème 3 : Une histoire du vivant

Au cours de l'évolution biologique, la composition génétique des populations d'une espèce change de génération en génération. Le modèle mathématique de Hardy-Weinberg utilise la théorie des probabilités pour décrire le phénomène aléatoire de transmission des allèles dans une population. En assimilant les probabilités à des fréquences pour des effectifs de grande taille (loi des grands nombres), le modèle prédit que la structure génétique d'une population de grand effectif est stable d'une génération à l'autre sous certaines conditions (absence de migration, de mutation et de sélection). Cette stabilité théorique est connue sous le nom d'équilibre de Hardy-Weinberg. Les écarts entre les fréquences observées sur une population naturelle et les résultats du modèle s'expliquent notamment par les effets de forces évolutives (mutation, sélection, dérive, etc.).	Pour la transmission de deux allèles dans le cadre du modèle de Hardy-Weinberg, établir les relations entre les probabilités des génotypes d'une génération et celles de la génération précédente. Produire une démonstration mathématique ou un calcul sur tableur ou un programme en Python pour prouver ou constater que les probabilités des génotypes sont constantes à partir de la seconde génération (modèle de Hardy-Weinberg). Utiliser des logiciels de simulation basés sur ce modèle mathématique. Analyser une situation d'évolution biologique expliquant un écart par rapport au modèle de Hardy-Weinberg.

D'autres exemples

Tale

3.4 Les modèles démographiques

Dans le cadre de l'étude de l'évolution des populations, il est important de prédire leur effectif futur mais aussi la manière dont vont évoluer les ressources qui leur sont nécessaires. Pour prédire l'évolution d'un système quelconque, les scientifiques utilisent des modèles mathématiques. La présentation de l'exemple historique de Malthus permet de mettre en œuvre cette démarche mathématique dans le cas discret (correspondant à une variation par paliers).

Savoirs	**Savoir-faire**
Un modèle mathématique simple est le modèle linéaire.	
Une grandeur discrète u varie de manière linéaire en fonction d'un palier entier n si sa variation absolue $u(n+1)$-$u(n)$ est constante. Dans ce cas, les points $(n, u(n))$ sont situés sur une droite. La suite de terme général $u(n)$ est arithmétique.	Exprimer $u(n)$ en fonction de $u(0)$ et n. Produire et interpréter des graphiques statistiques traduisant l'évolution d'effectif d'une population ou de ressources, notamment sous forme de nuages de points.
Dans la réalité, pour une population dont la variation absolue est presque constante d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points qui la représente par une droite (modèle linéaire).	À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, ajuster un nuage de points par une droite et utiliser ce modèle linéaire pour effectuer des prévisions.

D'autres exemples

Tale

Le modèle linéaire est inadapté pour représenter l'évolution d'une grandeur dont la variation absolue change fortement d'un palier à l'autre.	Exprimer *u(n)* en fonction de *u*(0) et de *n*.
Une grandeur discrète *u* varie de manière exponentielle en fonction du palier entier *n* si sa variation absolue *u(n+1) - u(n)* est proportionnelle à sa valeur courante *u(n)*. Dans ce cas, sa variation relative (ou taux de variation) est constante et la suite de terme général *u(n)* est géométrique.	À partir de données démographiques, calculer le taux de variation d'une population entre deux dates.
Dans la réalité, pour une population dont le taux de variation est presque constant d'un palier à l'autre, on peut ajuster le nuage de points par un modèle exponentiel.	Calculer l'effectif final d'une population à partir de son effectif initial, de son taux de natalité et de son taux de mortalité. Selon le modèle de Malthus, prédire l'effectif d'une population au bout de *n* années.
Le modèle démographique de Malthus est un modèle exponentiel d'évolution de l'effectif de la population. Il prévoit que l'effectif de la population décroît vers 0 si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité et croît vers l'infini si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité.	À l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ou d'une représentation graphique, calculer le temps de doublement d'une population sous l'hypothèse de croissance exponentielle.
Si les prédictions du modèle de Malthus peuvent se révéler correctes sur un temps court, elles sont irréalistes sur un temps long, notamment en raison de l'insuffisance des ressources disponibles.	À partir de documents fournis, proposer un modèle de croissance de ressources alimentaires (par exemple la production mondiale de blé ou de riz) et la comparer à une croissance exponentielle.
Des modèles plus élaborés prévoient que la population mondiale atteindra environ 10 milliards d'humains en 2050.	Comparer les valeurs fournies par un modèle à des données réelles afin de tester sa validité.

D'autres exemples

Tale

3.5 L'intelligence artificielle

L'inférence bayésienne est une méthode de calcul de probabilités de causes à partir des probabilités de leurs effets. Elle est utilisée en apprentissage automatique pour modéliser des relations au sein de systèmes complexes, notamment en vue de prononcer un diagnostic (médical, industriel, détection de spam…). Cela permet de détecter une anomalie à partir d'un test imparfait.	À partir de données, par exemple issues d'un diagnostic médical fondé sur un test, produire un tableau de contingence afin de calculer des fréquences de faux positifs, faux négatifs, vrais positifs, vrais négatifs. En déduire le nombre de personnes malades suivant leur résultat au test.

Conclusion

Des mathématiques pour comprendre le monde...

Un des enjeux de l'enseignement scientifique.

Sources

- idée et texte pour Cléomède :

21ème colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques
Le Mans, 29 et 30 mai 2015
Les mathématiques et le réel : expériences, instruments, investigations.

Atelier de Cécile de HOSSON et Nicolas DECAMPS, Université Paris-Diderot :
Approcher l'astronomie mathématique en classe : un exemple d'usage d'éléments d'histoire des cosmologies chinoises et grecques.

- Images : *wikipédia*, photos personnelles, figures réalisées avec Tikz, Tables de Logarithmes Bouvart et Ratinet, Librairie Hachette, 1957.
- Lecture de texte : GUEDJ Denis. *La méridienne*. Robert Laffont. Paris : 1999
- Animation Geogebra de Vincent Pantaloni

The end

Pour me joindre : guillaume.francois@ac-nantes.fr

The end

«Les mathématiques ont un triple objectif. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout : Elles ont un but philosophique et, j'ose dire, un but esthétique.»

Henri Poincarré