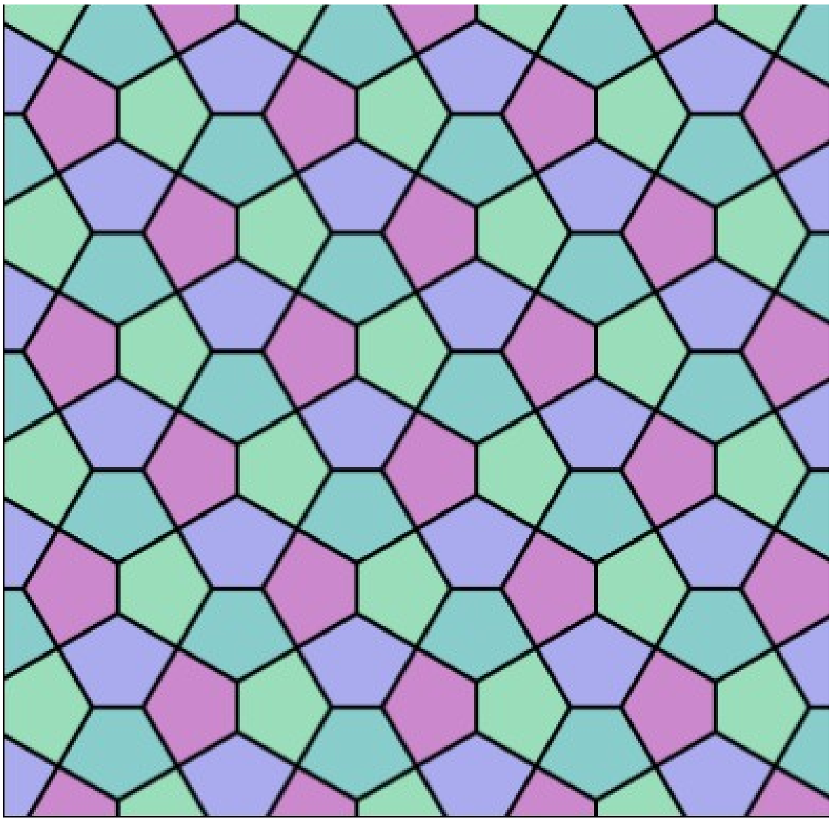
IREM – PAYS DE LOIRE

Des pavages aux transformations

séquence en cycle 4



Groupe Collège

Jacques CASTAGNE, Nicole DERSOIR, Sylvie GRAU, Christian JUDAS, Céline SAUVETRE

juillet 2021

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DES PAYS DE LA LOIRE

Adresse postale
2, rue de la Houssinière BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03

Direction
Magali HERSANT
Tel. : 02 51 12 59 09
E-Mail : magali.hersant@univ-nantes.fr

Technicien PAO
Serge CORMIER
Tel. 02 51 12 59 41
E-Mail : serge.cormier@univ-nantes.fr

Site web :
https://Irem.univ-nantes.fr/

Les objectifs du groupe

Le groupe collège s'est lancé dans un travail autour de l'enseignement-apprentissage des transformations du plan suite au retour de cette thématique dans les programmes du collège en 2016. Dans le cadre des programmes du lycée de 1991 il était souligné l'importance de « l'étude des configurations et de l'action des transformations sur les figures », dans celui de 2000 il était précisé que « les transformations seront utilisées pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction ». Depuis les programmes de 2008, les transformations du plan étudiées au collège sont les symétries axiales et centrales dans le but de faire apparaître des propriétés pouvant être utilisées dans la caractérisation des figures planes. En 2016, s'ajoutent de nouvelles transformations (translations, rotations, homothéties), « elles font l'objet d'une première approche, basée sur l'observation de leur effet sur des configurations planes, essentiellement à partir de manipulations concrètes (papier calque, papier pointé, quadrillage, etc.) ou virtuelles (logiciel de géométrie dynamique). L'objectif est d'installer des images mentales qui faciliteront ultérieurement l'analyse de figures géométriques ainsi que la définition ponctuelle des transformations étudiées »[1].

Le groupe s'est donné comme but de concevoir une progressivité de l'enseignement des transformations du plan permettant la problématisation des savoirs afin de les rendre plus disponibles, c'est-à-dire de permettre aux élèves d'en disposer dans leur répertoire personnel pour les utiliser dans des situations complexes ou des problèmes à distance de l'apprentissage des transformations du plan, en particulier des situations où les transformations du plan sont utiles à l'analyse de figures géométriques. Le groupe s'est limité dans cette brochure au cas des isométries et vous propose une séquence sur l'ensemble du cycle 4.

Certaines séances ont été expérimentées dans différentes classes et les productions des élèves ont permis de mesurer l'impact de nos choix sur les apprentissages des élèves, d'autres sont à mettre en œuvre et vos retours permettront de les améliorer. N'hésitez donc pas à nous faire part de vos expériences. Nous espérons que vous trouverez dans cette brochure quelques idées pour mettre en œuvre des activités que vous avez certainement déjà rencontrées. La nouveauté ici est dans la recherche de consignes et de mises en situations amenant les élèves à des problèmes explicatifs.

La brochure

La mise en page de cette brochure vous permet d'identifier :

- en *italique* ce qui motive ou explique les choix que nous avons faits ;
- en **gris** les consignes ou les explicitations nécessaires ;
- en **bleu** les pauses structurantes et en encadré ce qui peut être institutionnalisé.

Les participant·e·s du groupe collège de l'IREM des Pays de La Loire

Jacques CASTAGNE professeur de mathématiques au collège Jacques Brel de Guérande

Nicole DERSOIR professeure de mathématiques au collège Jean Moulin de Saint-Nazaire

Sylvie GRAU maître de conférences en didactique des mathématiques à l'INSPE de Nantes

Christian JUDAS professeur de mathématiques au collège Pierre Garcie Ferrande de Saint-Gilles-Croix-de-Vie

Céline SAUVÊTRE professeure de mathématiques au collège Jules Ferry de Montaigu

Et les élèves de leurs classes !

Le groupe tient à remercier Claude FEY professeur de mathématiques au collège René Bernier de Saint-Sébastien-sur-Loire pour ses expérimentations et ses précieux retours.

[1] https://cache.media.eduscol.education.fr/file/A-Scolarite_obligatoire/37/7/Programme2020_cycle_4_comparatif_1313377.pdf

Table des matières

Les pavages

Description du parcours

Niveau : Cycle 4

Compétences travaillées : (programme de 2020)

- Chercher : s'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre exemples.

- Modéliser : traduire en langage mathématique une situation réelle

- Raisonner : démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.

Attendus de fin de cycle :

- comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques (Thème C Grandeurs et mesures)
- utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer (Thème D – Espace et géométrie)

Lu dans les programmes :

« De nouvelles transformations (symétries centrales, translations, rotations, homothéties) font l'objet d'une première approche, basée sur **l'observation de leur effet sur des configurations planes**, **essentiellement à partir de manipulations concrètes** (papier calque, papier pointé, quadrillage, etc.) **ou virtuelles** (logiciel de géométrie dynamique). L'objectif est d'**installer des images mentales** qui faciliteront ultérieurement l'analyse de figures géométriques ainsi que la définition ponctuelle des transformations étudiées. »

« À l'issue d'activités rituelles de construction et de verbalisation des procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir **mémorisé des images mentales** et **automatisé les procédures de repérage et de constructions géométriques liées aux figures et aux transformations du programme**. » (BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p 135)

« Thème C – Grandeurs et mesures

Comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques

Connaissances :

- Effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les angles, les aires et les volumes.

Compétences associées :

- utiliser des transformations pour calculer des grandeurs géométriques ;
- faire le lien entre la proportionnalité et certaines transformations géométriques (triangles semblables, homothéties). » (BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p 136-137)

« Thème D – Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

- comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure ;
- mobiliser les connaissances des figures, des configurations et des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques ;
- mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations.

Les définitions ponctuelles d'une rotation, d'une translation, d'une homothétie ne figurent pas au programme. » (BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p 135)

Lu dans les documents d'accompagnement :

Ressource Eduscol 1 : Transformations usuelles (page 5)

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Geometrie_plane/31/2/RA16_C4_MATH_geo_plane_doc_maitre_574312.pdf

Analyse et construction d'une frise et d'un pavage :

Ressource Eduscol 2 :

http://cache.media.education.gouv.fr/file/Geometrie_plane/19/1/RA16_C4_MATH_geo_plane_inter_frise_569191.pdf

Ressource Eduscol 3 :

http://cache.media.education.gouv.fr/file/Geometrie_plane/19/4/RA16_C4_MATH_geo_plane_inter_pavage_569194.pdf

Les choix du groupe collège de l'IREM de Nantes :

Les transformations reviennent dans les programmes du collège en 2016 mais leur introduction diffère sensiblement de l'approche qui en était faite dans les programmes plus anciens. En effet, les transformations ne sont plus caractérisées par une définition ponctuelle.

La progressivité doit ainsi se faire suivant trois aspects :

- de l'observation à l'analyse ;
- de la géométrie perceptive à la géométrie des propriétés ;
- de la relation entre deux configurations à l'application du plan dans lui-même.

Par ailleurs nous partons de l'hypothèse qu'un savoir problématisé est plus disponible, c'est-à-dire que si le savoir est rencontré lors de la construction d'un problème, l'élève peut associer la connaissance nouvelle aux conditions qui la rendent efficace pour résoudre le problème. L'élève peut alors penser à utiliser un savoir seul et sans aide, du fait qu'il a été construit en parallèle des raisons de son émergence . Nous avons donc cherché des situations amenant les élèves à formaliser des nécessités afin de caractériser les transformations et de mettre ces nécessités en lien avec les savoirs déjà là (figures planes, mesures de grandeur, proportionnalité…).

Enfin nous proposons une pédagogie active mais qui ne doit pas devenir « activiste », c'est-à-dire que chaque activité doit être introduite explicitement en précisant le but, le résultat attendu et les moyens d'y parvenir et amener à une institutionnalisation qui décontextualise les savoirs mais aussi les recontextualise dans un cadre plus général en précisant la classe de problèmes qu'ils sont susceptibles de modéliser.

Notre progression va donc de l'observation de pavages à la démonstration. Elle peut s'étaler sur l'ensemble du cycle 4 et nous proposons de jouer sur certaines variables didactiques afin d'adapter les situations à l'avancée de l'apprentissage dans votre classe ou votre établissement. Dans cette brochure, nous nous limiterons à l'étude des isométries. L'esprit du travail pourrait être poursuivi pour aborder les homothétie toujours à partir de pavages en s'inspirant de l'œuvre de Escher et de ses pavages en géométrie hyperbolique.

De nombreuses situations sont reprises de travaux anciens, les références vous permettent d'y retourner pour plus de précisions.

Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves ?

Nos différentes lectures et la conférence de Daniel Perrin (Université d'Orsay) aux Journées Académiques de 2019 à Nantes nous ont permis de comprendre qu'aux difficultés usuelles liées au vocabulaire s'ajoutaient différents obstacles que les élèves devaient franchir :

- Les élèves ont **une représentation souvent intuitive des pavages** du fait de l'expérience sociale qu'ils en ont (carrelage, dallage, art…) et des exercices déjà rencontrés dans leur scolarité les amenant à considérer que seules les figures ayant des éléments de symétrie peuvent paver le plan.
- Les élèves ont du mal à **passer de l'empirique à l'abstraction** : difficulté à considérer le plan comme infini par exemple, difficulté à faire la différence entre ce qui se voit et ce qui se sait.
- **Deux points de vue** sont difficiles à mettre en relation :
  - le point de vue statique : analyse de figures et de configurations ;
  - le point de vue dynamique : déplacement dans le plan (ou dans l'espace pour ce qui est de la symétrie axiale) et lieu des points par ce déplacement (équivalent de la trace dans les logiciels de géométrie).
- **Différentes dimensions sont à considérer** : les élèves ont du mal à passer d'une représentation en 2D (figure plane) à une représentation 1D (ligne fermée) et à une représentation 0D (ensemble de points isolés les uns des autres).
- **Les caractéristiques d'une transformation ne sont pas toujours visibles** (axe, centre ou vecteur non tracé) et les élèves ne s'autorisent pas à les tracer pour mieux pouvoir les nommer.

Les situations rencontrées vont donc mettre l'élève face à des paradoxes soit parce que le résultat est contre-intuitif soit parce qu'il existe plusieurs réponses possibles. Ainsi habituellement, les figures choisies dans les activités existantes pour travailler les transformations n'ont aucune symétrie afin de ne repérer qu'une seule transformation possible. Nous choisissons au contraire de proposer des figures avec plusieurs axes de symétrie afin de contraindre l'élève à préciser celle qu'il choisit et qu'il soit amené à argumenter sur le fait que plusieurs transformations conviennent. En effet, s'il veut utiliser les transformations pour démontrer, le choix de la transformation relève de la modélisation, c'est-à-dire ici d'un certain point de vue pour analyser la figure et donc d'un choix possible.

Nous allons privilégier les situations qui obligent l'élève à changer de dimension, à avoir un point de vue dynamique, à formaliser, expliciter pour enrichir son vocabulaire et associer dire, agir et penser.

Enfin nous mettrons en place des situations de communication pour donner du sens à la formalisation des observations, des consignes, des propriétés… Nous essayerons le plus possible d'expliciter le résultat attendu et donc les critères de validation.

Dans la mise en œuvre, l'enseignant favorisera des travaux de groupe et pensera à faire des pauses réflexives permettant à l'élève d'expliciter ce qu'il a fait pour lui et/ou pour les autres.

Organisation de la séquence

La séquence peut être proposée sur différentes périodes. Certaines activités sont des activités complémentaires, d'autres sont des alternatives pour vous laisser le choix en fonction du temps et du matériel dont vous disposez et en fonction du niveau de votre classe.

Activités	**Objectif**	**Niveau**	**Compléments ou prolongements**
1	Observation et caractérisation de ce qu'est un pavage	5e	
2	Réalisation d'un pavage	5e	Utilisation de logiciels (exemple : Stamp it!)
3	Observation dynamique des pavages : comment passer d'une figure à une autre	5e - 4e	Pavage de Nery
4	Caractérisation des transformations	5e – 4e	Pavage des Chinois
5	Reconnaître la transformation d'un motif élémentaire	5e – 4e	Ressource Eduscol 2 Ressource Eduscol 3 Activité rapide
6	Tracer le transformé d'une figure pour réaliser une frise	5e – 3e	Ressource Papier crayon
7	Reconnaître la transformation d'un motif élémentaire	5e – 3e	Activité rapide
8	Utiliser les transformations pour décrire une configuration	4e – 3e	Jeu transforming
9	Utiliser les transformations pour démontrer	4e – 3e	Problème de mesure

Activité 1

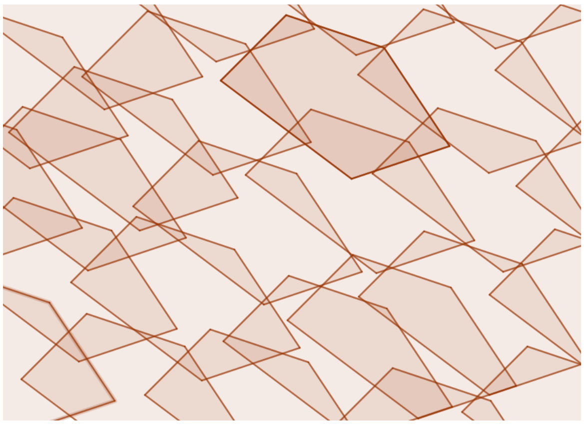
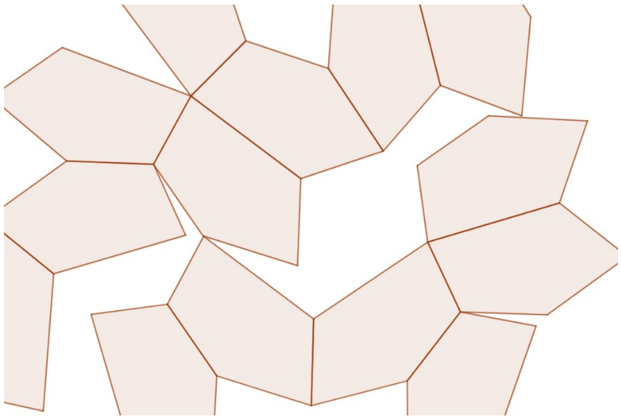
Objectif : partir de la représentation naïve du pavage pour en avoir une représentation géométrique **But :** Savoir ce qu'est un pavage **Résultat attendu :** construction d'un motif identique par chaque membre d'un groupe **Moyen d'y arriver :** observer une figure et choisir les éléments nécessaires pour pouvoir la reproduire, prévoir un programme de construction, faire le tracé avec soin en vérifiant chaque étape de son programme.

Étape 1 : poser la définition de « pavages »

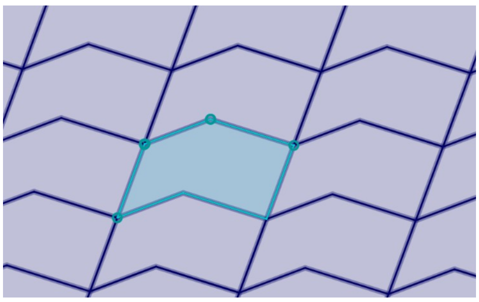
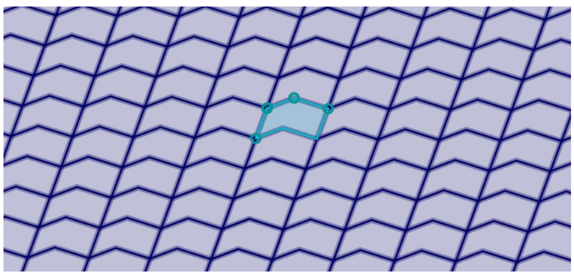
A partir de documents proposés présentant des exemples de pavages[2] (Jardins de l'Alhambra, Œuvres de Escher etc.).

Consigne : demander aux élèves ce qui est commun

Il s'agit de repérer les caractéristiques communes aux différents exemples pour se mettre d'accord sur une définition du pavage. On présentera un exemple de non-pavage avec chevauchement et un autre avec des espaces entre les figures pour bien spécifier les deux caractéristiques.

	
Recouvrement mais chevauchement	Non chevauchement mais pas de recouvrement

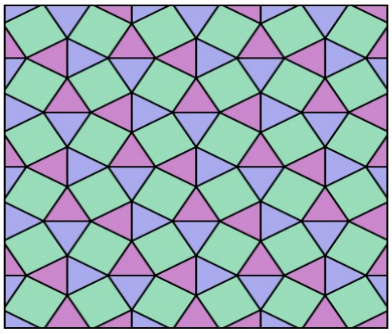
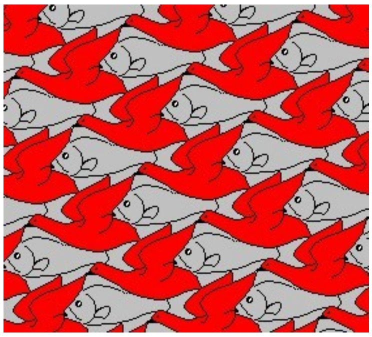
On pourra jouer sur des effets de zoom pour montrer que le pavage peut s'étendre à l'infini.

[2] Des exemples et de nombreux liens vers d'autres sites sur le site Chronomath.com de Serge Mehl : http://serge.mehl.free.fr/anx/pavages_plans.html

Pause structurante : pouvez-vous expliquer ce qu'est un pavage ?

Mathématiquement, un pavage est un recouvrement complet du plan sans trou ni superposition par répétition d'un motif.

Étape 2 : Reproduire un motif

Travail de groupes : Les élèves sont par groupes de trois ou quatre.

Représentations intuitives

L'objectif est de partir des impressions des élèves en projetant des figures, celles présentées dans le tableau ci-dessous (voir les figures en vraie grandeur pour impression en annexe 1).

Consigne : lever un stylo vert si vous pensez qu'il est possible de réaliser un pavage avec la figure ou un stylo rouge si vous pensez que c'est impossible.

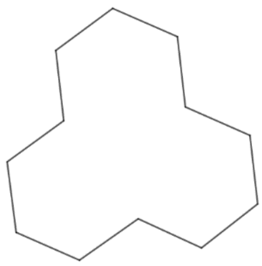
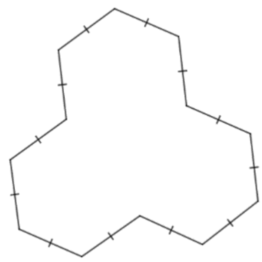
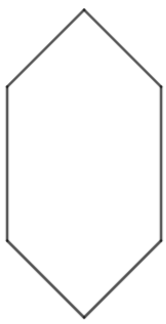
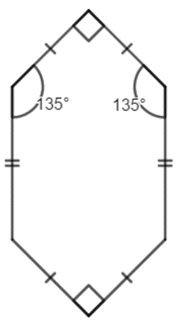
- Noter pour chaque figure la tendance générale : y a-t-il accord ou non ? Relever les arguments. On peut faire l'hypothèse que les élèves vont partir des éléments de symétrie des figures pour répondre, utiliser leur représentation mentale du pavage réalisé, imaginer l'organisation des pièces.
- Demander « **comment peut-on en être certain** ? » Les élèves vont sans doute proposer d'essayer de réaliser les pavages, il faut donc soit faire des tracés, soit utiliser un gabarit, soit utiliser différentes figures pour faire une sorte de « puzzle ». On travaille la question de la preuve avec une première étape qui est une approche expérimentale.

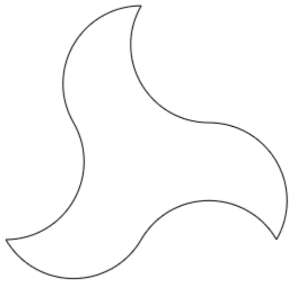
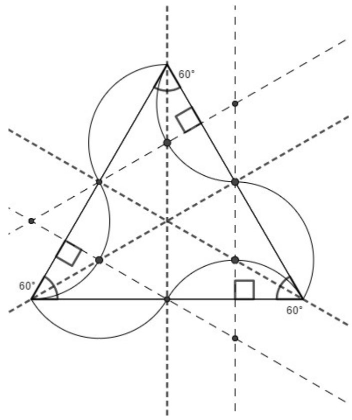
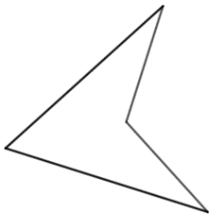
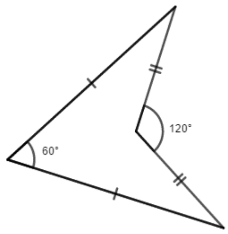
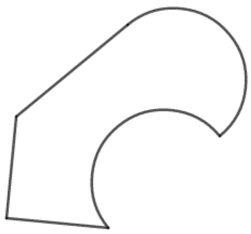
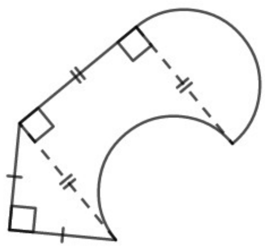
Dans tous les cas, on proposera de reproduire la figure. Il s'agit de travailler la déconstruction instrumentale, c'est-à-dire l'identification des éléments de la figure par l'usage d'instruments pour la reproduire.

Figures proposées :

On choisit différentes figures en jouant sur les variables didactiques : éléments de symétrie de la figure, invariants, décomposition en sous-figures, nécessité de sur-figures pour le tracé et transformations nécessaires pour le pavage.

motif	description	invariants	Type de transformations pour paver
1	assemblage de 3 hexagones réguliers	3 axes de symétrie, par rotation autour du centre de la figure	rotation 120°, translation, symétrie axiale
2	assemblage d'un carré et de deux triangles isocèles rectangles	2 axes de symétrie, symétrie centrale	translation, symétrie axiale, rotation de 45°
3	Figure non polygonale « pajarita »	centre de symétrie	rotation, symétrie centrale
4	Cerf-volant avec un angle en A diviseur de 360° pour permettre un positionnement en rosace	un axe de symétrie	Symétries centrales
5	Assemblage d'un triangle isocèle rectangle (pour que la figure soit pavante), demi-disque et carré amputé du même demi-disque	Aucun axe ou centre de symétrie	Composée de transformations

Motif 1		
Motif 2		

Motif 3		
Motif 4		
Motif 5		

Toutes les figures choisies sont pavantes malgré des différences de propriétés (éléments de symétrie ou non). L'objectif n'est pas de travailler le pavage en tant que tel mais bien les transformations permettant de construire le pavage. On peut proposer des figures non pavantes mais nous ne pouvons pas à ce stade apporter une preuve autre que perceptive du fait qu'elles ne le sont pas.

Pause structurante : A votre avis, à quelles conditions une figure peut-elle paver le plan ?

On peut s'attendre à des remarques concernant les polygones, les « creux » et les « pleins », les angles à un même sommet…

Toutes les propositions seront notées pour être réinterrogées plus tard.

Étape d'observation : une des figures correspondant aux motifs 1 à 5 ci-dessus est donnée à chaque groupe

Consigne : Cherchez les informations utiles pour reproduire la figure (prise d'information directe ou à demander à l'enseignant si la figure est projetée).

L'objectif est que les élèves observent et analysent les figures et en déduisent leurs propriétés. Il s'agit de développer la déconstruction dimensionnelle (voir la figure comme une surface 2D, comme des segments ou portion de courbes 1D ou comme des points reliés entre eux 0D) et de développer le repérage de sur ou sous-figures. Il est possible de jouer sur certaines **variables didactiques** pour adapter au niveau de classe ou différencier les supports dans les groupes pour amener des discussions : figures pleines sur papier uni ; figures transparentes sur quadrillage ; figures projetées ; figures codées ou non, avec les sous ou sur figures ou non.

Étape de construction :

Consigne : Reproduire la figure (au moins une figure par membre du groupe), repérer chaque face en hachurant chacune des faces d'une couleur différente (choisir les mêmes couleurs dans le groupe) et découper la figure.

Les deux couleurs ont pour but de rendre visibles les symétries axiales.

Aides pour le pavage : prévoir des feuilles bi-couleur pour éviter le coloriage ou coller deux feuilles de couleurs différentes l'une sur l'autre ; prévoir des figures déjà prêtes à découper pour les élèves les plus lents ou pour compléter le jeu de figures.

Aide pour la construction : donner les figures codées, utiliser des couleurs différentes pour les éléments de construction, donner un programme de construction, donner une figure amorce, utiliser le logiciel Geobebra avec une amorce de figure.

Pour les élèves dyspraxiques leur proposer d'enregistrer les consignes de tracé ou de dire oralement à un camarade le programme de construction pas à pas.

Pause structurante : Quelles informations ont été nécessaires pour faire votre tracé ?

On liste ce qu'il s'agit de regarder, de mesurer, on met en évidence les propriétés et on insiste sur le vocabulaire pour désigner les objets en explicitant bien les deux étapes : observer, construire et les allers-retours pour contrôler.

Pour reproduire une figure, je dois bien regarder pour repérer les différentes formes que je reconnais (carrés, triangles, rectangles, droites, cercles) et leur position les unes par rapport aux autres (dedans, dessus, à côté…).

Je repère ce qui est commun et ce qui est différent entre les différents côtés, les différentes formes (position, dimension,...).

Je peux repérer des droites qui se coupent.

Je peux repérer des alignements.

Je peux prolonger des droites dans ma tête.

Je peux nommer les points.

Je peux avoir besoin de mesures pour reproduire la figure à l'échelle.

Je peux me raconter une histoire pour me souvenir de l'ordre dans lequel je vais tracer la figure.

Je peux imaginer des histoires pour me souvenir des formes (une maison, un chapeau…).

Activité 2

Objectif : Permettre la construction d'une représentation mentale des transformations par le geste

But : Savoir comment se construit un pavage à partir d'un motif

Résultat attendu : Faire des pavages avec différents motifs de base

Moyen d'y arriver : déplacer les gabarits, essayer plusieurs déplacements ; positionner le gabarit pour que les figures soient bien ajustées, faire des tracés soignés, anticiper plusieurs étapes pour ne pas devoir effacer.

Étape 1 : le pavage

Chaque groupe met en commun les figures pour les assembler sur une feuille blanche.

Consigne : chaque groupe a une feuille (format A4 pour pouvoir projeter le résultat ou A3 pour affichage), essayez d'assembler puis de coller les figures pour réaliser un pavage. Le pavage sera réussi si :

- il n'y a pas de « trou » entre les figures

- les figures ne se chevauchent pas

- on peut imaginer que le pavage peut se continuer avec une infinité de figures

Aides : assembler avant de coller

Les élèves n'utilisent pas les transformations ici puisqu'ils collent des figures, d'où la nécessité d'une séance suivante pour verbaliser les mouvements en partant d'un unique gabarit pour faire le tracé. À ce stade on n'introduira pas les transformations.

La précision du tracé, du découpage et du collage peuvent entraîner des « trous » ou des « chevauchements », il sera intéressant de discuter sur ce qui peut nous amener à considérer que le pavage est « théoriquement » réussi même si la réalisation montre des imperfections. Ce sera l'occasion de passer de l'objet perceptif à l'objet idéal.

Étape 2 : la validation

Consigne : Chaque groupe récupère le travail d'un autre groupe et un jeu supplémentaire de figures. Vous devez valider le travail du groupe à partir de la grille :

Critères	**Oui**	**Non**
- il n'y a pas de « trou » entre les figures		
- les figures ne se chevauchent pas		
- on peut continuer le pavage avec les figures supplémentaires		

Pause structurante : A quoi avez-vous dû faire attention pour réussir votre pavage ?

On recueille les réponses. On pourra projeter les pavages réalisés pour que toute la classe découvre les différents pavages.

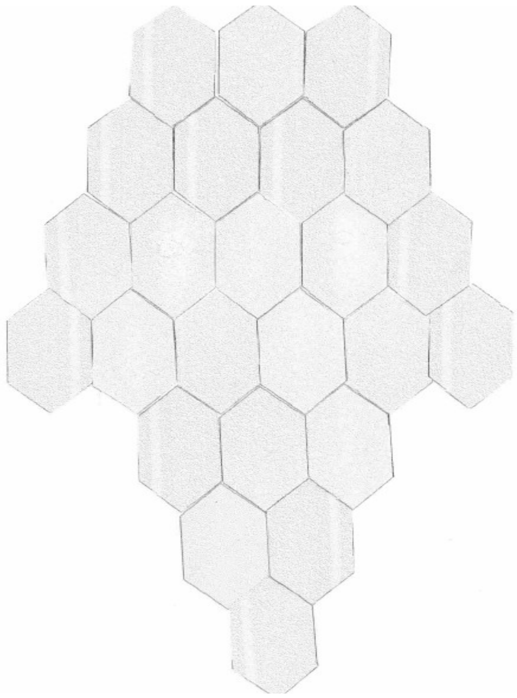
Pour réussir mon pavage il faut :

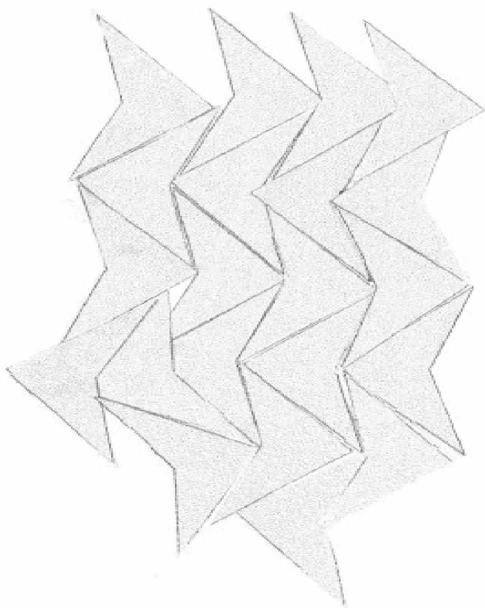
- avoir un tracé et un découpage précis

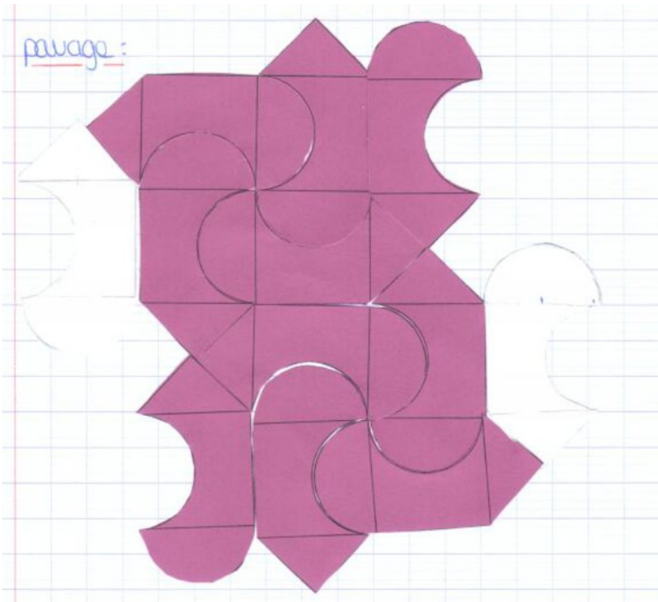
- anticiper les positions possibles des figures pour paver

- coller au fur et à mesure et s’assurer que l’on a ni « trou » ni chevauchement avant de continuer

Exemples de productions d’élèves en classe de 5^{e} :







Activité 3

Objectif : Formuler les transformations utilisées pour effectuer un pavage

But : savoir analyser une transformation pour écrire un programme de construction

Résultat attendu : un texte court et/ou des petits schémas permettant de refaire le même pavage que le modèle

Moyen d'y arriver : bien repérer les différentes étapes, l'orientation des figures, les déplacements dans le plan ou dans l'espace, les points qui ne bougent pas, les points homologues, on peut tracer les marques si besoin.

Étape 1 : le pavage

Chaque élève a un gabarit d'une des figures de l'Activité 2 en carton épais plastifié. Prévoir deux élèves avec une même figure pour former des binômes pour la suite du travail.

Consigne : Suivre le contour du gabarit et noter 1 dans la figure obtenue.

Continuer en essayant de paver la feuille et en numérotant chaque nouvelle figure. S'arrêter à 4 à 6 figures. *Dans l'activité précédente les figures étaient des unités à assembler, ici le gabarit manipulé permet de rendre perceptible la transformation (glisser, retourner, tourner…).*

Pause structurante : A quoi avez-vous dû faire attention pour réussir votre pavage ?

Pour réussir mon pavage il faut :

- déplacer les gabarits ;

- essayer plusieurs déplacements pour trouver comment positionner le gabarit sans laisser de trou et sans chevauchement

- positionner le gabarit pour que les figures soient bien ajustées ;

- faire des tracés soignés ;

- anticiper plusieurs étapes pour ne pas devoir trop effacer.

Étape 2 : le programme de construction

Consigne : Écrire un programme en binôme permettant d'expliquer à un autre groupe comment on a déplacé le gabarit pour faire le pavage. On peut éventuellement donner un nom aux points. On écrit le programme pour expliquer comment on passe de la figure 1 à la figure 2, puis de la figure 2 à la figure 3 etc… Le but est qu'un autre groupe puisse reproduire le pavage.

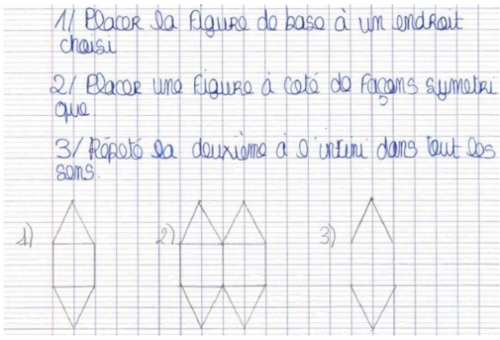
On peut faire l'hypothèse que les élèves vont utiliser différents niveaux de vocabulaire, ce n'est pas grave, à ce stade le vocabulaire géométrique n'est pas exigé, il s'agit d'amener l'élève à dire ce qu'il fait :

- vocabulaire courant : retourner, glisser, décaler, déplacer, coller, tourner…
- vocabulaire géométrique : symétrie, axe de symétrie, centre, sommet, côté, rotation …

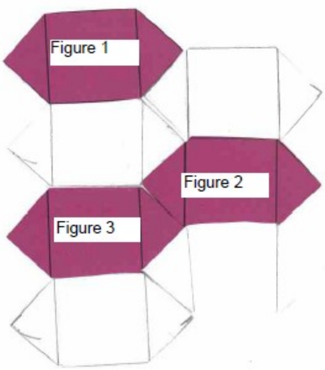
Exemples de productions d'élèves de 4e :

groupe A

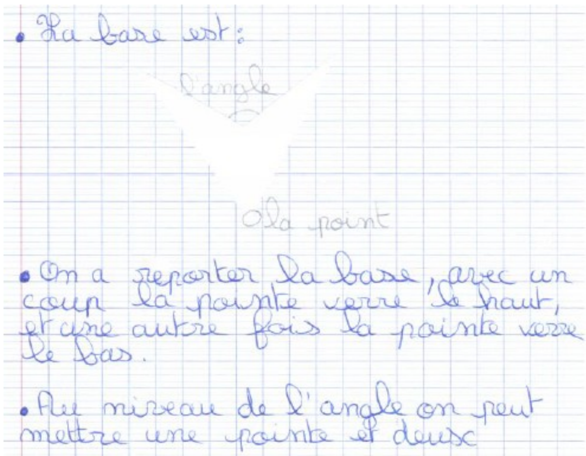
groupe D

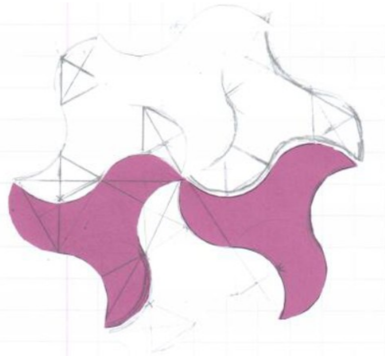


groupe B

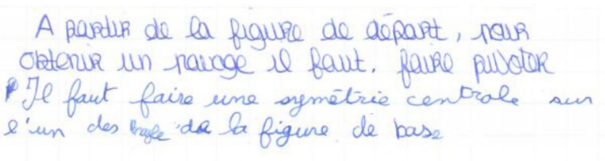


groupe E

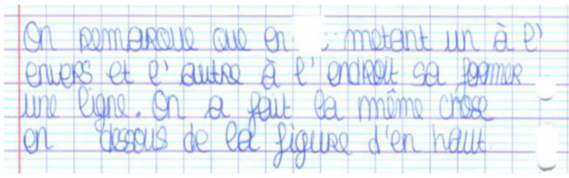




groupe C



groupe F



Analyse des productions des élèves de 4e :

Le groupe A écrit un texte qui explique la manière dont les pièces ont été assemblées du point de vue du geste. Le mouvement est codé par une flèche et les élèves insistent sur le fait que les figures doivent bien être bord à bord. « C'est un assemblage » montre que la nécessité identifiée pour ces élèves est le fait que les figures ont un côté adjacent.

Pour les groupes B et C on voit que la couleur de la figure change sans que l'information ne soit explilcitée. En effet, un changement de couleur signifie que la figure a été retournée par symétrie axiale. Le groupe C utilise le mot « pivoter » mais une reformulation est faite par un autre élève (l'écriture change) pour préciser « il faut faire une symétrie centrale sur l'un des angles de la figure de base ». Ici la symétrie centrale est identifiée mais la difficulté vient de la nécessité de caractériser le centre de la symétrie. Le motif ayant déjà un centre de symétrie, les élèves ont repéré que les trois branches permettent la même construction d'où l'utilisation de « l'un de ses angles ». Par contre il ne s'agit pas d'un polygone, les élèves n'utilisent donc pas le mot « sommet » pour désigner le centre de la symétrie. Ils utilisent le mot « angle » preuve que le concept de secteur angulaire n'est pas acquis ou du moins que le mot désigne « quelque chose de pointu » sans prise en compte de la nature des lignes qui délimitent cette portion du plan.

Les groupes D et F procèdent par la réalisation d'une frise ce que F explique en disant « on obtient une ligne ». Puis la même frise est reproduite « dans tous les sens » pour D et « en dessous » pour F. « dans tous les sens » indique que la procédure peut se faire dans différentes directions sans que ces directions soient précisées. On devine ici que « tous les sens » se limite aux deux directions horizontale et verticale.

Le groupe D utilise l'expression « place à côté de façon symétrique ». On ne sait pas si les élèves ont procédé par translation ou par une symétrie axiale ou encore par une rotation.

Le groupe F dit qu'il a placé « un à l'envers et un à l'endroit » sans qu'on sache ce que désigne « un » (le motif élémentaire ?) et sans que soit identifiée la transformation associée à cette propriété.

Le groupe E cherche à désigner les caractéristiques de son gabarit, il utilise le mot « pointe » pour désigner un des angles mais il ne sait pas comment désigner les deux autres. L'angle concave est appelé « angle » pour le différencier de la pointe.

On remarque que les transformations ne sont que très peu utilisées pour caractériser les pavages. Nous pensions que l'observation d'une configuration déjà réalisée était insuffisante et que le fait de manipuler et tracer les motifs aiderait les élèves à s'approprier le vocabulaire des transformations. Cela n'a pas été le cas. Cependant nous sommes en 4e et l'hypothèse est que cette manipulation devrait être effectuée au moment de l'introduction des transformations dès le primaire et continuée ensuite en 5e, avec des situations qui rendent nécessaire la formalisation.

Il serait sans doute intéressant de poursuivre la séance par un travail de reformulation afin de montrer que les transformations qui interviennent sont les mêmes malgré des formulation qui peuvent être différentes. On peut utilement utiliser la formulation « demi-tour » pour désigner la symétrie centrale et « réflexion » pour la symétrie axiale, ce qui permet de faire la différence entre la transformation qui change l'orientation (comme la réflexion dans un miroir) et celle qui conserve l'orientation (le demi-tour). Ce travail de reformulation sera alors poursuivi avec l'activité 4.

Activité 4

Objectif : Travailler les conversions de registres

But : connaître le nom et les caractéristiques des transformations effectuées avec les gabarits

Résultat attendu : obtenir le même pavage que le modèle sur GEOGEBRA

Moyen d'y arriver : tester les transformations, regarder la réponse du logiciel, lire les instructions et les nouveaux objets qui s'affichent, garder une trace des essais, garder une trace des solutions trouvées.

Étape 1 : construction sur le logiciel

Sur logiciel GEOGEBRA : la figure de base est préparée dans un fichier[3] avec le nom des sommets et le menu limitera les instructions aux transformations et à l'éditeur des points et de droites pour pouvoir tracer les centres de symétrie.

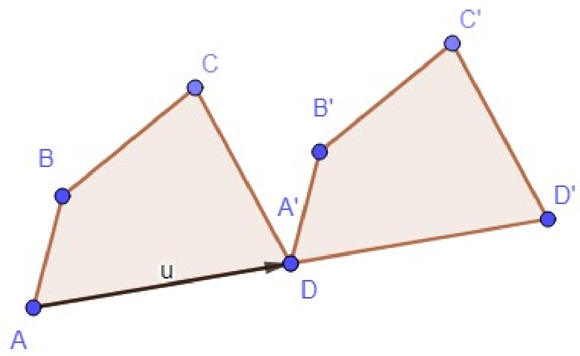
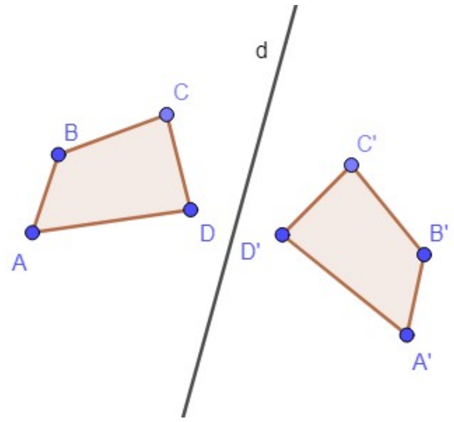
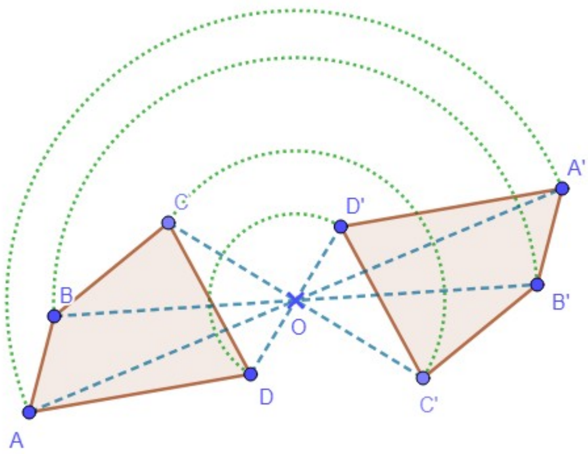
Consigne : Chaque binôme récupère le programme d'un autre groupe de l'activité 3 et sur Geogebra refait le pavage à partir de la figure de base préparée dans un fichier. Vous pouvez utiliser tous les outils, revenir en arrière, reprendre une nouvelle feuille. Gardez bien la trace de vos essais pour ne pas refaire plusieurs fois la même chose. Une fois terminé pour pourrez vérifier avec le pavage sur papier du groupe qui a écrit le programme.

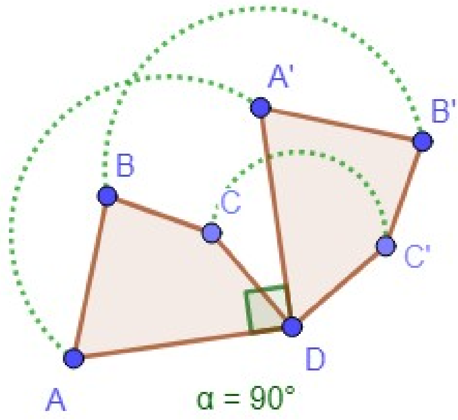
La difficulté consiste à reformuler le programme pour utiliser les instructions du logiciel. On fait l'hypothèse que les élèves vont tester les différentes transformations pour obtenir le même résultat que sur le pavage papier. La reformulation permet d'introduire le vocabulaire lié aux transformations.

Pause structurante : Les instructions de vos camarades n'ont pas toujours permis de faire le tracé sur GEOGEBRA. Avez-vous repéré des correspondances entre ce que vous ont écrit vos camarades et ce que propose le logiciel ?

On peut les amener à compléter un bilan qui servira de notice d'utilisation du logiciel sur le modèle ci-dessous *(les figures utilisées sont différentes des motifs précédents dans l'idée d'une montée en généralisation)* :

[3] Les figures sont prêtes dans les fichiers suivants de sorte qu'elles soient facilement transformées par les isométries :
Motif 1 : https://www.geogebra.org/m/ccg3ubrm
Motif 2 : https://www.geogebra.org/m/hkftq7vt
Motif 3 : https://www.geogebra.org/m/zgt2sjwf
Motif 4 : https://www.geogebra.org/m/pxwspusc
Motif 5 : https://www.geogebra.org/m/pekdeguf

Langage naturel	Instruction dans GEOGEBRA	Représentation
« ça glisse »	translation qui transforme D en C	
“ on retourne”	symétrie axiale d’axe la droite *d*	
“ on retourne” “on fait un demi-tour”...	symétrie centrale de centre O	

“on tourne”	Rotation (par exemple ici de 90° autour de D dans le sens des aiguilles d’une montre)	

On peut imprimer les pavages obtenus pour garder une trace de la réalisation.

La validation du pavage se fait a posteriori, l’avantage du logiciel est de laisser la possibilité de faire de multiples essais-erreurs avec un tracé précis et propre. A noter que les figures sont grisées et que les figures transformées le sont aussi, si bien que la superposition est visible par un gris plus foncé et les manques par des espaces blancs. La barre outil est aménagée pour donner à voir les boutons autorisés. On pourra introduire ici le mot de vecteur pour désigner l’objet affiché par le logiciel lorsqu’on demande d’appliquer la translation qui transforme A en D et proposer l’étape suivante.

Étape 2 : codage des caractéristique d’une translation

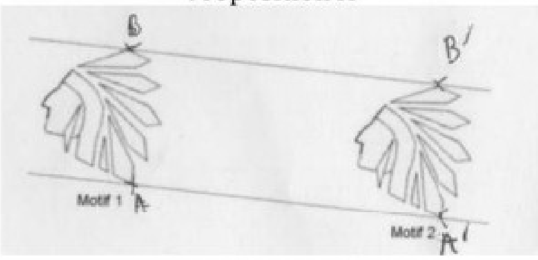
Chaque élève a le document suivant sur une feuille.

Consigne : Propose une trace écrite permettant de comprendre quelle est la translation qui permet de transformer la figure 1 en la figure 2 ?

A partir des propositions des élèves, les avantages et inconvénients sont discutés pour amener les élèves à formaliser les caractéristiques de la translation et donc ce qu’il est nécessaire d’indiquer pour être certain qu’on applique bien une translation précise et non une autre.

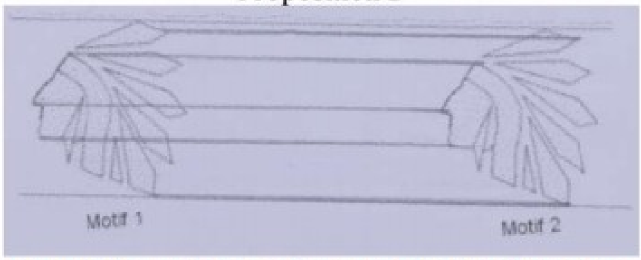
Exemple de productions et les commentaires critiques sur les propositions :

Proposition A



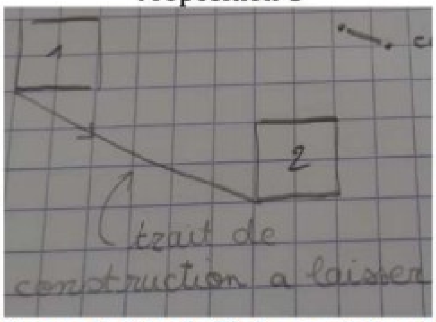
On ne comprend pas qu'il y a un décplacement

Proposition B



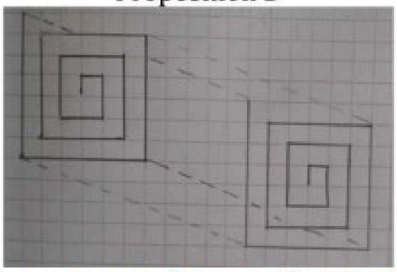
On ne sait pas dans quel sens est la transformation. Estce le motif 1 qui est transformé en motif 2 ou l'inverse ?

Proposition C



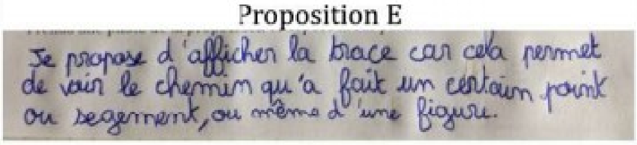
Il est bizarre de faire la flèche en plein milieu du segment. On pourrait croire que c'est un codage de longueur égale

Proposition D



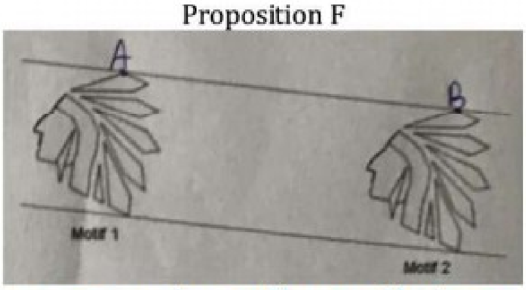
On ne sait pas dans quel sens est la transformation. Est-ce le motif 1 qui est transformé en motif 2 ou l'inverse ?

Proposition E


Je propose d'afficher la brace car cela permet de voir le chemin qu'a fait un certain point ou segement, ou même d'une figure.

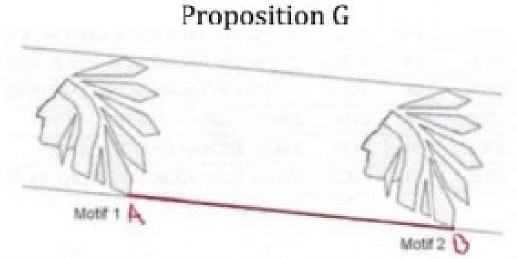
Ceci n'est utilisable uniquement sur Geogebra.

Proposition F



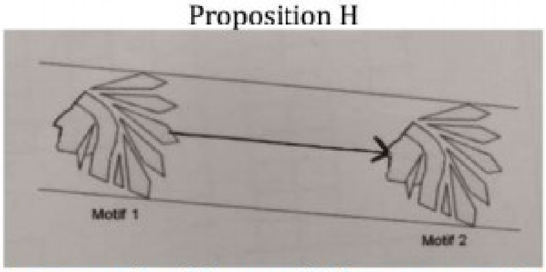
On ne comprend pas qu'il y a un décplacement

Proposition G



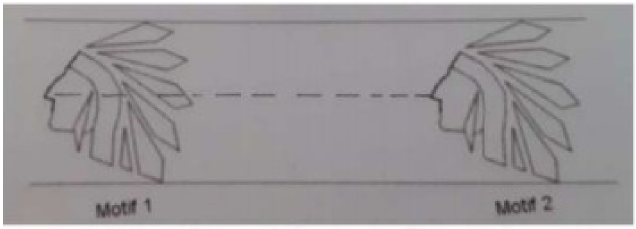
On ne sait pas dans quel sens est la transformation. Estce le motif 1 qui est transformé en motif 2 ou l'inverse ?

Proposition H



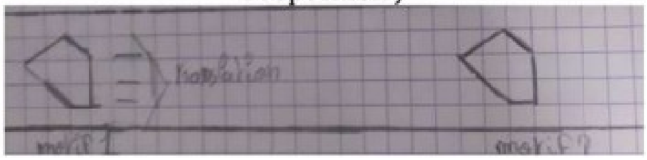
On comprend qu'il y a un déplacement, mais on peut croire que la plume de l'arrière de la tête est transformé au nez...

Proposition I



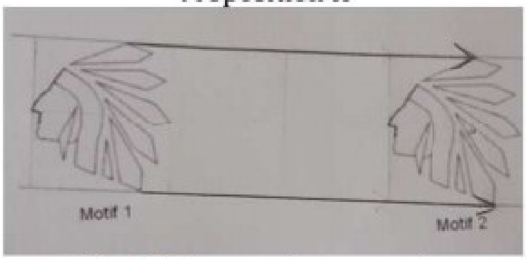
On ne sait pas dans quel sens est la transformation. Est-ce le motif 1 qui est transformé en motif 2 ou l'inverse ?

Proposition J



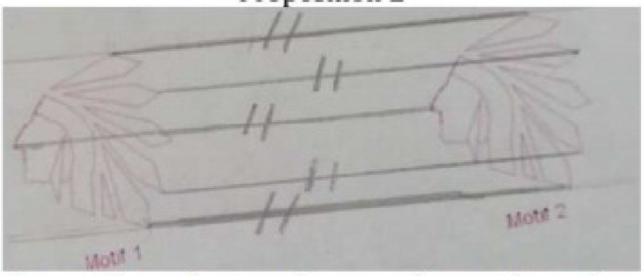
On voit qu'il faut « déplacer » vers la droite le motif 1 mais on ne sait pas jusque où

Proposition K



On a mis 2 « flèches » mais pourquoi ne pas en mettre plus ou moin ?

Proposition L



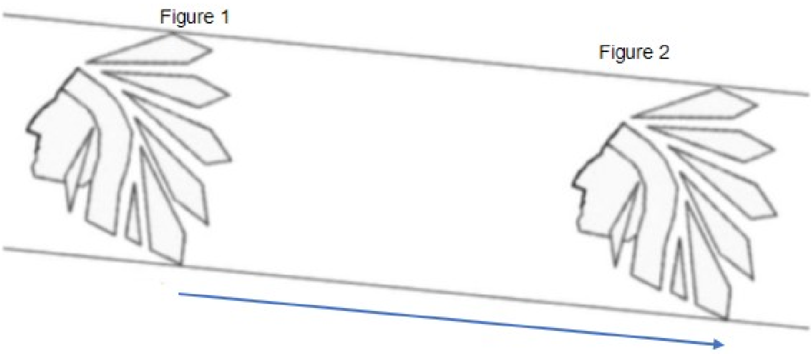
On ne sait pas dans quel sens est la transformation. Est-ce le motif 1 qui est transformé en motif 2 ou l'inverse ?

Pour définir une translation

Une translation peut être schématisée par une flèche qu'on appelle vecteur et qu'on peut désigner par une lettre surmontée d'une flèche $\vec{u}$

On ne représente d'un seul vecteur car peu importe sa position, il aura toujours :

- la même direction (toutes les glissements se font suivant des droites sont parallèles entre elles) ;
- le même sens (par exemple de la figure 1 vers la figure 2) ;
- la même longueur (on a la même distance entre deux points homologues).



Activité 5

Objectif : Comparer les transformations pour comprendre leurs spécificités, en particulier repérer les points homologues dans une transformation

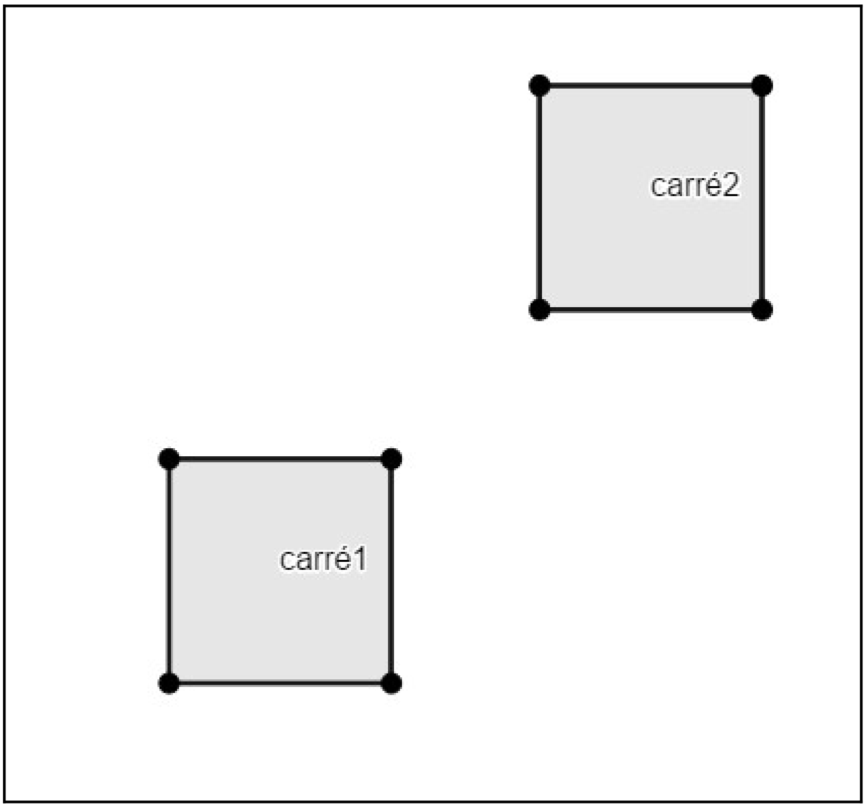
But : identifier les différentes transformations permettant de transformer une figure en une autre semblable.

Résultat attendu : une justification permettant de caractériser une transformation

Moyen pour y arriver : repérer les propriétés de chacune des transformations pour voir ce qui est commun et ce qui est différent ; apprendre le vocabulaire permettant de parler de ces propriétés ; avoir une représentation dans sa tête de chaque transformation

Les élèves ont tendance à rester sur l'idée naïve que toutes les transformations sont des symétries axiales et donc pensent les transformations sur le modèle du « pliage ». Pour les figures non symétriques, les points homologues sont faciles à identifier. L'objectif ici est de faire apparaître la nécessité d'identifier les points homologues pour caractériser la transformation. Deux carrés semblables sont proposés dans une position telle qu'il existe 5 transformations permettant de transformer l'un en l'autre. Le problème est de déterminer ces cinq transformations en étant certain qu'on a bien 5 transformations différentes, d'où la nécessité de les caractériser d'une manière ou d'une autre (nommer les points homologues, les segments homologues, identifier les caractéristiques des transformations).

On distribuer à chaque élève une feuille avec la figure des deux carrés 1 et 2 suivante.

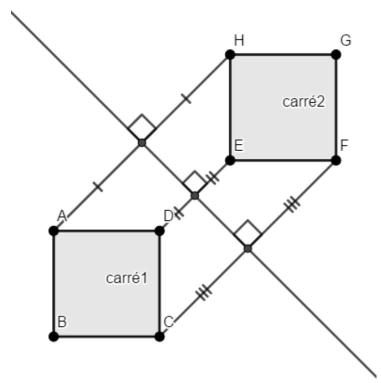
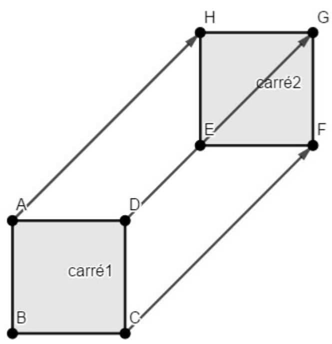


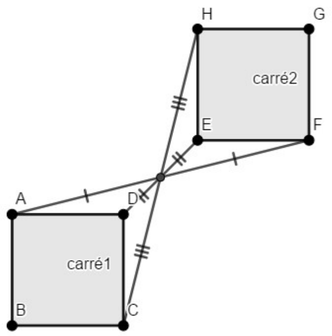
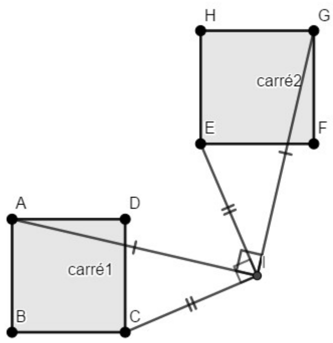
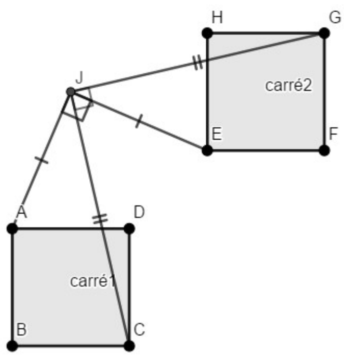
Bilan intermédiaire : Pour vérifier que l'on a bien des transformations différentes, il est nécessaire de les caractériser. On se met d'accord sur les noms des points. On constate que donner deux points homologues ne suffit pas, il en faut deux autres. On repère des égalités de longueurs qui amènent à envisager de tracer des médiatrices. On identifie les caractéristiques de chaque transformation.

On peut se poser la question de savoir s'il en existe plus ? On pourra de manière empirique se convaincre qu'il n'en existe pas d'autres mais on ne pourra pas le démontrer sans une meilleure connaissance des propriétés des transformations.

Pause structurante : On liste les transformations trouvées à partir des couples de points homologues pour les caractériser.

On peut faire une carte mentale ou un tableau reprenant les différentes transformations en illustrant par la figure en ajoutant les tracés de construction et les codages.

Symétrie axiale qui transforme A en H, B en G, C en F et D en E. Symétrie d'axe la médiatrice de [AH] ou de [DE] ou de [CF] ou de [BG]	
Translation qui transforme A en H, B en E, C en F et D en E.	

Symétrie centrale qui transforme A en F, B en G, C en H et D en E. Symétrie de centre le milieu de [AF] qui est aussi celui de [BG], de [CH], et de[DE].	
Rotation de centre I et d'angle 90° ; I est l'intersection des médiatrices de [AG] et [CE]. Transforme A en G, B en H, C en E et D en F.	
Rotation de centre J et d'angle 90° ; J est l'intersection des médiatrices de [AE] et [CG]. Transforme A en E, B en F, C en G et D en H.	

Pour trouver les transformations qui permettent de passer du carré 1 au carré 2 :

1) on a nommé les sommets de chacun des carrés pour décrire quels étaient les points homologues.

- les deux carrés sont identiques donc les transformations sont des symétries, des rotations ou des translations.

2) en traçant les segments qui relient un point et son point homologue on peut repérer :

- un centre de symétrie si ces segments ont le même milieu ;

- une translation si ces segments sont parallèles ;

- une rotation si les médiatrices de ces segments sont concourantes.

Cette activité peut être prolongée par des situations de communication de programmes de construction du type de celle proposée en annexe 2.

Activité 6

Objectif : Utiliser les instruments pour construire le transformé d'une figure

But : Savoir caractériser une frise et réaliser une frise

Résultat attendu : Avoir tracé la figure attendue et qu'elle soit superposable à celles des autres élèves pour la continuité de la frise

Moyens d'y arriver : Connaître les propriétés des figures, savoir utiliser les instruments pour tracer des parallèles, des perpendiculaires, utiliser le compas pour reporter des mesures, savoir tracer une médiatrice, un milieu. Connaître les caractéristiques des transformations.

Étape 1 : appliquer un programme de construction pour construire le motif de base

Chaque élève doit, à partir d'un motif élémentaire et d'un programme tracer le motif de base pour réaliser une frise. Chaque programme demande de tracer l'image par une symétrie centrale de centre un point A donné et une symétrie axiale par rapport à un axe d donné. On veillera à proposer des configurations moins communes (axe de symétrie non vertical ou centre de symétrie à l'extérieur de la figure…). *Les élèves ont à construire des transformés par ces deux symétries sur la même figure pour bien caractériser chacune d'elles. L'étape suivante l'amènera à utiliser le motif de base pour effectuer une translation et obtenir une partie de la frise. A cette étape l'élève ne sait pas encore ce qu'est un motif de base.*

Consigne : Nous allons réaliser une bande décorative. Cette bande sera réalisée à partir de toutes vos productions que nous mettrons bout à bout. Pour cela, nous allons construire un motif qu'on appellera le motif de base. Appliquez le programme de construction qui vous est donné pour obtenir un motif de base.

Matériel : fiches en annexe 3

Quatre modèles de frises sont proposés avec différents niveaux de difficulté liés au motif élémentaire du plus simple au plus complexe : triangle rectangle, losange dont le symétrique par rapport à A a un côté commun avec l'axe de symétrie, chevron, chevron traversant l'axe de symétrie.

Exemple de fiche donnée en annexe :

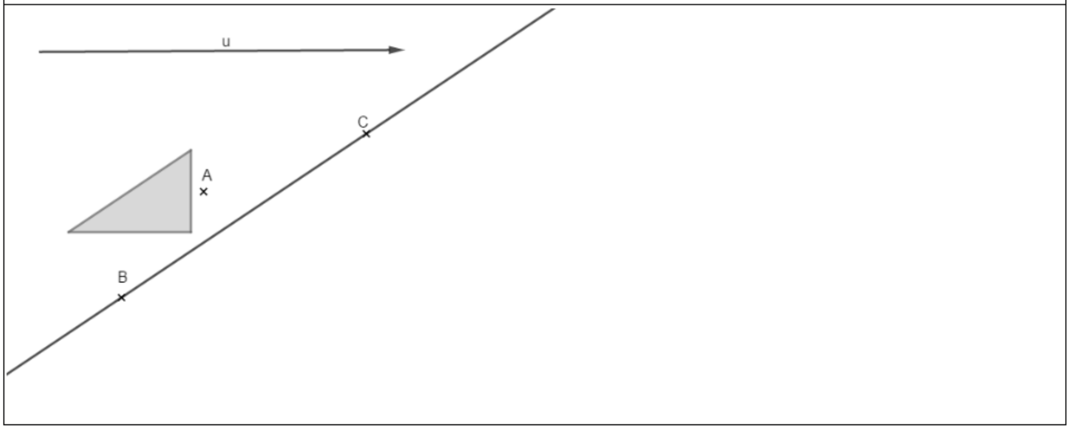
Frise 1

Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A.

Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC).

Vous obtenez ainsi le motif de base.

Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.



Aides possibles :

- modèle du motif élémentaire et/ou du motif de base sur transparent ou non, à disposition à tout moment de la construction ou après un essai ou en correction à la fin du tracé. Avoir le motif de base permet de comprendre ce qui est attendu mais empêche d'anticiper la réalisation.

Consigne : Vous pouvez vous aider du modèle si vous avez besoin. Vous pouvez vérifier que vous avez correctement construit votre motif de base avec le modèle sur transparent.

Variables didactiques : Le choix des mesures est important : si les mesures sont non entières, les élèves vont utiliser plus volontiers le compas pour reporter les longueurs. Il est aussi possible de jouer sur le « coût » des instruments pour contraindre les élèves à utiliser certains instruments plutôt que d'autres (par exemple, utiliser la règle graduée coûte plus de points que le compas et on comptabilise les points, le but étant de faire la figure au moindre coût).

Aide possible : Au niveau des outils, les élèves peuvent manipuler plus facilement les réquerres plutôt que les équerres. Les élèves dyspraxiques peuvent s'aider d'un papier calque pour reproduire la figure sur le calque. Ensuite ils utilisent cet outil pour visualiser la réponse mais pas pour décalquer. Cet outil est simplement une aide à la mémoire de travail en donnant régulièrement la possibilité de revenir à la figure globale et à son orientation dans le plan.

Étape 2 : Réaliser une frise à partir d'un motif de base

Consigne : Nous allons continuer la bande décorative. Reproduisez le motif de base obtenu par la translation de vecteur $\vec{u}$. Vérifiez que vous obtenez bien le même motif. Il faudra le reproduire encore 2 fois, vous avez la place de faire 4 fois le motif de base. Vous pourrez terminer votre frise à la maison en utilisant les outils à votre disposition. Les tracés seront faits au crayon, nous choisirons des couleurs plus tard.

Le vecteur est dessiné sur le modèle mais son représentant n'est pas dessiné à partir d'un point de la figure de base.

Dans un groupe de 4 élèves hétérogène, on peut donner à chaque élève un motif différent en adaptant le motif aux possibilités de l'élève.

Pour reproduire le motif, certains élèves tracent les parallèles à la direction du vecteur $\vec{u}$, utilisent le tracé intermédiaire d'un cadre rectangulaire ce qui revient à la création d'un quadrillage, ou reproduisent par transparence.

Pause structurante : On énonce le vocabulaire lié aux frises.

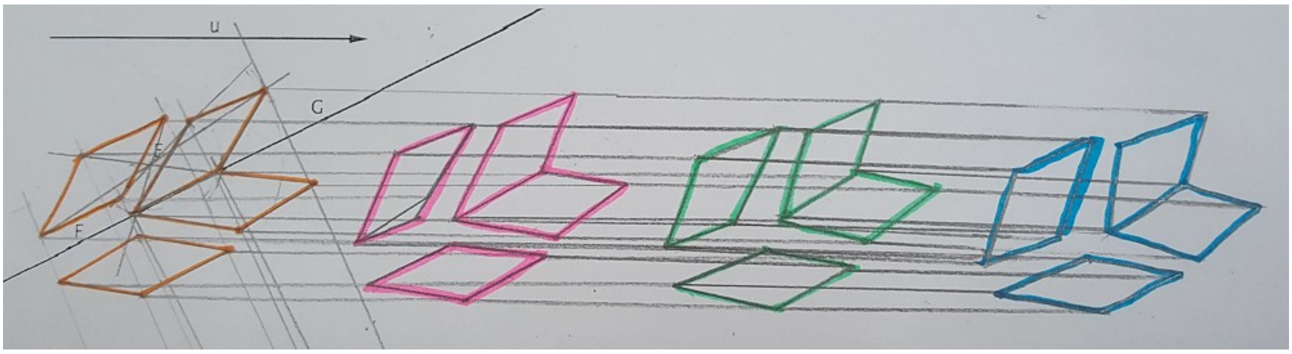
Une bande décorative constituée d'un motif de base qui est reproduit dans une seule direction par translation est appelée **une frise**.

Dans une frise :

- le motif élémentaire est le plus petit motif qui par transformation permet de réaliser la frise.

- le motif de base est le plus petit motif qui par translation permet de réaliser la frise.

Exemple de production :



Ici le tracé des droites parallèles de direction le vecteur $\vec{u}$ montre une stratégie efficace pour reproduire une figure par translation. Cependant le nombre de lignes et le manque de soin dans le prolongement des tracés rend le repérage difficile. Il est alors intéressant de faire s'exprimer les élèves sur leurs stratégies : quelle est celle qu'ils utilisent pour le tracé ? Quelle est celle qu'ils utilisent pour contrôler leur tracé?

Le fait de tracer quatre fois le motif de base permet de rendre perceptible la conservation des formes, longueurs, angles mais aussi le fait que tous les motifs sont espacés de la même longueur correspondant à la norme du vecteur de la translation. Ces critères peuvent devenir des nécessités liées au tracé d'une frise.

Étape 3 : Réalisation de la frise globale

Les élèves ayant les mêmes motifs sont regroupés et ils doivent construire la frise globale en agençant les différentes productions (vérification des alignements, des distances) et en choisissant les couleurs qu'ils vont utiliser pour colorier leurs tracés pour que la frise reste une frise géométrique (répétition par translation de la forme et la couleur). Un débat peut amener à mettre en évidence que la couleur n'est pas une propriété géométrique, elle n'intervient donc pas comme une caractéristique du motif de base, elle modifie cependant la perception que nous pouvons avoir de la logique de l'agencement de la frise et de ce qui constitue le motif de base.

Consigne : Vous allez assembler vos frises pour obtenir une frise globale. Les propriétés de la frise doivent être respectées. Vous devez vous mettre d'accord sur les couleurs à utiliser.

Lors de cette phase finale, on pourra mettre en évidence les propriétés isométriques des transformations. Une frise sera correcte si ces propriétés sont bien vérifiées : les triangles rectangles restent des triangles rectangles, les points alignés restent alignés, les parallèles restent parallèles.

Pause structurante :

Les translations, les symétries axiales, les symétries centrales transforment les figures en conservant leurs propriétés : forme, angles, longueurs, parallélisme, perpendicularité.

Dans une frise, tous les motifs de base sont espacés de la même longueur.

Le fait qu'il s'agisse d'isométrie peut sembler logique aux élèves, il sera important de travailler sur d'autres transformations afin que la nécessité de préciser cette propriété apparaisse. Ici il s'agit de formuler ce qui correspond au contrôle du tracé avec le calque : la figure transformée est superposable à celle de départ.

Exemple de production :

La bande décorative permet un contrôle du tracé par la perception. La régularité est assurée par le respect du programme d'une part et par le soin apporté au tracé.

Activité 7

Objectif : Utiliser les transformations pour décrire le passage d'un motif élémentaire au motif de base

But : Analyser un motif de base pour identifier le motif élémentaire et les transformations qu'il a subi

Résultat attendu : Avoir identifié le motif élémentaire et utiliser le vocabulaire et les caractéristiques des transformations pour décrire le passage du motif élémentaire au motif de base

Moyens d'y arriver : Connaître les caractéristiques et les propriétés des transformations, connaître le vocabulaire, reconnaître des figures simples dans des figures complexes.

Étape 1 :

A partir de documents présentant des exemples et des contre-exemples de frises[4], demander aux élèves de lever un crayon vert s'il s'agit d'une frise et un crayon rouge s'il ne s'agit pas d'une frise.

[4] Pour des contre exemples de frises : http://ysoft.org.free.fr/manuel/m@nuel-eleve/4/c4t11/ressources/friseexpose.pdf

On insistera sur deux choses :

- il suffit qu'une caractéristique manque pour que le motif ne soit pas une frise

- pour que la bande soit une frise, il faut que toutes les caractéristiques soient vérifiées.

Pour chaque exemple, repérer s'il y a consensus ou non, faire justifier les élèves et mettre en débat, conclure une fois que la caractéristique est vérifiée. On passera au feutre les éléments caractéristiques proposés par les élèves et on délimitera par deux traits verticaux le motif de base quand il existe.

Documents à projeter[5] :

Frise 1

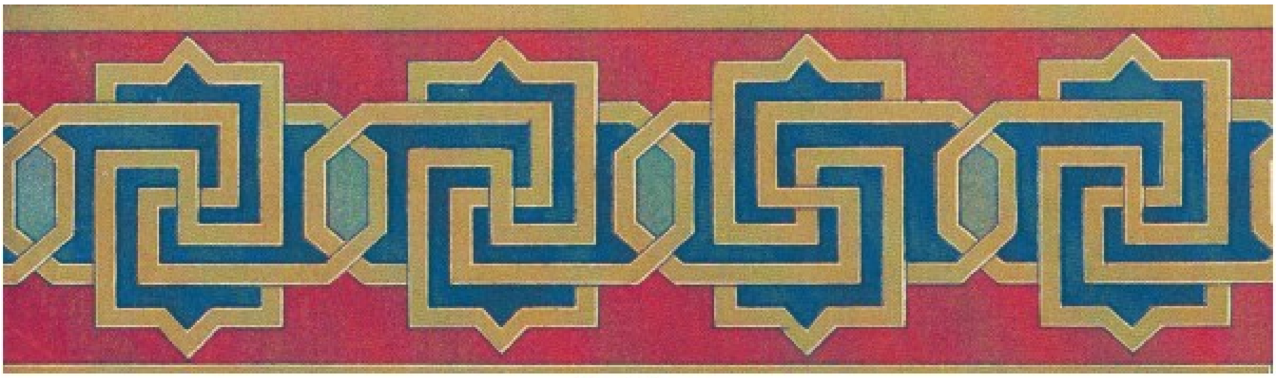
Ici il n'est pas possible de repérer un motif élémentaire. On peut se fixer par exemple sur la taille des feuilles et chercher des petites feuilles identiques or on n'en trouve aucune. Ce n'est pas une frise du moins sur la partie que nous avons. On peut insister sur le fait que peut-être s'agit-t-il d'une partie d'un motif plus grand mais on ne peut pas le savoir.

Mosaïque d'Ampurias

Frise 2

On peut repérer un motif élémentaire, par contre on ne voit pas suffisamment la suite pour conclure sur le motif de base.Peut-être s'agit-il des du motif élémentaire et de son image par rotation.

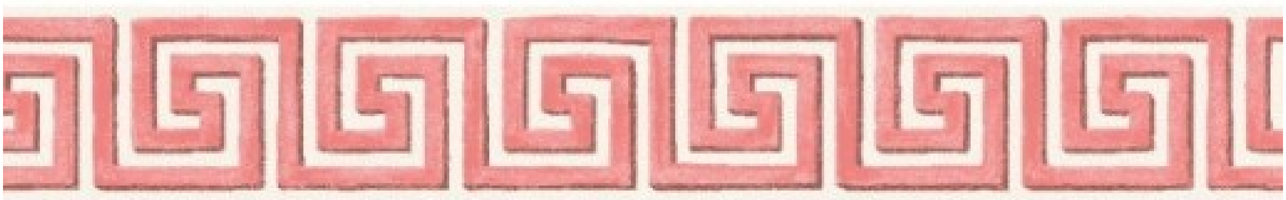
[5] Pour des exemples de frises : http://www.mathkang.org/catalogue/prodfris.html



Boukhara

Frise 3

Nous avons bien un motif de base est inscrit dans un carré. Le motif élémentaire est plus complexe à déterminer, les deux premiers motifs en partant de la gauche sont transformés par une translation mais le troisième par une symétrie axiale. S'il s'agit d'une frise le motif élémentaire n'est pas visible sur cette portion.

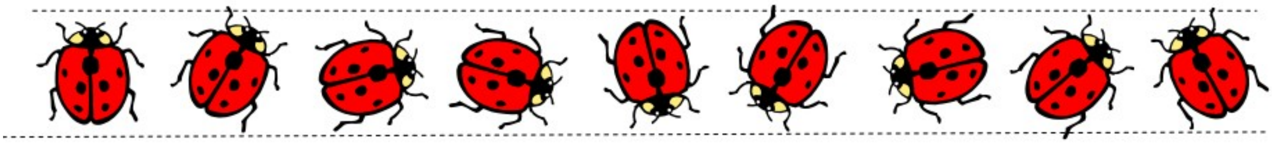


Frise 4

Nous avons une frise avec un motif élémentaire qui est aussi motif de base.

Frise 5

Ici nous avons une série de dessins avec des motifs qui se répètent mais on ne peut pas trouver de motif de base du fait que les dessins ne se retrouvent jamais à côté des mêmes.

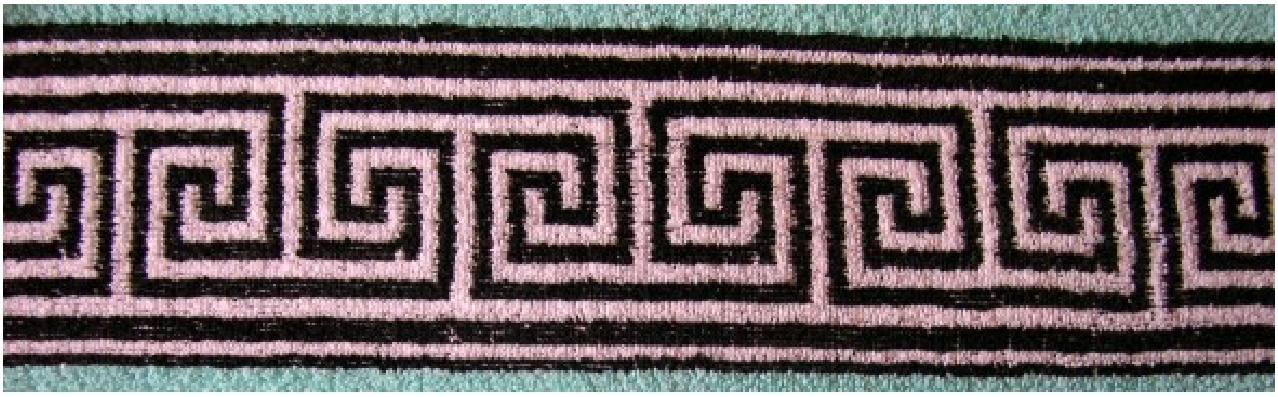


Frise 6

On a un motif qui se répète mais aucun motif de base, l'orientation des coccinelles est à chaque fois différente.

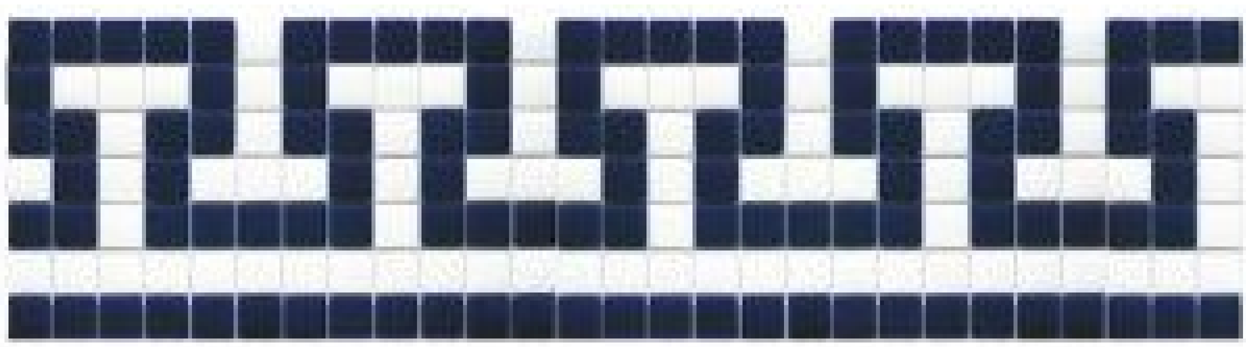
Frise 7

Le motif élémentaire est constitué d'une fleur et par la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation on obtient un motif de base avec deux fleurs qui se répète par translation.



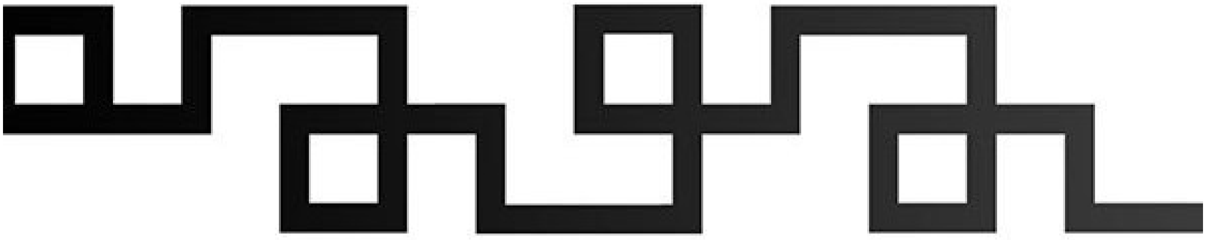
Frise 8

Le motif de base est facilement identifiable. Le motif élémentaire est reproduit par une symétrie centrale et une symétrie axiale.



Frise 9

Le motif de base est obtenu à partir d'un motif élémentaire et de son symétrique par rapport à un axe vertical. La bande du bas ne permet pas une reproduction du motif élémentaire par symétrie centrale.



Frise 10

La portion présentée ne permet pas d'attester d'un motif de base, le motif à gauche est incomplet.

Pause structurante :

Pour dire qu'on a une frise on doit identifier un motif de base reproduit dans une direction par une translation.

Ce qui signifie qu'il faut identifier : le motif de base et la translation.

Étape 2 :

Chaque élève a une fiche individuelle avec des exemples de frises tirées du document Eduscol[6].

Consigne : délimitez à l'aide de deux traits verticaux, le plus petit motif de base de chacune des frises suivantes

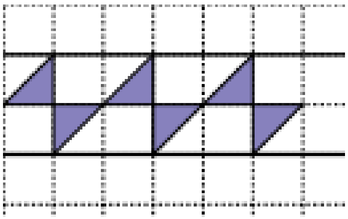
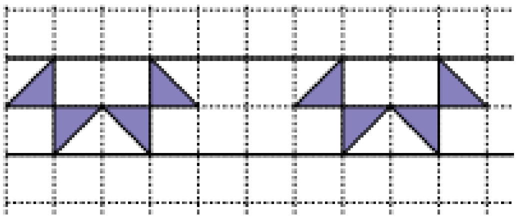
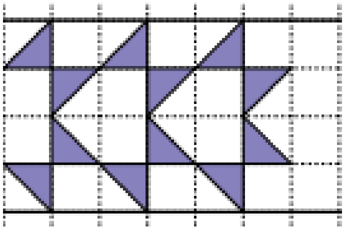
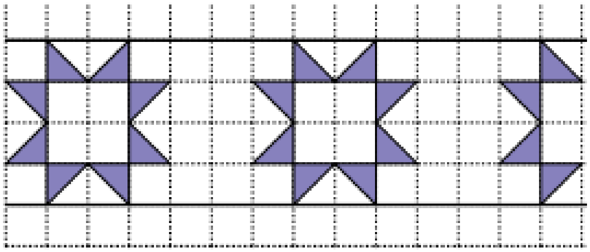
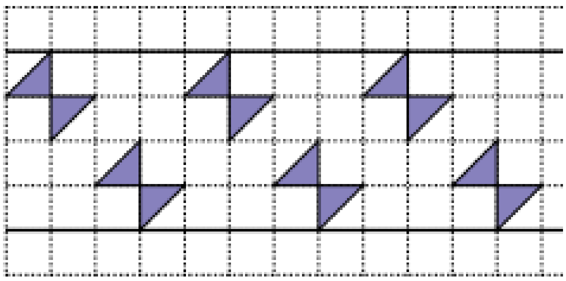
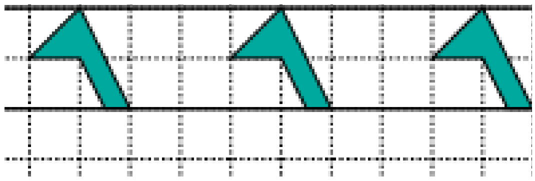
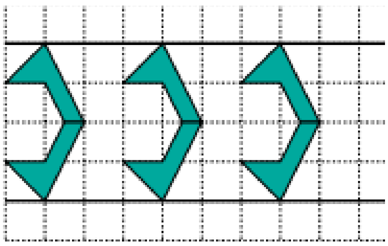
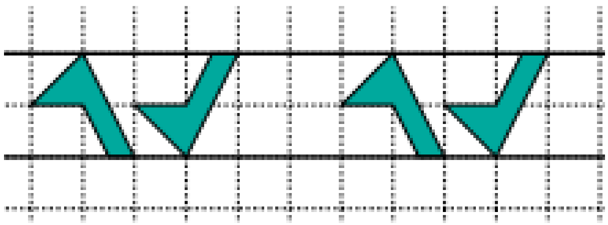
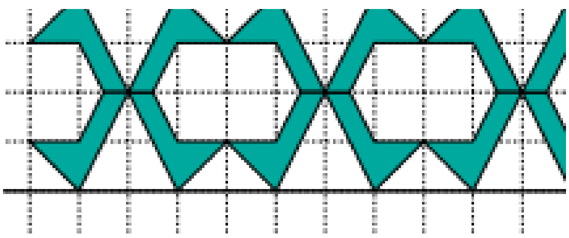
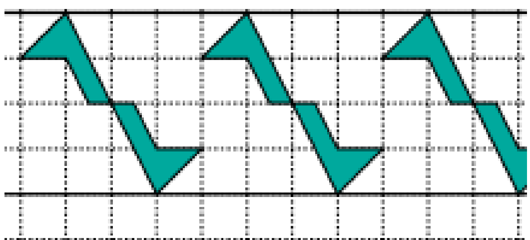
Cette étape peut être prolongée par des exercices individuels (voir annexe 4).

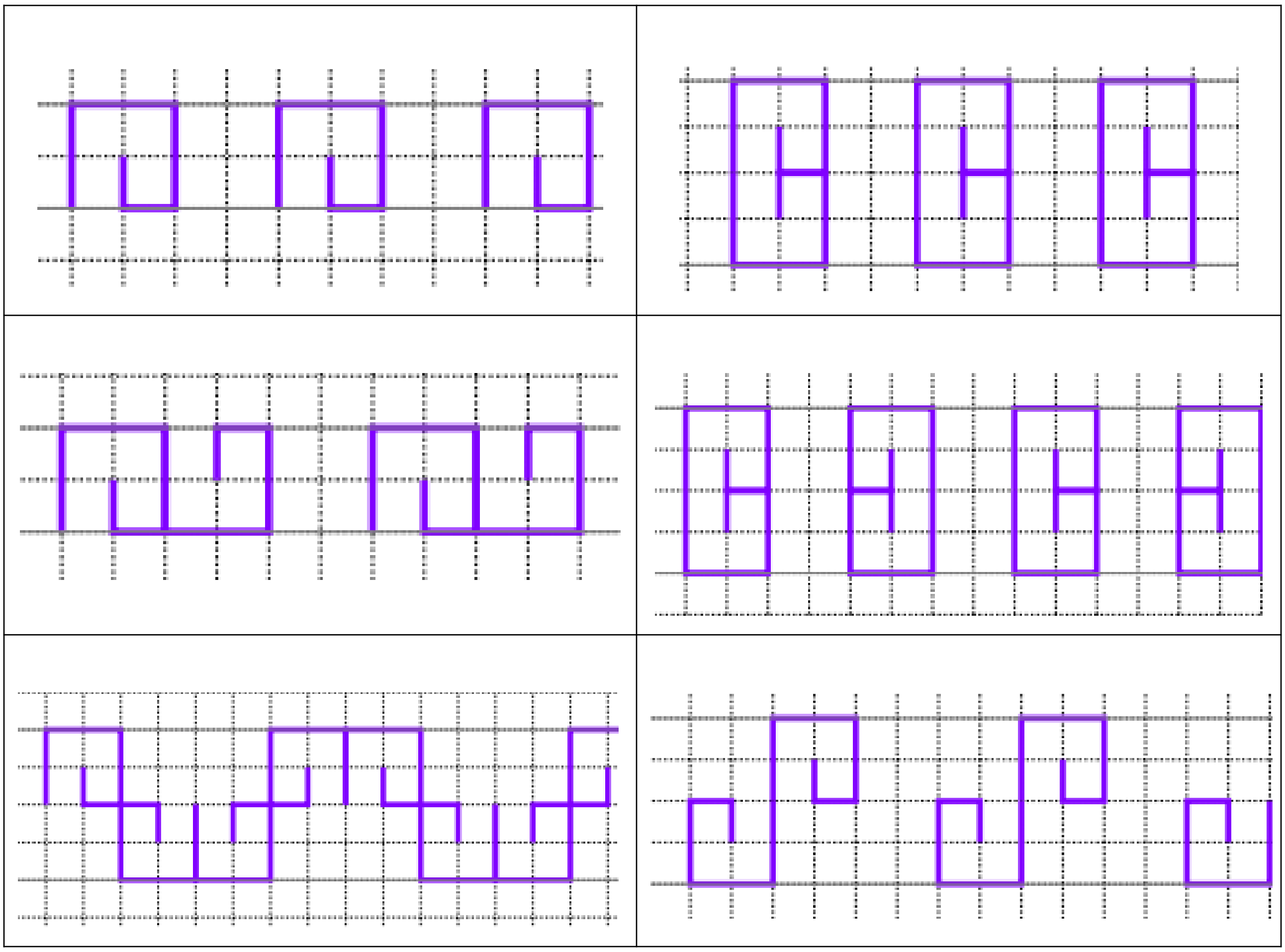
Étape 3 :

Les élèves sont par groupes, ils ont un jeu de 16 cartes représentant des frises, une fiche avec les 16 cartes représentées (voir ci-dessous) et un tableau double entrée 3 par 4 sans identification des critères des lignes et des colonnes sur une affiche A3 Les cartes doivent pouvoir être posées dans les cases du tableau.

[6]Frises ornementales et groupes dans les ressources complémentaires du document d'accompagnement : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Geometrie_plane/31/2/RA16_C4_MATH_geo_plane_doc_maitre_574312.pdf

Fiche avec les cartes proposées (une plastifiée comme modèle, l'autre à découper pour la manipulation) :



Consigne : Vous devez classer toutes les cartes dans le tableau et décider du critère correspondant à chaque ligne et chaque colonne en l'écrivant dans les cases grisées.

Aide : On rappelle qu'un motif élémentaire permet d'obtenir un motif de base qui est reproduit dans une direction par translation.

On peut encadrer le plus petit motif de base de chaque frise et tracer en rouge les éléments des transformations qui permettent de passer du motif élémentaire au motif de base et les nommer.

L'objectif est que les élèves formalisent les critères choisis pour regrouper les cartes ensemble et que le travail en groupe les amène à devoir décrire, caractériser, expliciter leurs choix. Les élèves reconnaissent que les frises ont un motif élémentaire identique et pour chacune ils repèrent différentes transformations (symétrie axiale, symétrie centrale, autre).

La fiche modèle d'une part et les cartes d'autre part permettent de manipuler les cartes tout en pouvant comparer le résultat avec la position initiale de la frise et donc observer des frises qui sont invariantes par rotation.

Le premier critère peut être le motif élémentaire, nous en proposons trois différents. Ensuite le motif de base peut avoir des propriétés géométriques (centre de symétrie, symétrie axiale, translation). Le nombre de motifs élémentaires peut être proposé tout comme la longueur de la translation mesurée sur le quadrillage. Aucun critère ne peut être rejeté s'il est géométrique et argumenté.

Suivant les choix, certaines cartes peuvent ne pas trouver de place dans le tableau et toutes les cases ne sont pas nécessairement utilisées.

Il est très rare de demander aux élèves de déterminer des critères par eux-mêmes, c'est un processus qui demande de comparer et d'identifier des critères communs. Il nous semble essentiel de proposer ce type de tâches régulièrement pour amener les élèves à comprendre les nécessités qui sont liées à ces catégorisations.

Pause structurante :

Il existe différents types de frises, nous avons pu les classer suivant :

- Le motif élémentaire
- les propriétés géométriques du motif de base
- le nombre de motifs élémentaires dans le motif de base
- la translation qui permet d'obtenir la frise à partir du motif de base
- les propriétés géométriques de la frise

…

Activité 8 : Jeu des mini-combis

Objectif : Utiliser les transformations pour caractériser une configuration

But : Utiliser les propriétés des transformations pour reconnaître un type de pavage

Résultat attendu : Obtenir différentes configurations en utilisant des transformations différentes

Moyen d'y arriver : Manipuler les pièces, reconnaître des axes de symétrie, des centres de symétrie, des motifs qui se répètent ; reconnaître les transformations qui permettent de répéter le motif ; laisser une trace des solutions trouvées ; organiser la recherche pour être certain qu'on a trouvé toutes les possibilités.

Étape 1 : jouer

Les élèves sont par binômes avec un plateau ainsi que les pièces et découvrent le jeu. L'enseignant peut prendre en photo les solutions trouvées ou mettre à disposition des élèves de la pâte à fixer pour pouvoir afficher les solutions au tableau.

Matériel : en annexe 5

Jeu combis Défi N°41 dans le document Defis_maths de l'IREM de Lyon :

http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/Defis_maths.pdf

Minicombis : http://www.apmeplorraine.fr/IMG/pdf/4_combis_mini_combis_1.pdf

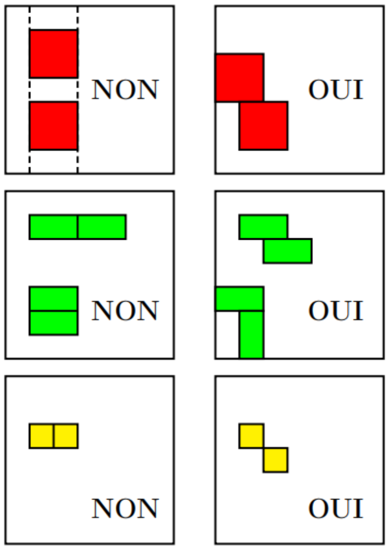
Règle du jeu :

Tu dois recouvrir entièrement le plateau avec toutes les pièces sans qu'elles se chevauchent en respectant trois règles :

Règle 1 : deux grands carrés ne peuvent pas se trouver exactement sur la même ligne ou la même colonne

Règle 2 : deux rectangles ne peuvent pas être adjacents sur toute la longueur de deux mêmes côtés

Règle 3 : deux petits carrés ne peuvent pas être adjacents



Étape 2 : Mise en commun

4 binômes se mettent ensemble pour comparer leurs solutions

Consigne : Cherchez les solutions qui sont semblables c'est-à-dire qu'on peut réussir à superposer exactement.

Combien de solutions différentes avons-nous ? Comment peut-on faire un portrait de chaque solution trouvée ?

Les élèves peuvent identifier des symétries dans la configuration obtenue et repérer des motifs qui se répètent. On utilise les transformations pour expliquer comment le motif est répété. On fait le lien avec le pavage : on a bien un recouvrement du plan sans trou et sans chevauchement avec un motif qui est reproduit plusieurs fois.

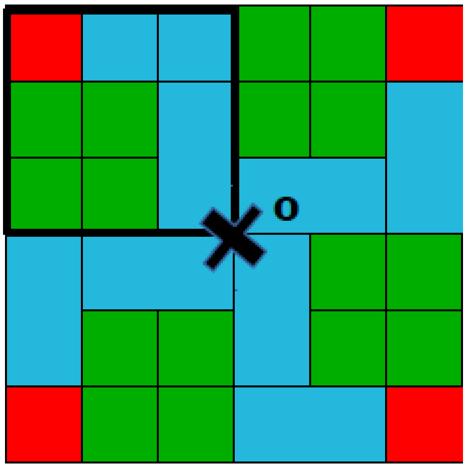
Pause structurante : On énonce les nécessités qui sont écrites au tableau ou sur une affiche

Pour décrire un pavage, il faut reconnaître des axes de symétrie, des centres de symétrie en regardant l'orientation des figures.

Les élèves individuellement ou par binômes ont une solution et en font le portrait sur une affiche du type :

Indiquez le motif et quelle transformation permet de recouvrir le plateau

Exemple de production :



Rotation de 90° ↻ de centre O

Étape 3 : Lister toutes les solutions

On distribue une fiche avec des tableaux pour permettre aux élèves de colorier les solutions trouvées (voir fiche solutions élèves).

Consigne : Comment peut-on être certain que nous avons trouvé toutes les solutions possibles ?

Les différentes configurations peuvent amener à identifier les axes et centres de symétrie de chaque configuration. On trouvera ainsi une solution pour chaque cas :

- avec un centre et pas d'axes de symétrie,
- Sans axe ni centre de symétries
- 2 axes de symétrie et un centre de symétrie

Prolongement

On peut alors continuer l'exploitation par des problèmes allant vers la preuve.

Exemple : Pourquoi n'est-il pas possible d'avoir une configuration avec un seul axe de symétrie ?

→ Si la configuration admet un axe de symétrie ce ne peut être que la médiatrice d'un côté ou une diagonale.

Si c'est une médiatrice d'un côté, toute pièce ayant un côté sur cet axe se retrouverait à avoir un côté adjacent sur toute sa longueur à une autre pièce de même nature, ou se retrouver sur la même ligne ou la même colonne. Si une pièce admet cet axe comme axe de symétrie, il ne peut s'agir que du grand carré ou du rectangle or on ne peut pas en avoir deux alignés donc on ne peut pas terminer le pavage.

Si l'axe est une diagonale les grands carrés sont alors sur l'autre diagonale ainsi que deux petits carrés. Le reste du pavage contraint à avoir une symétrie suivant les deux diagonales perpendiculaires et donc à admettre un centre de symétrie.

La démonstration ici se fait par traitement exhaustif de tous les cas possibles.

Pause structurante :

Pour chercher tous les cas possibles il faut organiser sa recherche et garder trace de ce qui a été essayé. Pour cela :

- Choisir un sens et ne pas en changer (de la gauche vers la droite, du haut vers le bas, dans le sens des aiguilles d'une montre…)

- Coder ce qui a été testé pour ne pas le refaire.

- Décrire la transformation en utilisant ses caractéristiques.

- Traiter tous les cas possibles peut servir à démontrer.

Activité 9

Objectif : Utiliser les transformations pour établir une preuve

But : Utiliser les propriétés des transformations pour reconnaître une droite remarquable dans un triangle

Résultat attendu : Obtenir le tracé des droites remarquables dans un triangle en utilisant un gabarit du triangle et une règle non graduée

Moyen d'y arriver : Manipuler le gabarit pour obtenir l'image du triangle par différentes transformations, reconnaître des figures connues (parallélogramme, losange, cerf-volant), utiliser les propriétés des transformations et des figures planes pour justifier le tracé, communiquer un programme de construction

Étape 1

Tracé du triangle

Les élèves sont par groupes de 4, chaque élève a un gabarit de triangle en carton différent avec une couleur sur chaque face et les sommets ABC nommés des deux côtés (on pourra fournir des gabarits plastifiés (voir annexe 6) ou utiliser des emballages cartons pour avoir un côté imprimé).

Consigne : A partir de ce gabarit de triangle, laissez la trace de chaque sommet sur votre feuille de papier et utilisez la règle non graduée pour tracer le triangle, nommez les sommets ABC comme sur votre gabarit.

Ici le gabarit permet de prendre à sa charge les propriétés d'isométrie. Les deux faces permettent de visualiser les transformations qui conservent l'orientation et de différencier le demi-tour (même face visible et déplacement qui reste dans le plan de la feuille) de la symétrie axiale (changement de face et déplacement qui sort du plan de la feuille).

En proposant des gabarits différents à chaque élève du groupe, on contraint chacun à manipuler son propre gabarit et à généraliser la procédure indépendamment des propriétés éventuelles du triangle et donc de généraliser les propriétés de chacune des droites particulières..

Le fait d'utiliser la trace des sommets amène à penser la figure dans ses différentes dimensions (2 avec le gabarit, 0 avec la trace des sommets, 1 avec le tracé à la règle non graduée).

Tracé des droites remarquables et rédaction du programme de construction

Deux groupes ont la même consigne.

Consigne H : Trouvez un moyen de tracer la hauteur issue de A en n'utilisant que le gabarit et la règle non graduée. Écrivez un programme de construction pour permettre à un camarade de faire ce tracé. Ce camarade devra prouver que votre programme permet bien de tracer la hauteur issue de A.

Consigne M : Trouvez un moyen de tracer la médiane issue de A en n'utilisant que le gabarit et la règle non graduée. Écrivez un programme de construction pour permettre à un camarade de faire ce tracé. Ce camarade devra prouver que votre programme permet bien de tracer la médiane issue de A.

Consigne P : Trouvez un moyen de tracer la médiatrice issue de A en n'utilisant que le gabarit et la règle non graduée. Écrivez un programme de construction pour permettre à un camarade de faire ce tracé. Ce camarade devra prouver que votre programme permet bien de tracer la médiatrice du côté [BC].

On laissera les élèves utiliser leur propre vocabulaire.

Analyse a priori des productions des élèves, étayages et feedbacks :

Production des élèves	Analyse	Feedback
Le mot « retourné » peut être utilisé pour désigner aussi bien une symétrie axiale qu'une symétrie centrale.	Le mot « symétrie » utilisé dès la maternelle pour désigner la symétrie axiale désigne toutes les transformations pour certains élèves et le mot « retourné » peut être utilisé dans le langage courant pour désigner la manipulation dans différents cas.	Pour être certain d'être bien compris on a intérêt à utiliser un vocabulaire plus précis : ● Symétrie axiale (ou réflexion) ● Symétrie centrale (ou demi-tour)
Les élèves peuvent nommer A le transformé de A.	Le gabarit transporte le point A il faut différencier le point sur le gabarit de sa trace après transformation.	On mettra en évidence qu'on ne peut pas avoir une figure avec deux sommets ayant le même nom. On peut convenir de nommer A' ou A_1
Les élèves peuvent trouver un enchaînement de différentes transformations	Les élèves vont effectuer différentes manipulations sans avoir de mémoire des étapes, ou avoir du mal à inhiber une première transformation.	On pourra demander à trouver une solution faisant intervenir une seule transformation.
Les élèves peuvent avoir trouvé par manipulation et avoir des difficultés à écrire le programme.	Cette difficulté peut être liée à un manque de vocabulaire, à l'oubli des étapes, à la nécessité d'utiliser des points ou des droites qui ne sont pas tracées.	On peut fournir du vocabulaire, redire qu'on peut tracer des points et des tracés intermédiaires.

Le but étant que les groupes récepteurs n'aient pas à valider le programme mais à donner la preuve qu'il s'agit bien de la droite remarquable attendue, on s'assurera que les programmes sont valides avant de communiquer le programme au groupe récepteur. Plusieurs scénarios sont possibles :

- valider au fil de l'eau pendant que les élèves travaillent

- ramasser les programmes à la fin de la séance et redistribuer à la séance suivante

- ou procéder à une étape intermédiaire :

Les élèves échangent entre les deux groupes ayant travaillé sur la même droite remarquable pour valider le programme ou l'améliorer si nécessaire à partir d'une grille d'évaluation :

	Oui	Non
Je comprends les instructions.		
J'arrive à exécuter le programme.		
Je vérifie avec les instruments que j'obtiens bien la droite demandée. J'ai bien la …………………………….. car j'ai vérifié que : - -		

Étape 2

Faire tester le programme par un autre groupe qui devra expliquer pourquoi on est bien certain d'avoir obtenu la droite remarquable demandée.

Consigne :

- Faites le programme

- Quelle est la droite remarquable obtenue ?

- Utilisez les propriétés des transformations pour justifier votre réponse.

- Rédigez un programme de construction sans parler du gabarit.

Mise en commun :

Récupérer les productions des groupes et fabriquer une figuration en gardant trois produits que les élèves vont devoir critiquer. La mise en commun permet d'obtenir un répertoire de propriétés.

Pause structurante : Listez les propriétés que vous avez utilisées.

Pour prouver la nature d'une figure, je peux utiliser les propriétés suivantes :

- La symétrie axiale transforme un triangle en un triangle semblable.
- La symétrie centrale transforme un triangle en un triangle semblable.
- La symétrie axiale, le demi-tour, la rotation et la translation transforme une figure en une figure semblable (les deux figures sont superposables).
- Un quadrilatère ayant ses côtés opposés égaux deux à deux est un parallélogramme.
- Un quadrilatère ayant ses angles opposés égaux deux à deux est un parallélogramme.
- La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.
- ….

Analyse de productions d'élèves de 4^{e} :

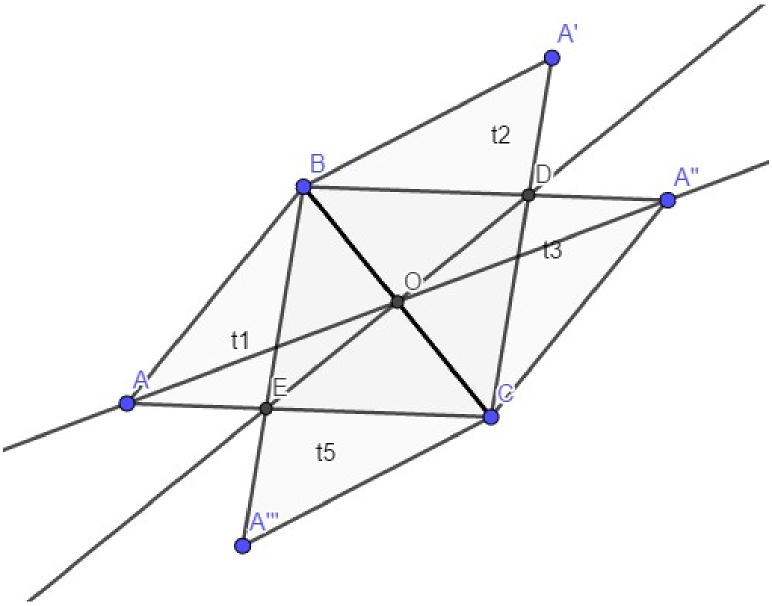
- On retrouve dans les programmes différents registres. L'utilisation du gabarit, peu utilisé à ce niveau de la scolarité, amène à des consignes portant sur l'instrument mais souvent associé à un vocabulaire géométrique.

Exemple 1 :

1) Tracer le triangle ABC.
2) Tracer la symétrie axiale du triangle ABS d'axe [BC].
3) Replacer le gabarit de sorte à ce que le côté [BC] sur la feuille soit égal au côté [CB] du côté marron du carton.

4) Tracer le triangle de l'étape 3)
5) Faire effectuer au gabarit une symétrie axiale d'axe [BC].
6) Nommez les intersections entre les 2 triangles −> faire ça pour les deux côtés. Les nommes D et E.
7) Tracez la droite (DE).
8) Nommez l'intersection des segments [DE] et [BC] en O.
9) Tracez le segment [AO] : c'est la médiane.

Dans ce programme, certaines étapes sont formulées par rapport au gabarit et d'autres par rapport au triangle géométrique. La construction proposée ici est correcte même si elle est longue :



En fait les élèves utilisent le vocabulaire des transformations saut pour l'étape 3) où la transformation n'est pas identifiée, elle est caractérisée par le fait que le segment [BC] est invariant mais B est transformé en C et C en B. Ceci est symbolisé par l'ordre des points dans l'écriture du segment [BC] devient [CB]. Le changement d'orientation est signifié par le changement de couleur du gabarit.

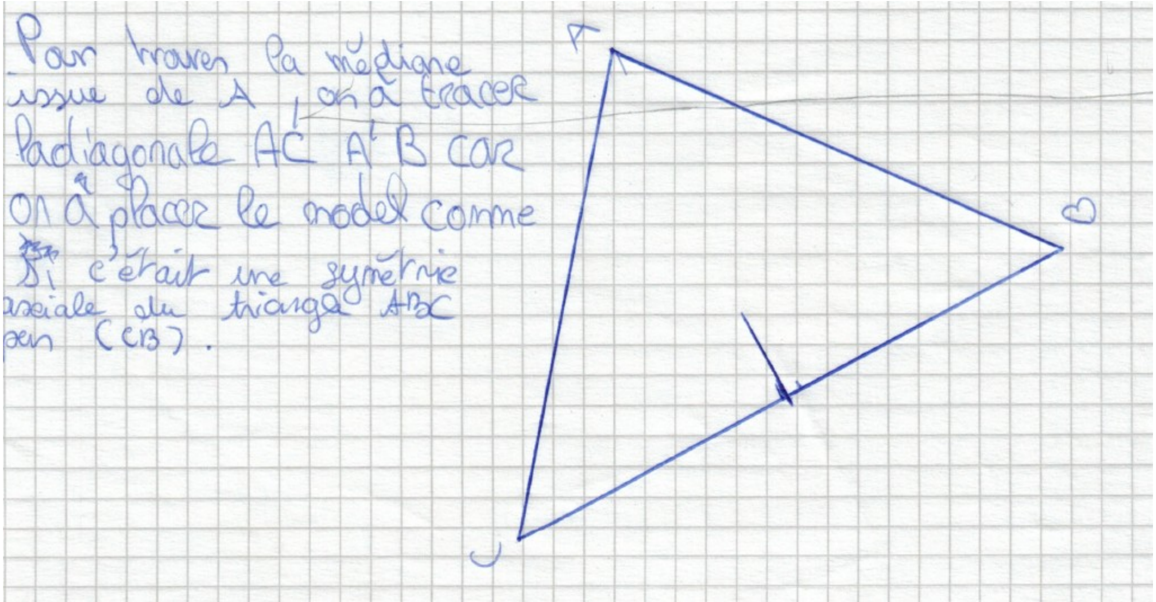
Cet écrit peut donc servir à mettre en évidence des nécessités :

- Si une transformation conserve les longueurs mais inverse l'orientation, il s'agit d'une symétrie axiale.
- Si un segment est invariant par une symétrie axiale, l'axe de la symétrie est la médiatrice de ce segment.

Par ailleurs la construction proposée permet d'obtenir toutes les droites remarquables attendues puisque (AA') est la hauteur issue de A, (AA'') est la médiane issue de A et (DE) est la médiatrice de [BC].

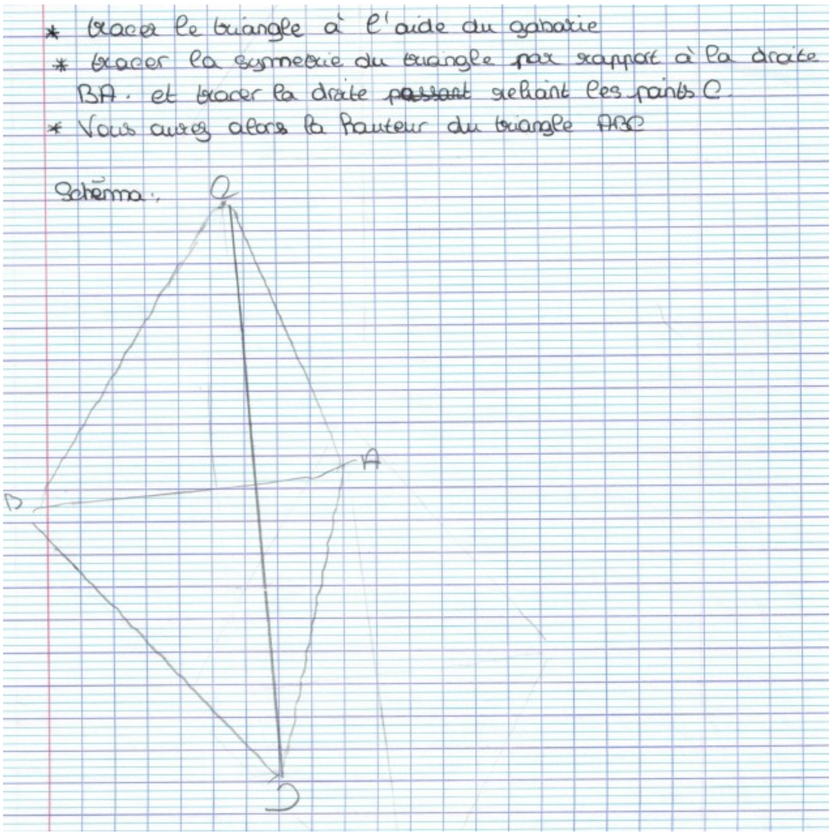
Exemple 2 :

Dans ce deuxième exemple, la figure est tracée à côté du programme. Les élèves n'ont pas gardé de trace de la transformation effectuée. Le gabarit manipulé les a amenés à visualiser la figure temporaire du parallélogramme ACA'B. Il serait intéressant de demander au groupe récepteur de refaire le tracé avec des instruments et sans gabarit afin de trouver la nature de ACA'B. Une fois la procédure explicitée, on peut demander si cette procédure permet de tracer les trois médianes du triangle.



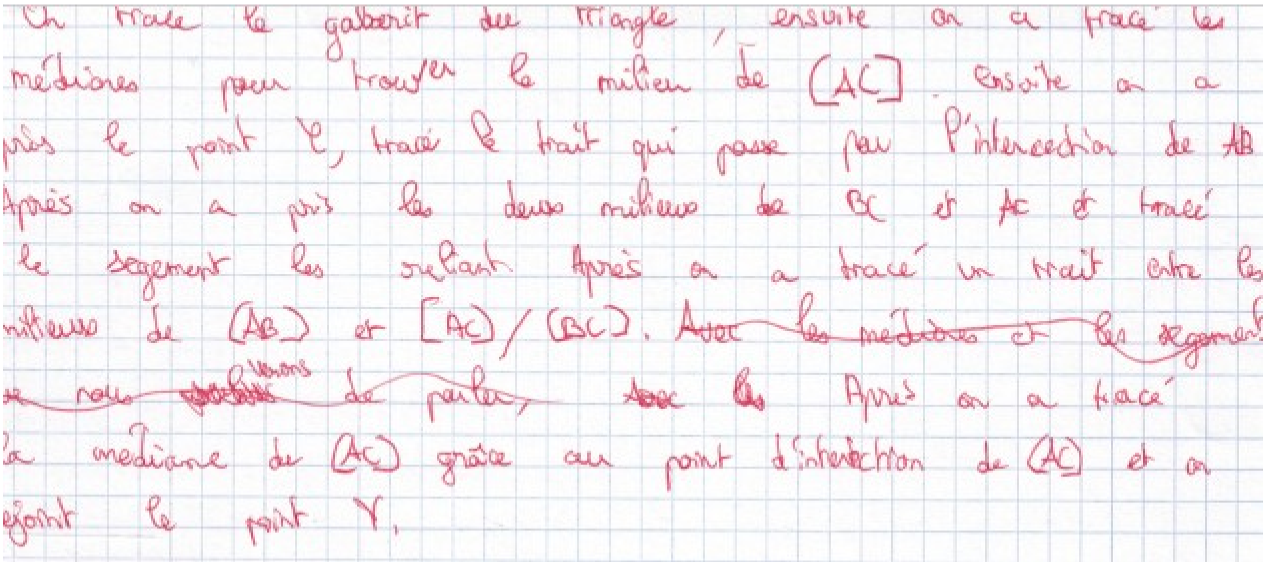
Exemple 3 :

Dans cette production, le tracé a été fait en suivant les contours du gabarit donnant une impression de tracé à main levé. Il serait intéressant de demander de coder la figure pour aller vers la preuve.



Exemple 4 :

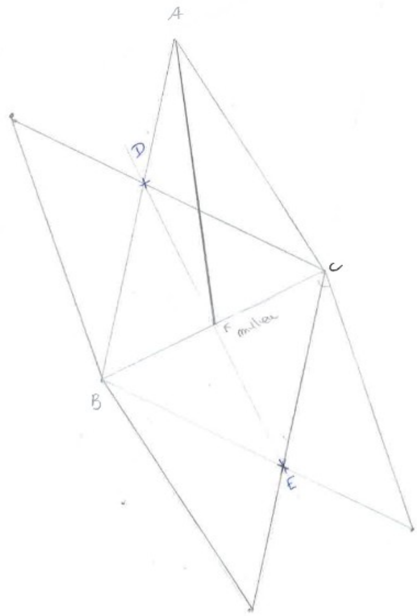
Certains programmes ne permettent pas le tracé. Il est important de collecter la figure avec le programme car sinon il est bien difficile de comprendre ce que les élèves ont voulu exprimer. Cet exemple atteste d'une difficulté à remettre les étapes dans l'ordre (les médianes sont tracées pour trouver le milieu du côté dès la première étape sans savoir comment) et à mobiliser le vocabulaire (« le trait qui passe par l'intersection de AB »). Au niveau de la langue, un travail peut être mené pour identifier des formes qui doivent être automatisées (par exemple le mot « intersection » doit être suivi de deux informations).

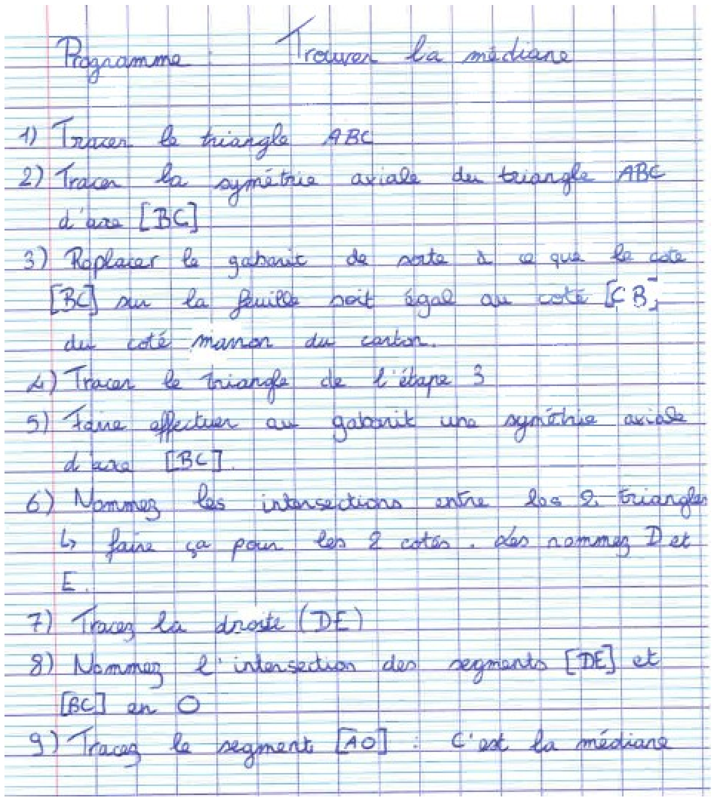


On trace le gabarit du triangle, ensuite on a tracé les médianes pour trouver le milieu de [AC]. Ensuite on a pris le point C, tracé le trait qui passe par l'intersection de AB Après on a pris les deux milieux de BC et AC et tracé le segment les reliant Après on a tracé un trait entre les milieux de (AB) et [AC]/(BC). ~~Avec les médianes et les segments que nous venons de parler,~~ ~~Avec les~~ Après on a tracé la médiane de (AC) grâce au point d'intersection de (AC) et on rejoint le point Y.

Prolongement possible :

- A partir des productions des élèves de la classe, il peut être pertinent de penser une figuration mettant en tension ou au contraire reliant différents écrits. Ici il peut être demandé d'expliquer pourquoi l'exemple 1 (programme et tracé) suffit à donner les trois réponses attendues en donnant les deux autres exemples qui permettent d'isoler certains éléments de l'exemple 1. Ce travail peut amener les élèves à mieux voir des sur-figures ou des sous-figures dans une figure complexe.





Programme : Trouver la médiane

1) Tracer le triangle ABC
2) Tracer la symétrie axiale du triangle ABC d'axe [BC]
3) Replacer le gabarit de sorte à ce que le côté [BC] sur la feuille soit égal au côté [CB] du côté marron du carton.
4) Tracer le triangle de l'étape 3
5) Faire effectuer au gabarit une symétrie axiale d'axe [BC].
6) Nommez les intersections entre les 2 triangles
↳ faire ça pour les 2 côtés. Les nommez D et E.
7) Tracez la droite (DE)
8) Nommez l'intersection des segments [DE] et [BC] en O
9) Tracez le segment [AO] : c'est la médiane

- Les grilles de validation permettent de lire les nécessités identifiées par les élèves. On peut remarquer que beaucoup d'élève sont encore au stade de la géométrie instrumentée, le contexte induit peut-être ce retour à la perception alors même que l'imprécision des tracés devrait amener à raisonner sur les objets géométriques. Il semble bien que les concepts soient ici outils, il s'agit de les amener à être des objets d'étude.

Par ailleurs les élèves oublient souvent de donner les deux caractéristiques attendues (par exemple dans l'exemple qui suit, il faut dire que la droite passe par A et qu'elle est perpendiculaire à [BC]).

	Oui	Non
Je comprends les instructions.	X	
J'arrive à exécuter le programme.	X	
Je vérifie avec les instruments que j'obtiens bien la droite demandée. J'ai bien la …hauteur…issue de…A… car j'ai vérifié que : - l'angle était droit -		

L'évaluation suivante peut servir de base à une nouvelle activité. La consigne pouvant être d'expliquer pourquoi ce qui est écrit ne peut pas être vrai. Il s'agit alors de penser la figure à partir des indices du textes pour pointer ce qui manque, est implicite, pris en charge par le gabarit.

	Oui	Non
Je comprends les instructions.	X	
J'arrive à exécuter le programme.	X	
Je vérifie avec les instruments que j'obtiens bien la droite demandée. J'ai bien la médiane issue de C… car j'ai vérifié que : -[C'D] = [DC] -[AB] est perpendiculaire à [C'C]		

Annexe 1

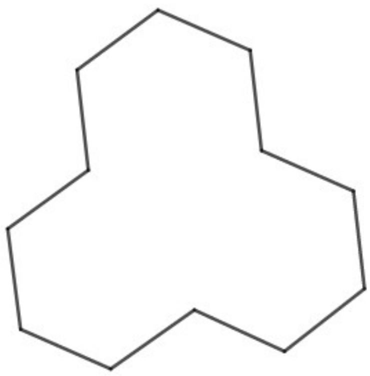
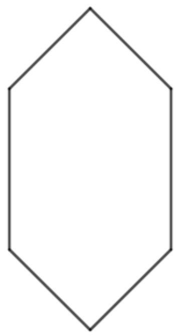
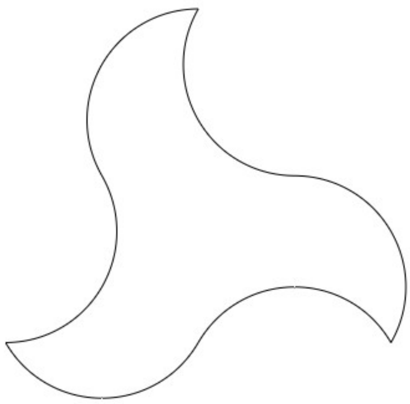
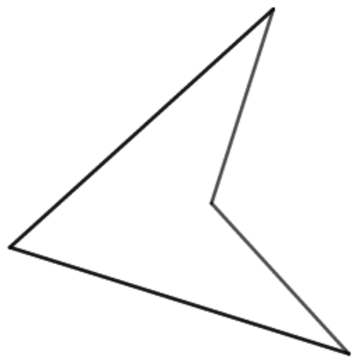
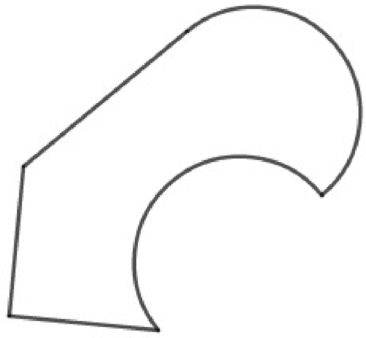
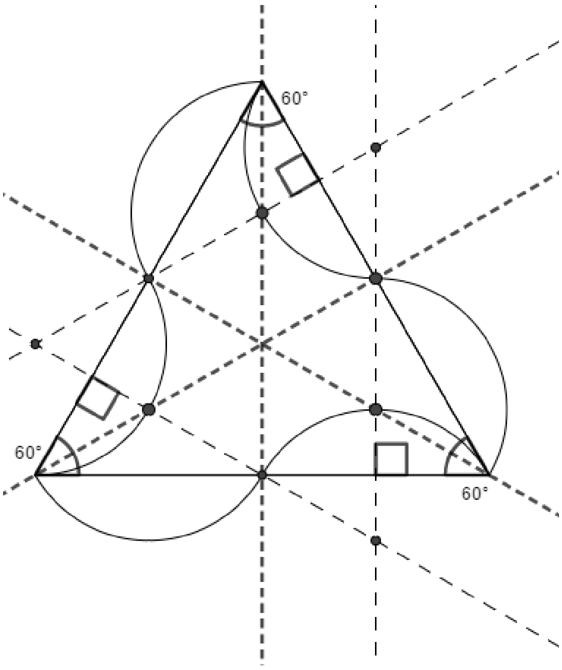
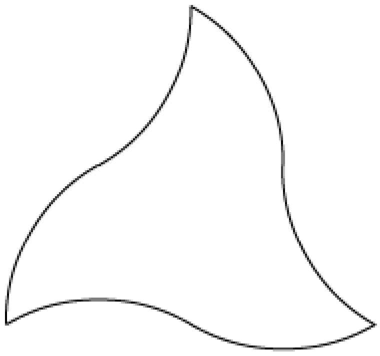
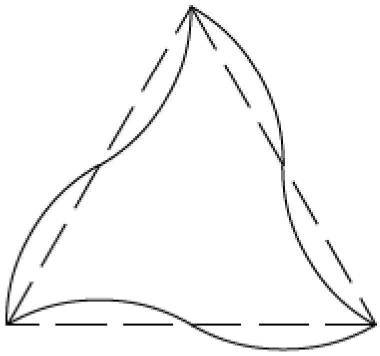
Figure 1 	Figure 2 
Figure 3 	Figure 4 

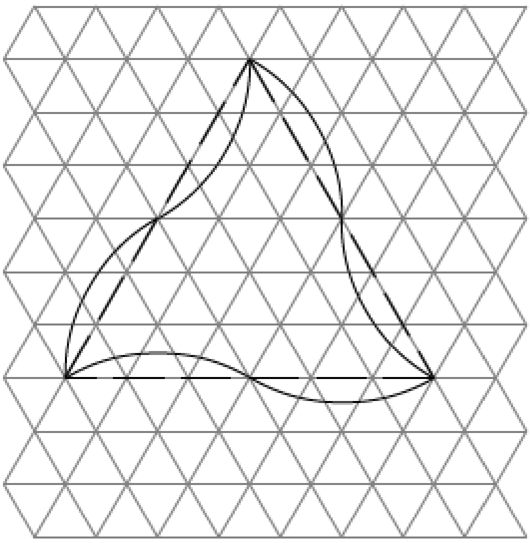
Figure 5

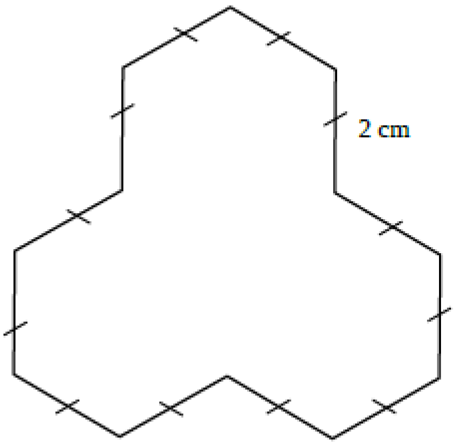


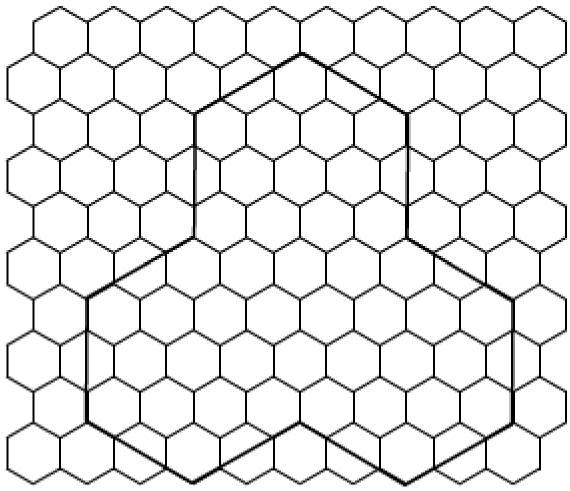

60°
60°
60°

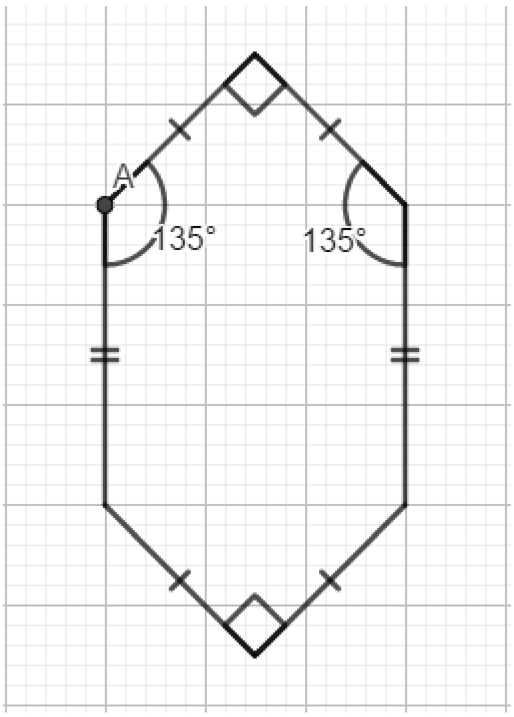


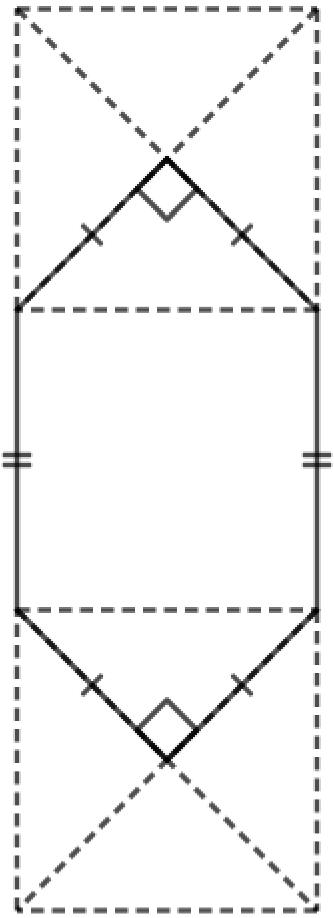


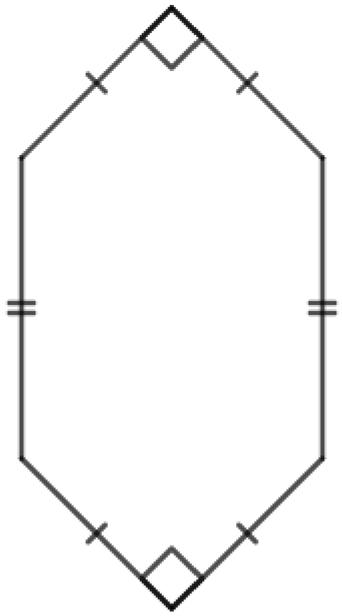


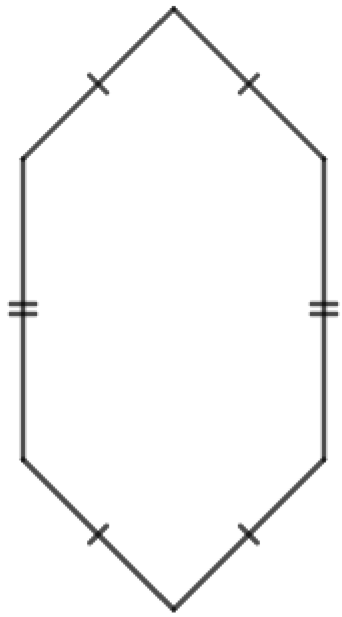

2 cm

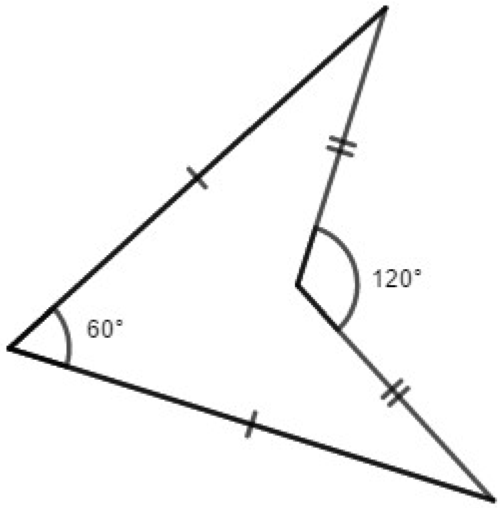


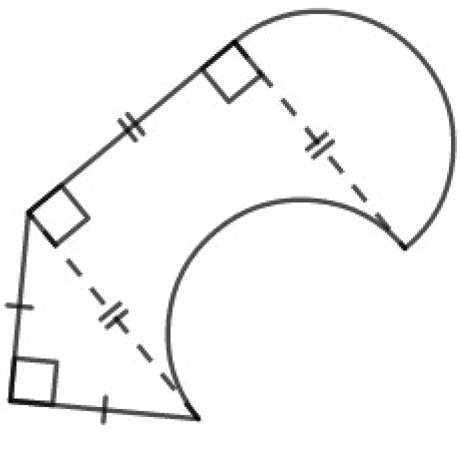

A
135°
135°

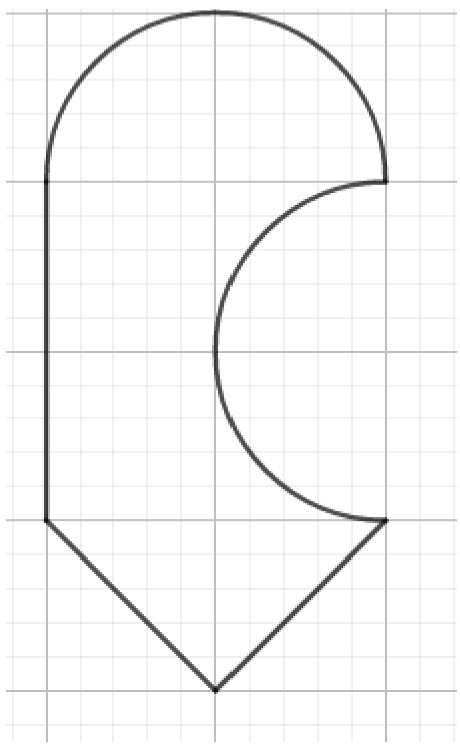




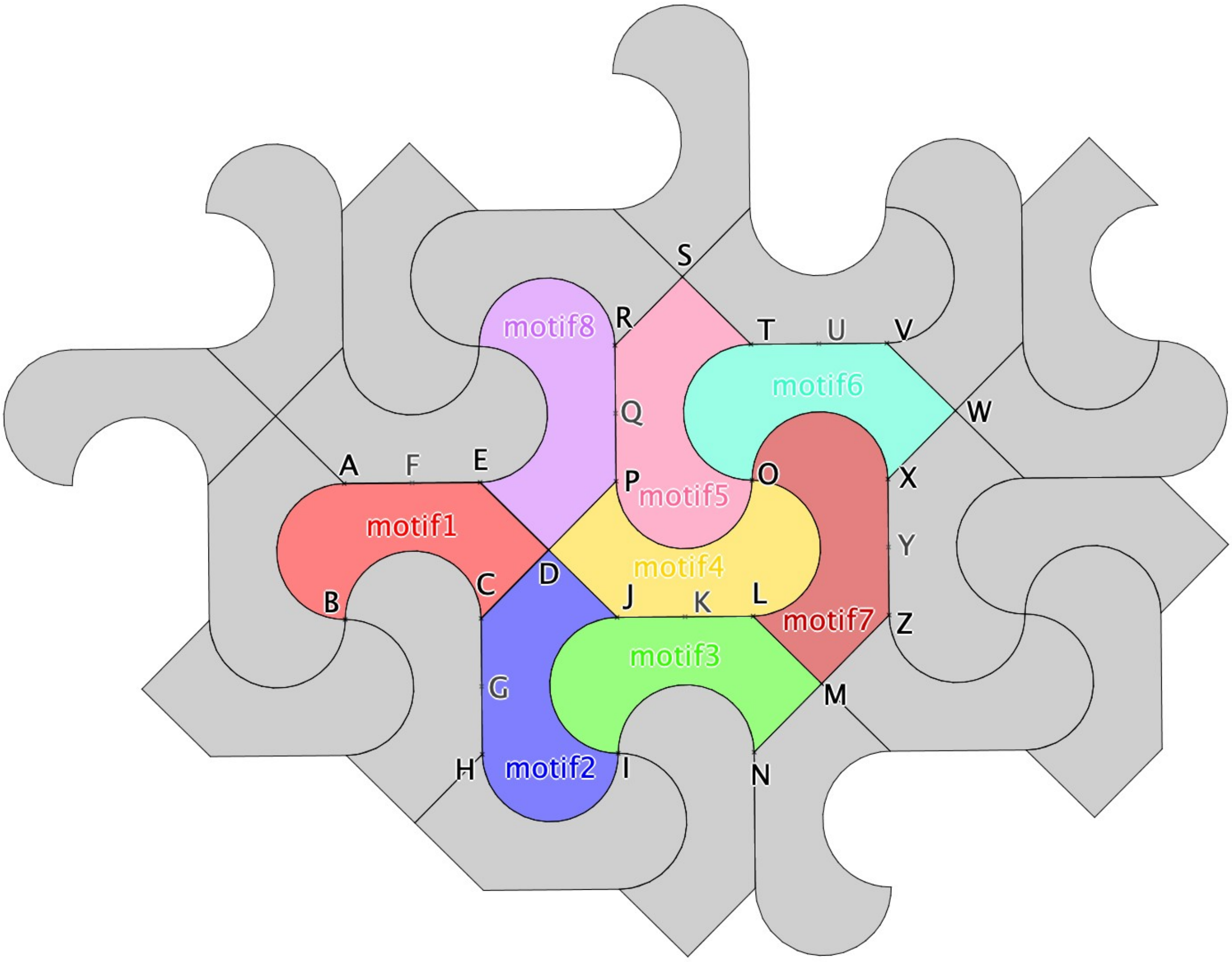



120°
60°

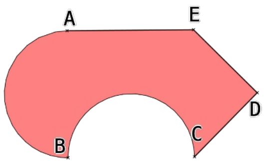




Annexe 2


S
R
T
U
V
motif8
motif6
Q
W
A
F
E
P
O
X
motif5
motif1
motif4
Y
C
D
B
J
K
L
motif7
Z
motif3
G
M
H
motif2
I
N

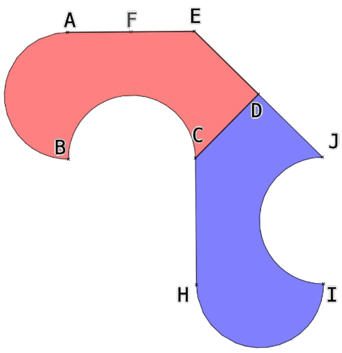
Exercice : programme pour paver



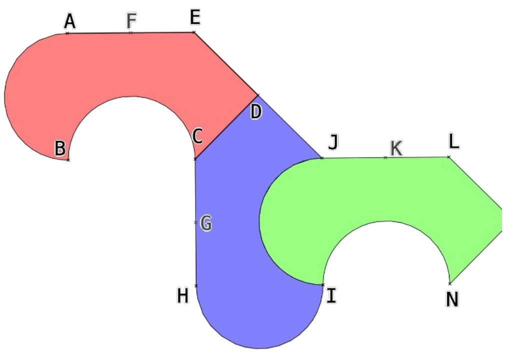
Pour réaliser le pavage précédent sur Geogebra, on a utilisé des transformations mathématiques : translation, symétrie axiale, symétrie centrale, rotation.

Chaque nouveau motif a été créé à partir du précédent.

Pour chaque étape écris le programme de construction qui sera testé par un autre élève.

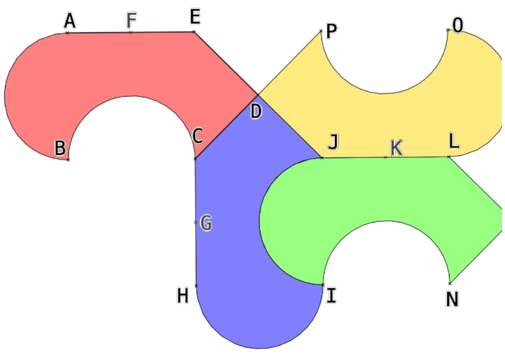


Étape 1 : création du motif 2 à partir du motif 1

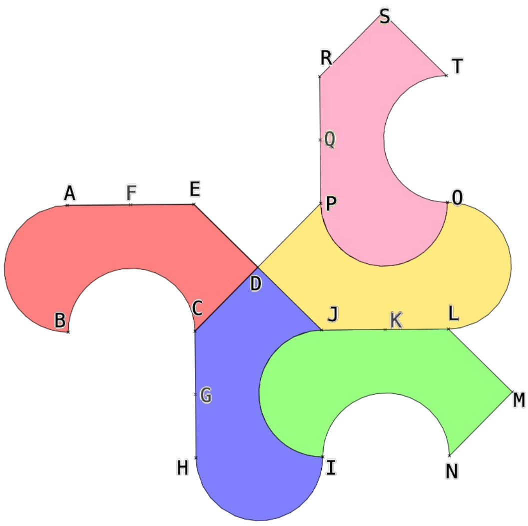


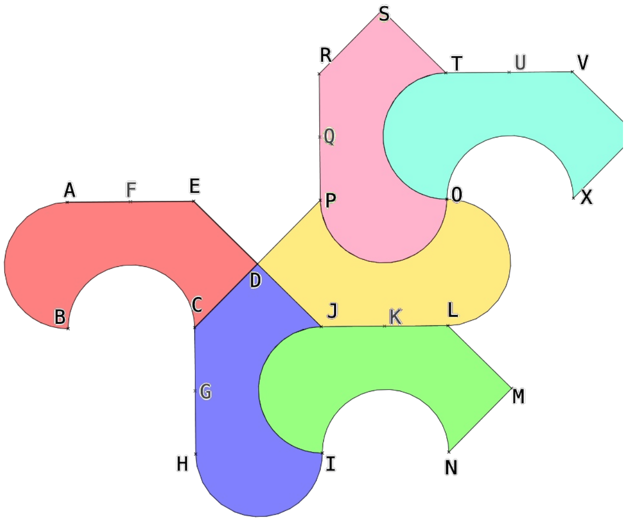
Étape 2 : création du motif 3 à partir du motif 2

Étape 3: création du motif 4 à partir du motif 3

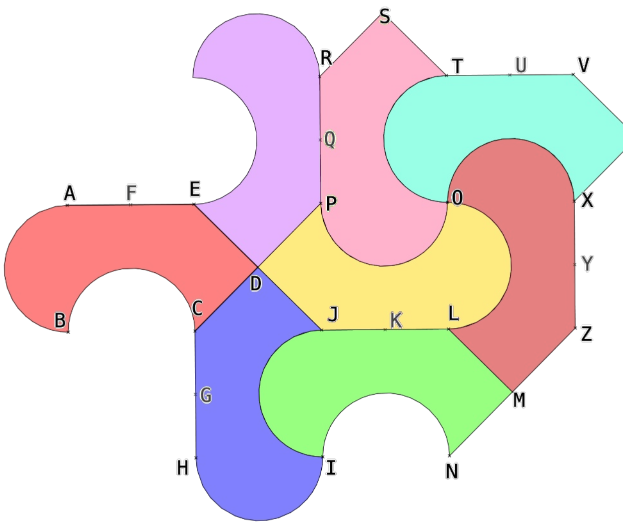


Étape 4: création du motif 5 à partir du motif 4





Étape 5: création du motif 6 à partir du motif 5



Étape 6 : création du motif 7 à partir du motif 6

Étape 7 : création du motif 8 à partir du motif 7

Échange ton programme avec un autre binôme et teste le programme sur GEOGEBRA en reprenant la figure du [Motif 5 : https://www.geogebra.org/m/pekdeguf](https://www.geogebra.org/m/pekdeguf)

Note pour chaque étape les éventuelles erreurs et la correction proposée pour que la construction soit correcte.

Annexe 3

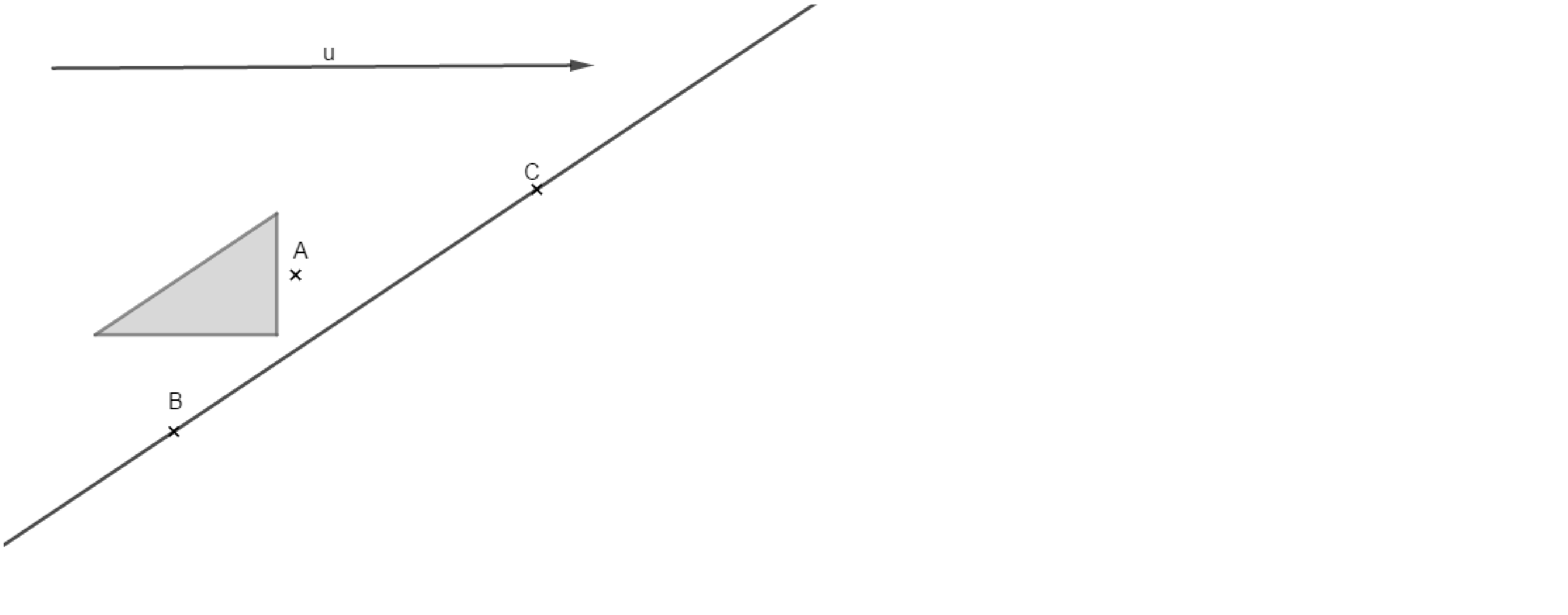
Frise 1

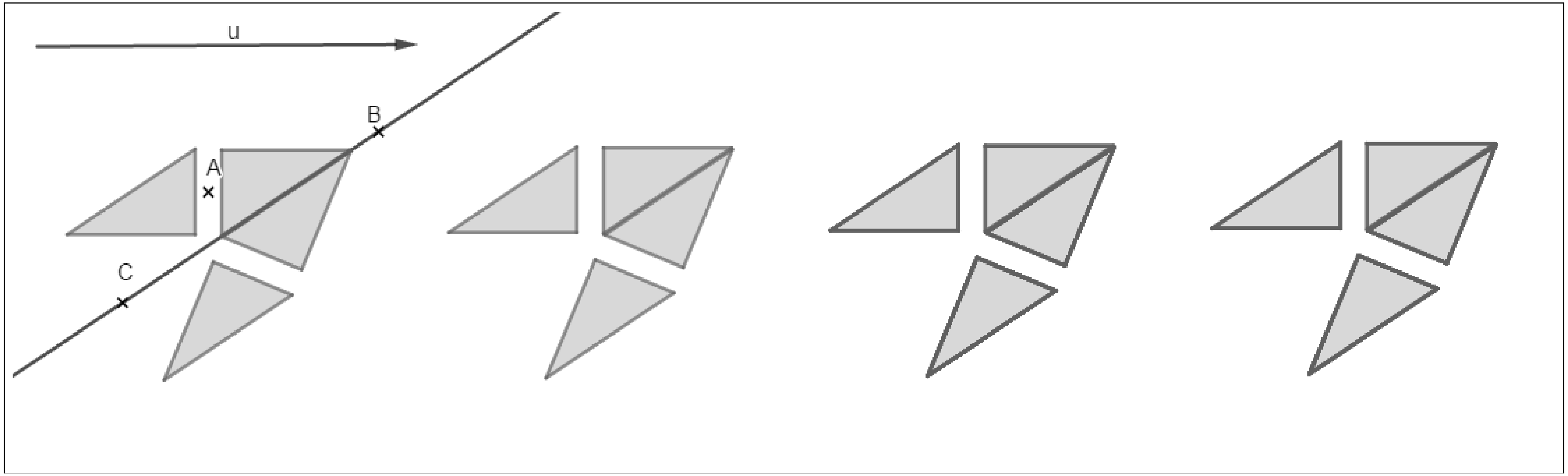
Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A.

Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC).

Vous obtenez ainsi le motif de base.

Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.




u
B
A
C

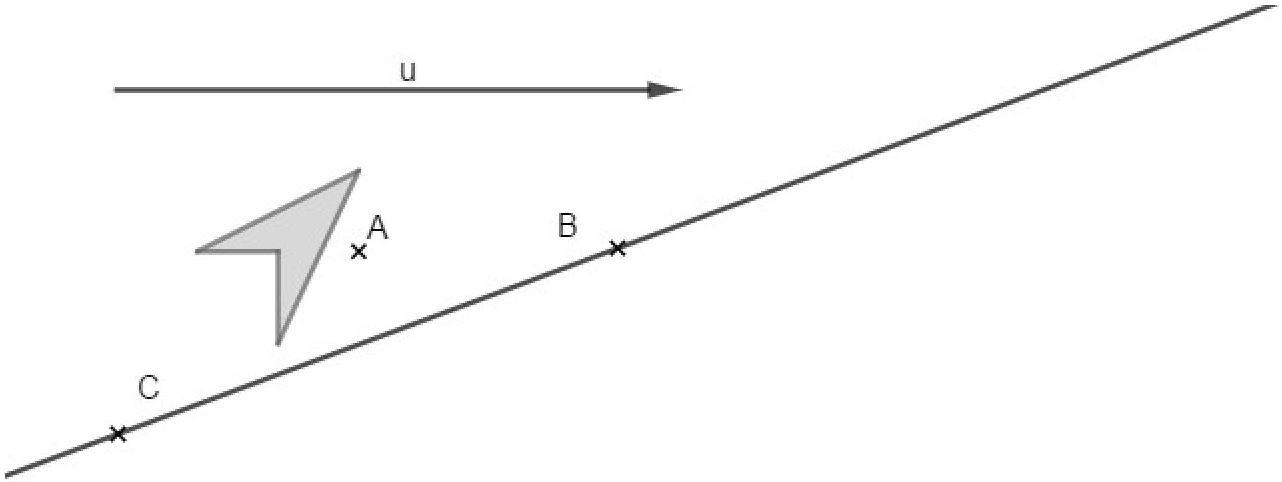
Frise 2

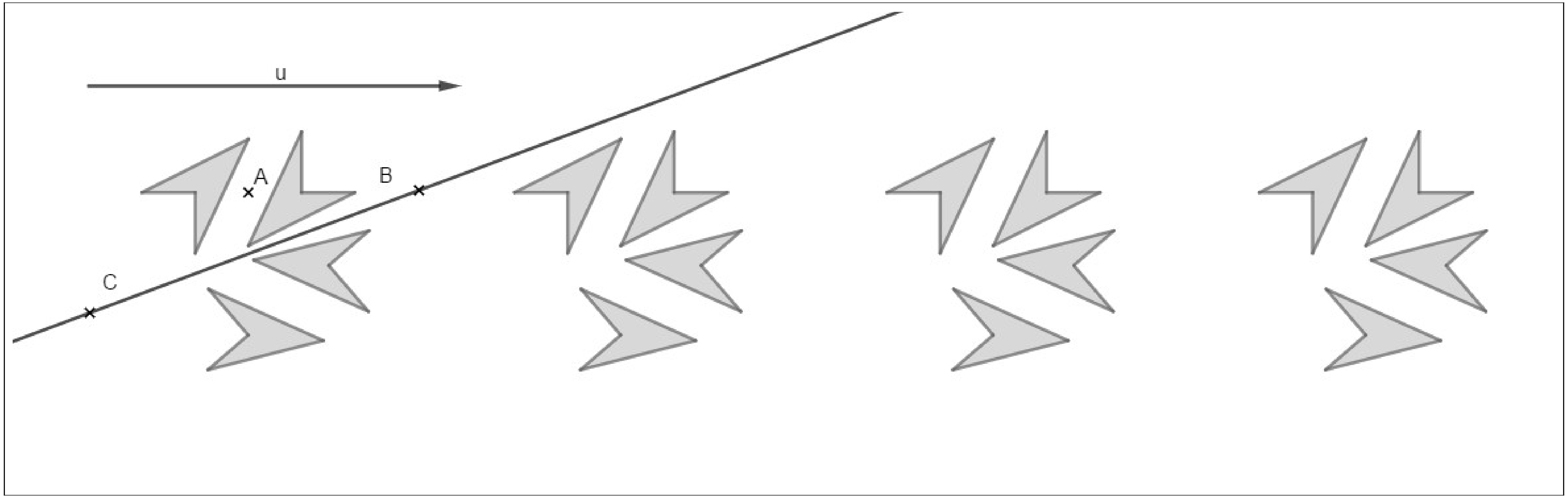
Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A.

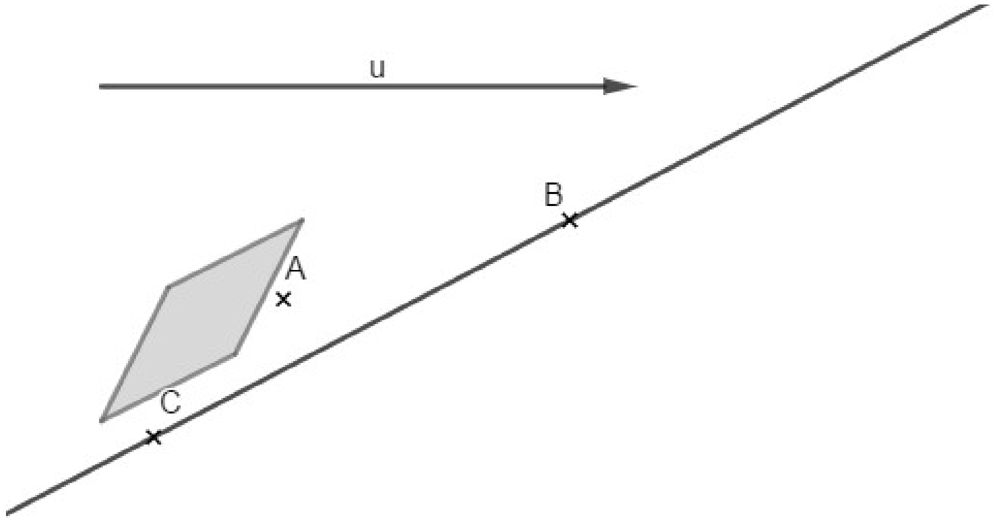
Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC).

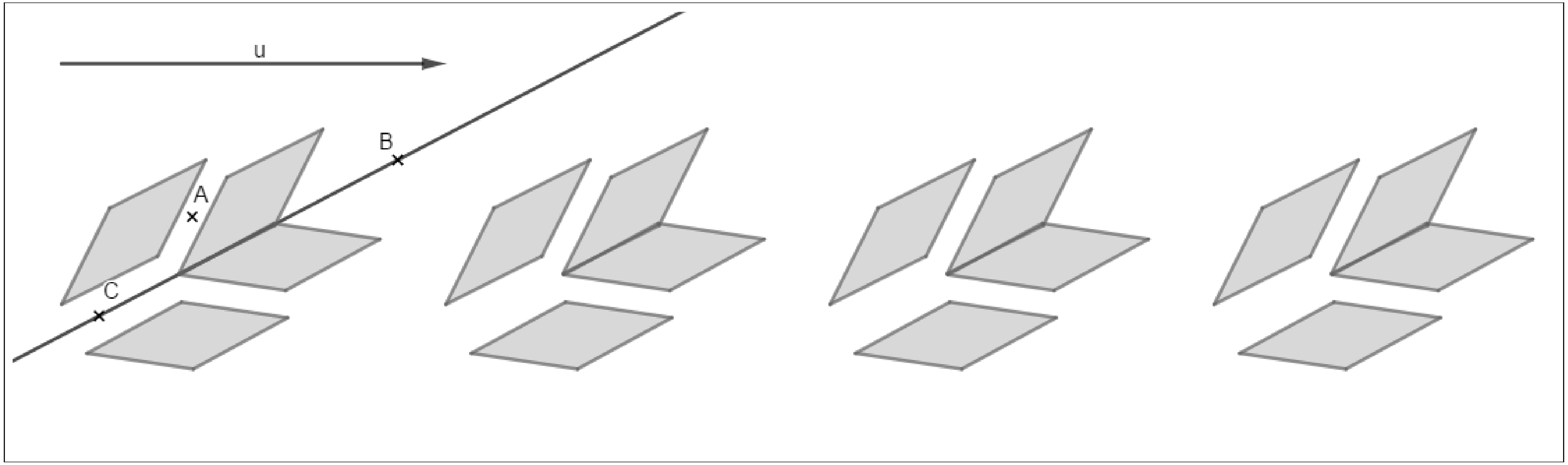
Vous obtenez ainsi le motif de base.

Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.




u
A
B
C

Frise 3 Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A. Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC). Vous obtenez ainsi le motif de base. Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.



u
B
A
C

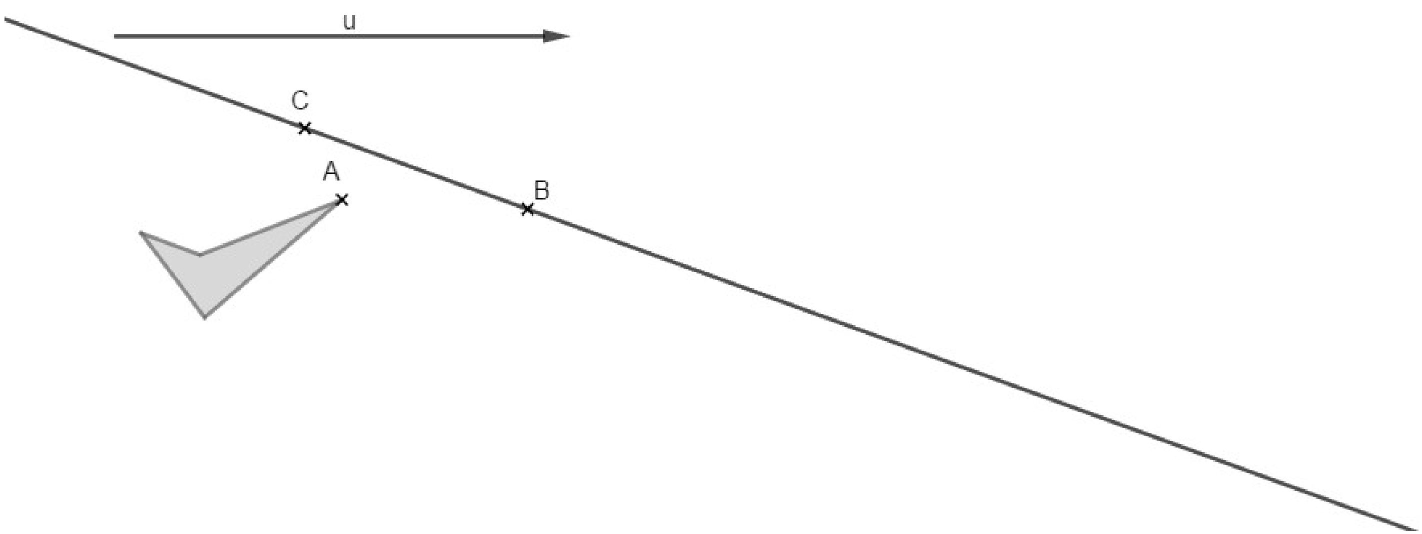
Frise 4

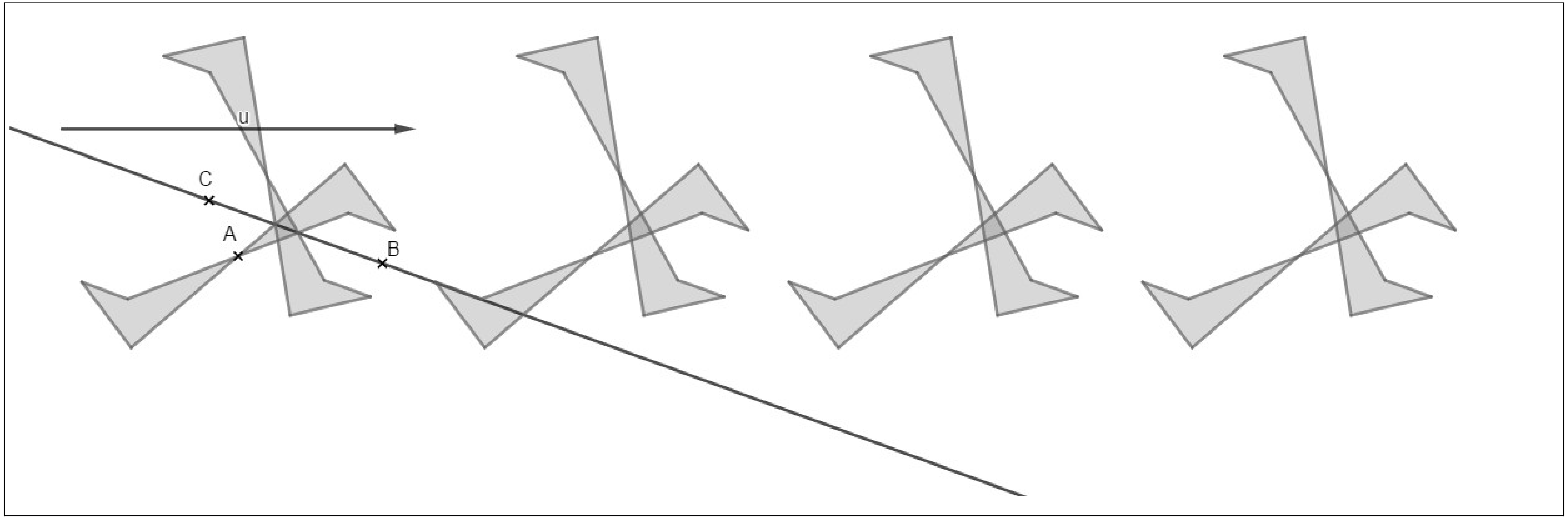
Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A.

Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d’axe (BC).

Vous obtenez ainsi le motif de base.

Construire une frise à l’aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.




u
C
A
B

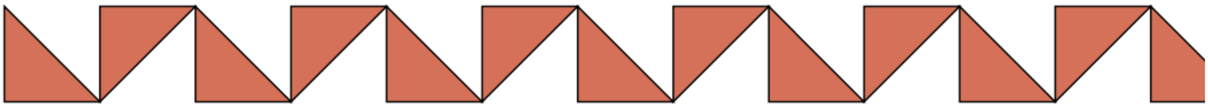
Annexe 4

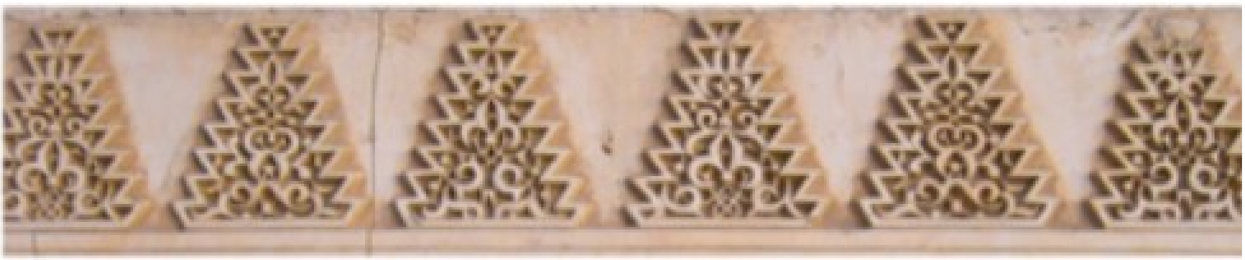
Exercice : Les frises (1)

En observant les extraits ci-dessous, propose une définition mathématiques d'une frise.

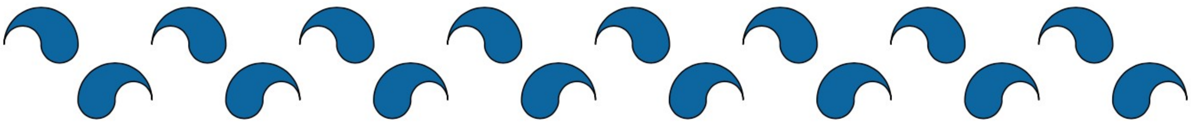
Extraits représentant une frise :

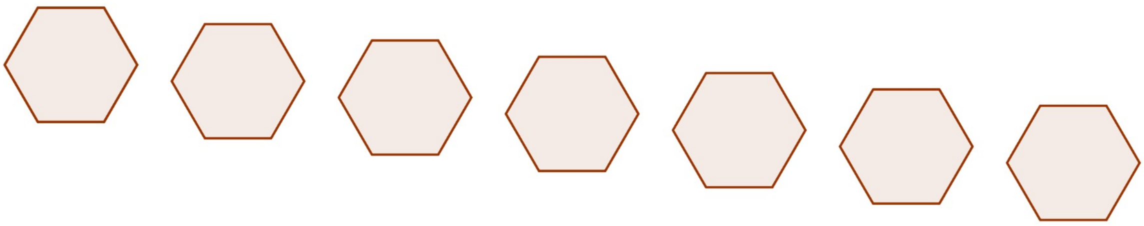
Alcazar de Séville



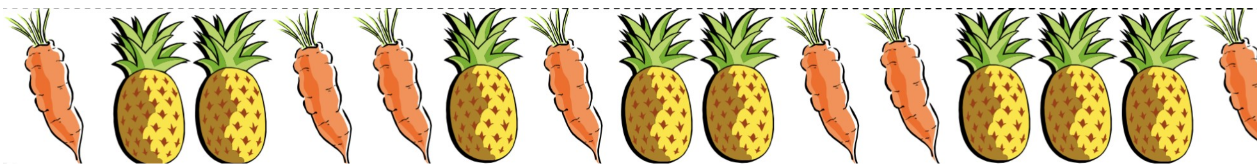


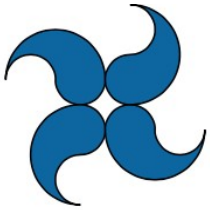
Alhambra de Grenade

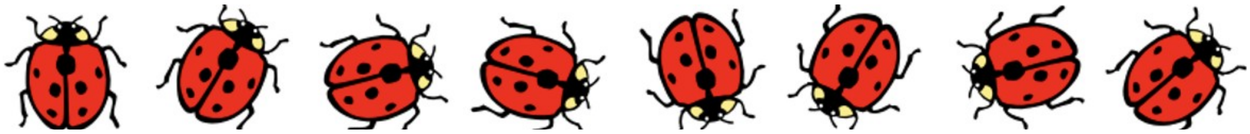




Extraits ne représentant pas une frise :





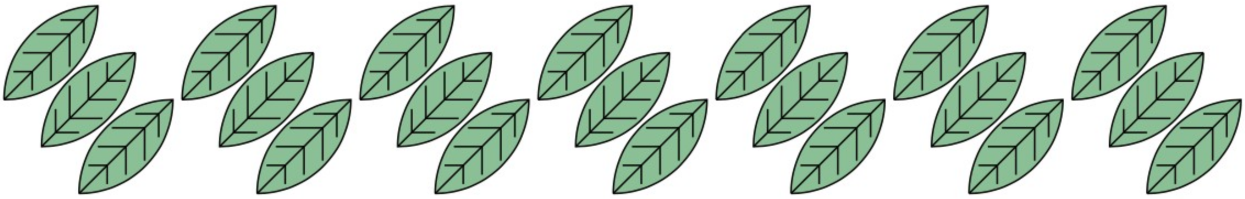


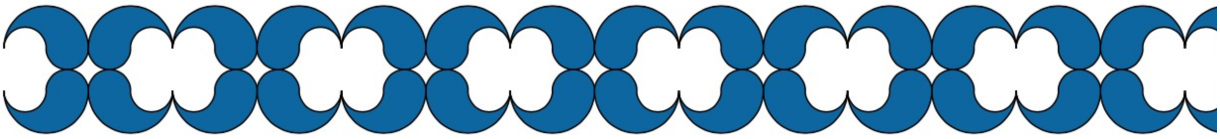
Exercice : Les frises (2)

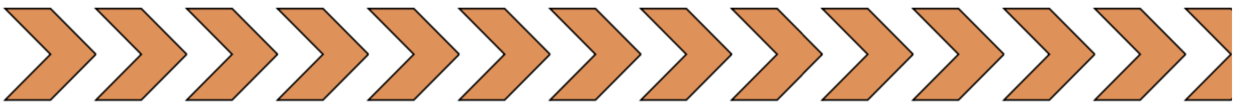
Pour chacune des frises suivantes une frise :

- encadre en bleu un exemple du plus petit motif de base.
- encadre en vert un exemple du motif élémentaire

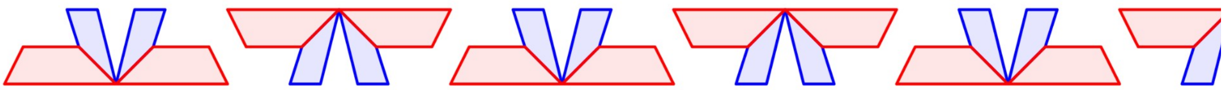
Boukhara





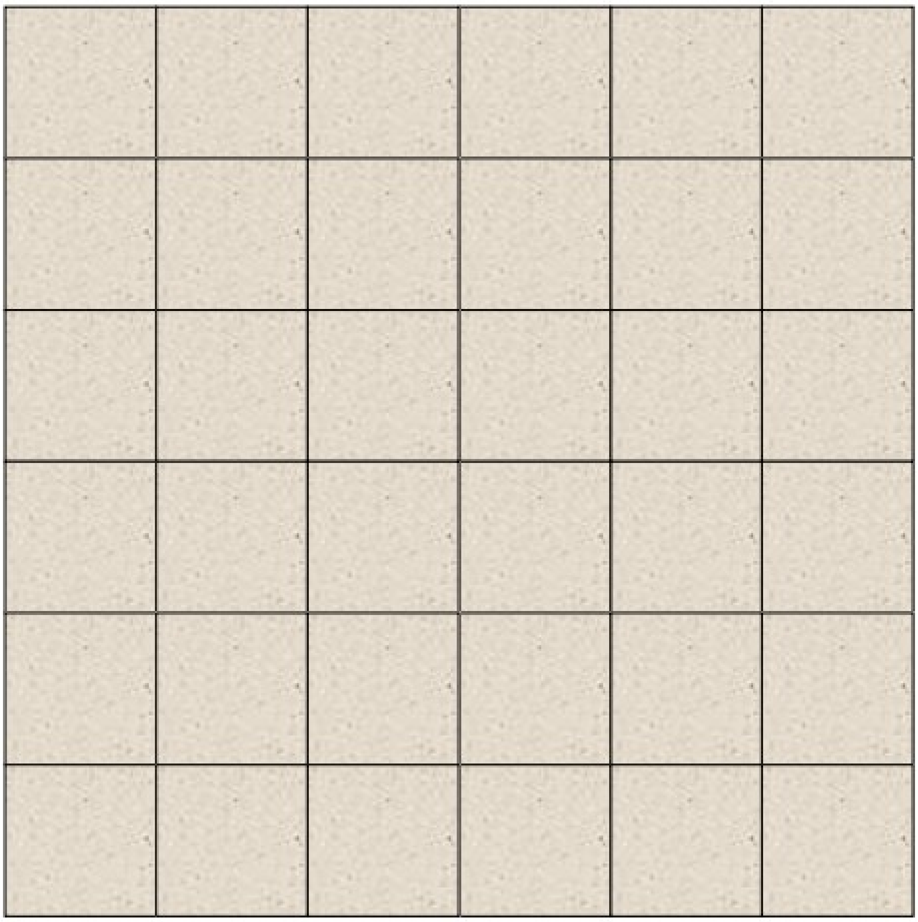


Mosaïque d'Ampurias

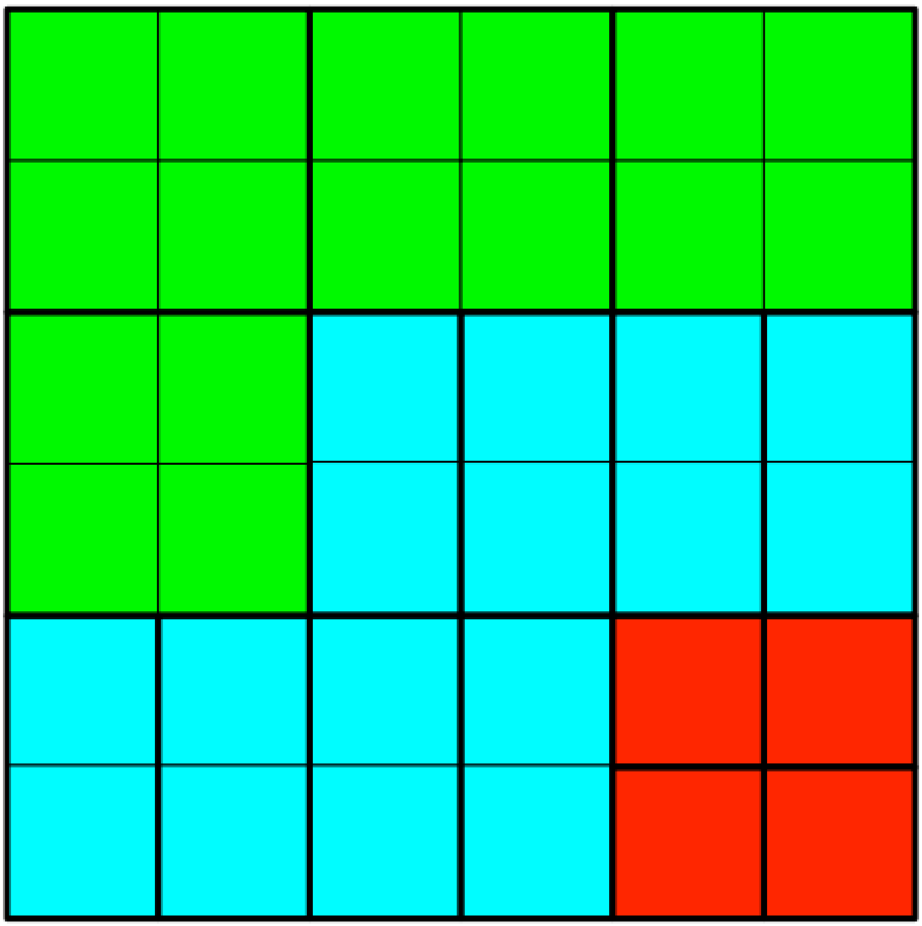


Annexe 5

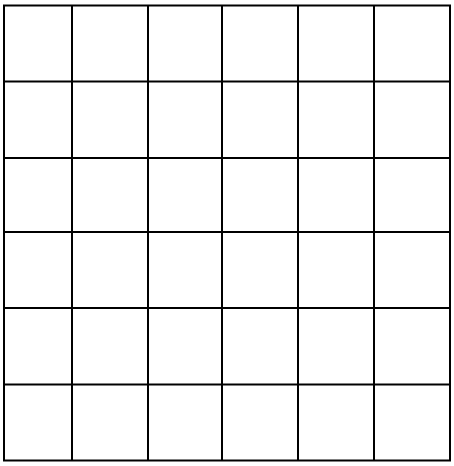
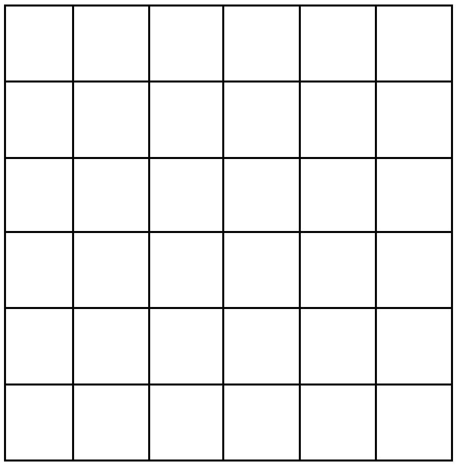
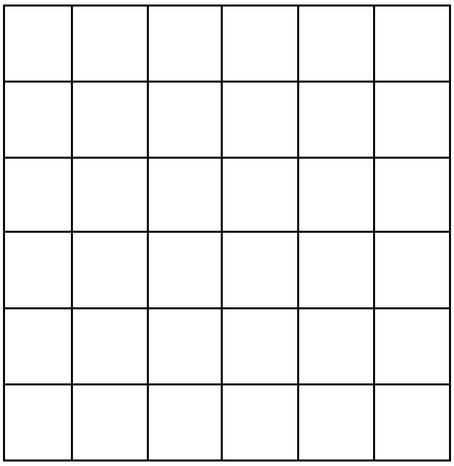
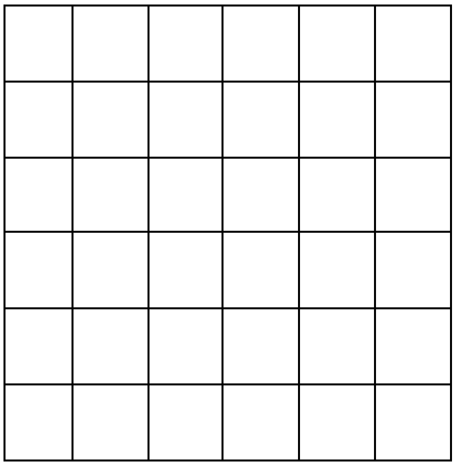
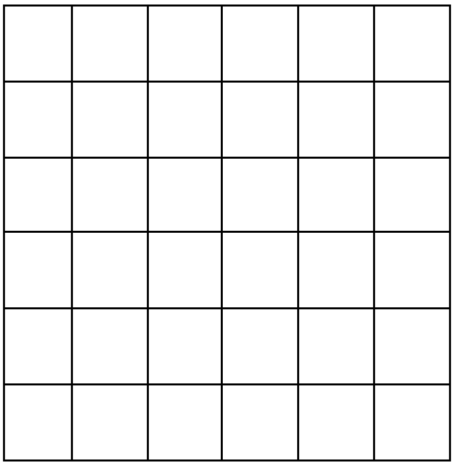
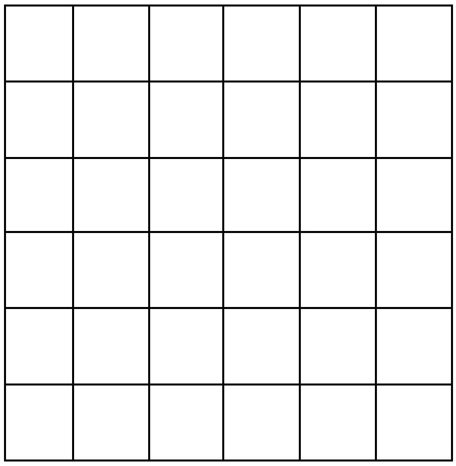
Plateau :



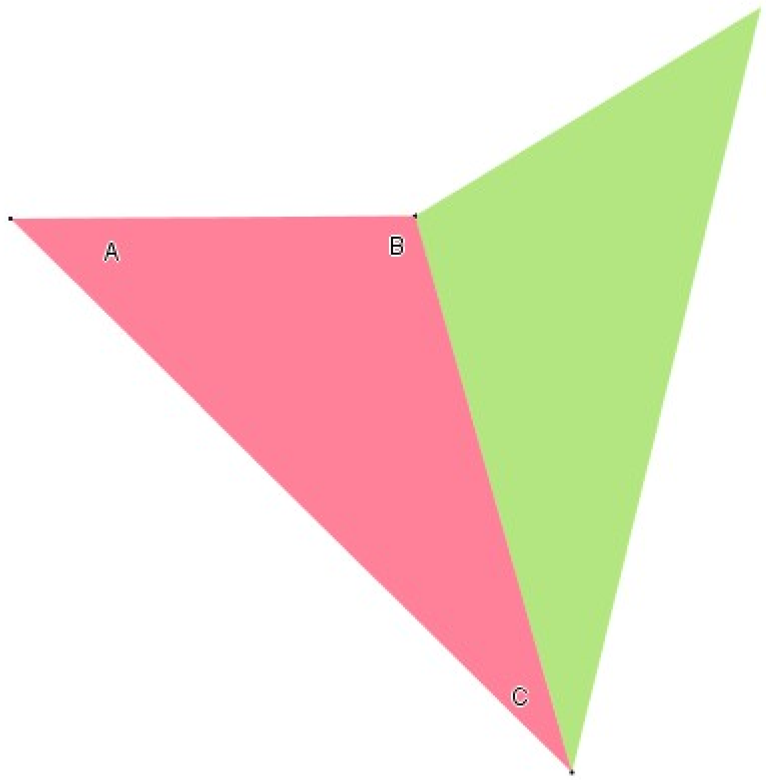
Pièces :

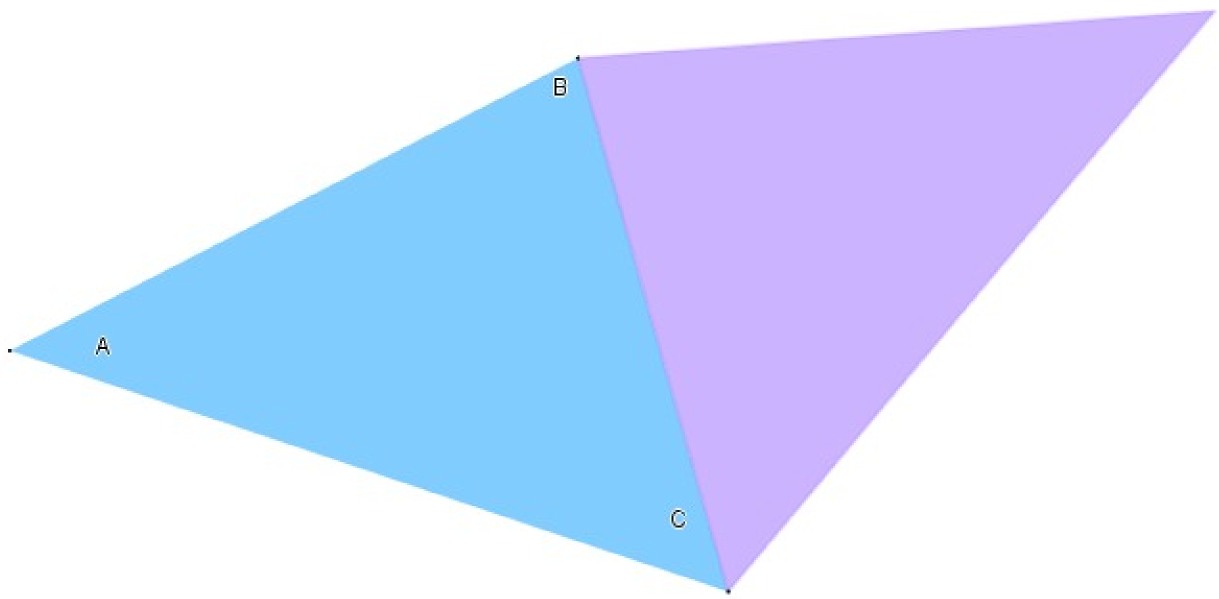


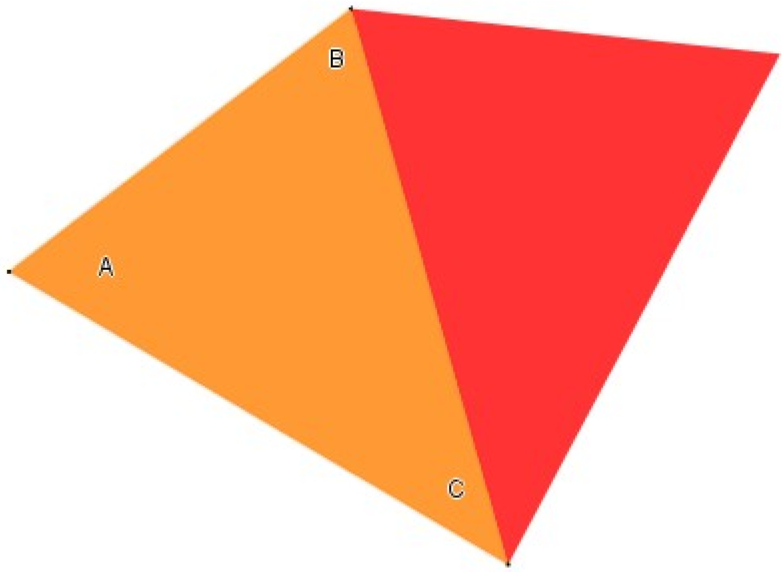
Fiche solutions élèves

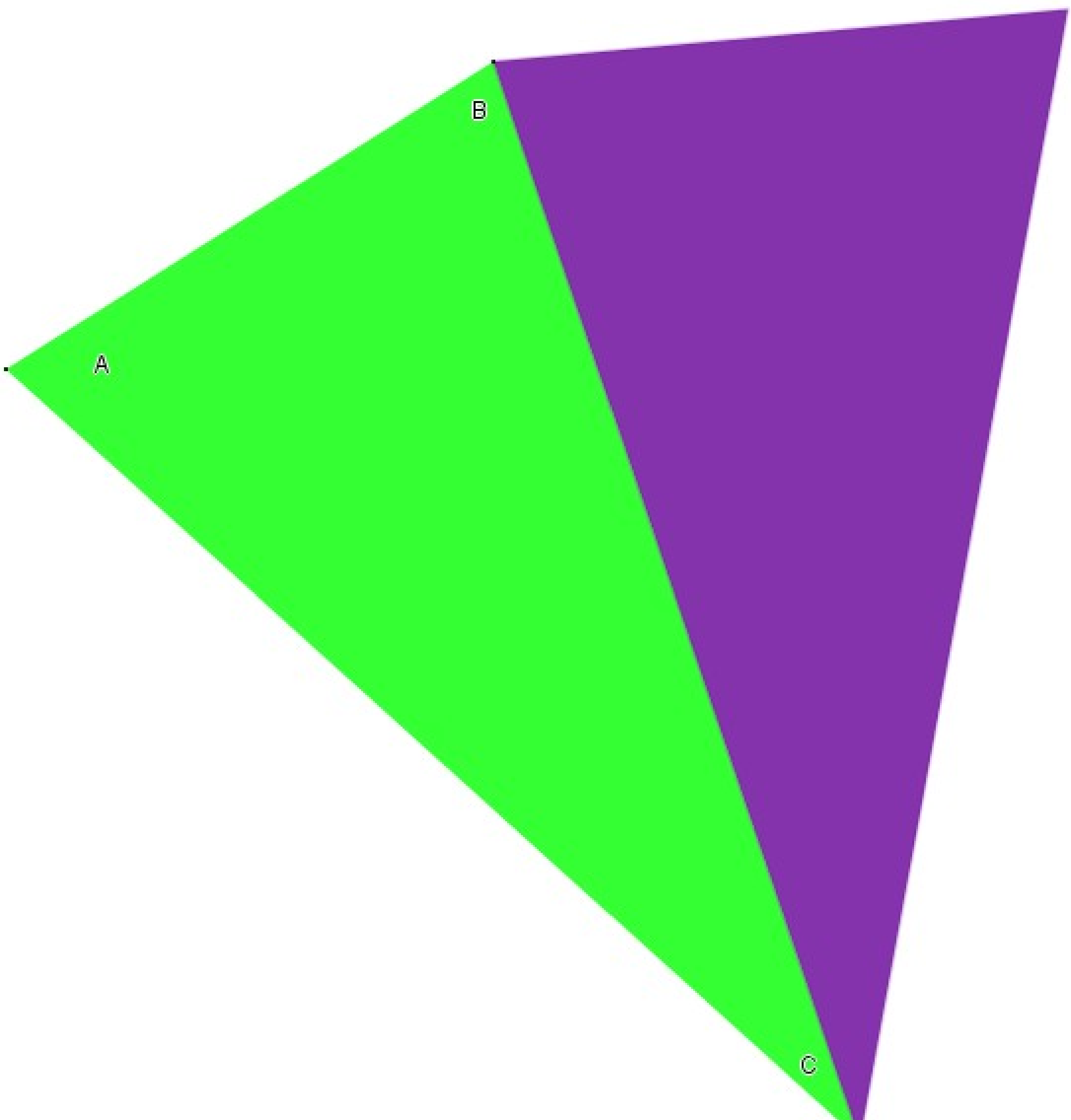







Annexe 6


A
B
C


B
A
C

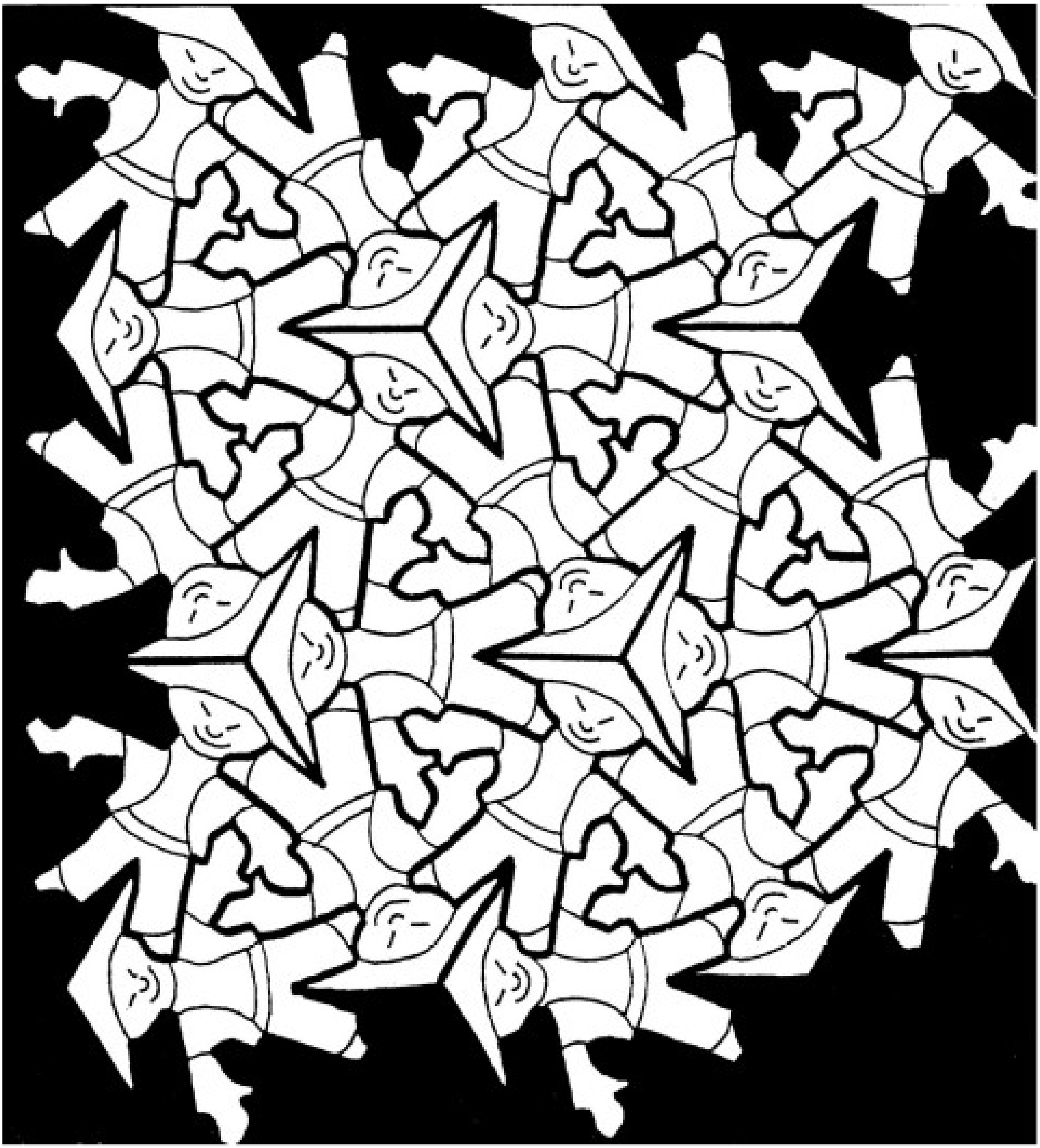

B
A
C


B
A
C

Pavage des chinois d'Escher

Colorie avec uniquement trois couleurs mais attention, deux chinois qui se touchent ne peuvent pas être de la même couleur !

Utilise les transformations pour décrire comment on peut passer d'un chinois d'une couleur à un autre de la même couleur ? D'un chinois d'une couleur à un autre d'une autre couleur ?



Pour aller plus loin…

Pour construire le pavage : https://irem.univ-lille1.fr/IMG/pdf/Les_etapes_de_la_construction.pdf

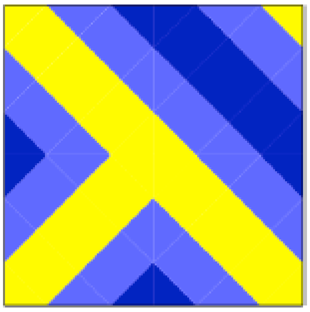
Pour exploiter le pavage : https://irem.univ-lille1.fr/spip.php?article55

Pavages de Nery

Un même motif peut amener des pavages très différents

suivant les transformations utilisées :

Voici un motif de base, réalise une frise ou un pavage et donne une consigne écrite pour que ton binôme puisse la ou le refaire à l'identique en veillant bien à ce qu'il n'ait pas pu le voir !



Exemple :

Les planches :

http://numerisation.univ-irem.fr/MA/IMA18002/IMA18002.pdf

Pour illustrer :

Vidéo « The magic of a Eduardo Nery tile » :

https://www.youtube.com/watch?v=J7YMOP2kUJc

Autres pistes d'exploitation :

Voir le Parcours Azulejos :

https://irem.univ-amu.fr/sites/irem.univ-amu.fr/files/public/parcours_azulejos_-_niveau_cycle_3_-_irem.pdf

- dénombrer les possibilités
- comparer les propriétés des différents motifs
- fabriquer un azulejos

Jeu TRANSFORMING

A partir d'un plateau du type de celui proposé en annexe ou d'un assemblage de plusieurs plateaux, le but est de passer d'une case à une autre en caractérisant la transformation qui permet de passer d'une figure à l'autre.

Règle basique :

Matériel :

- **un dé à 6 faces :** symétrie axiale ; symétrie centrale ; rotation de 90° ⚐; rotation de 90° ✈; Joker ; Translation
- un pion par joueur

Tous les pions sont sur la case départ.

Chaque joueur lance à son tour le dé et se déplace dans une case correspondant à son tirage. Il doit justifier que sa case correspond bien à son tirage en précisant la caractéristique de chaque transformation (centre de la symétrie, axe de la symétrie, centre de la rotation, vecteur de la translation). Il est possible de se déplacer dans une case qui n'est pas adjacente.

Le premier joueur qui arrive sur la case « arrivée » a gagné.

Règle évoluée :

Matériel :

- Un jeu de cartes « transformations »
- un pion par joueur

Tous les pions sont sur la case départ

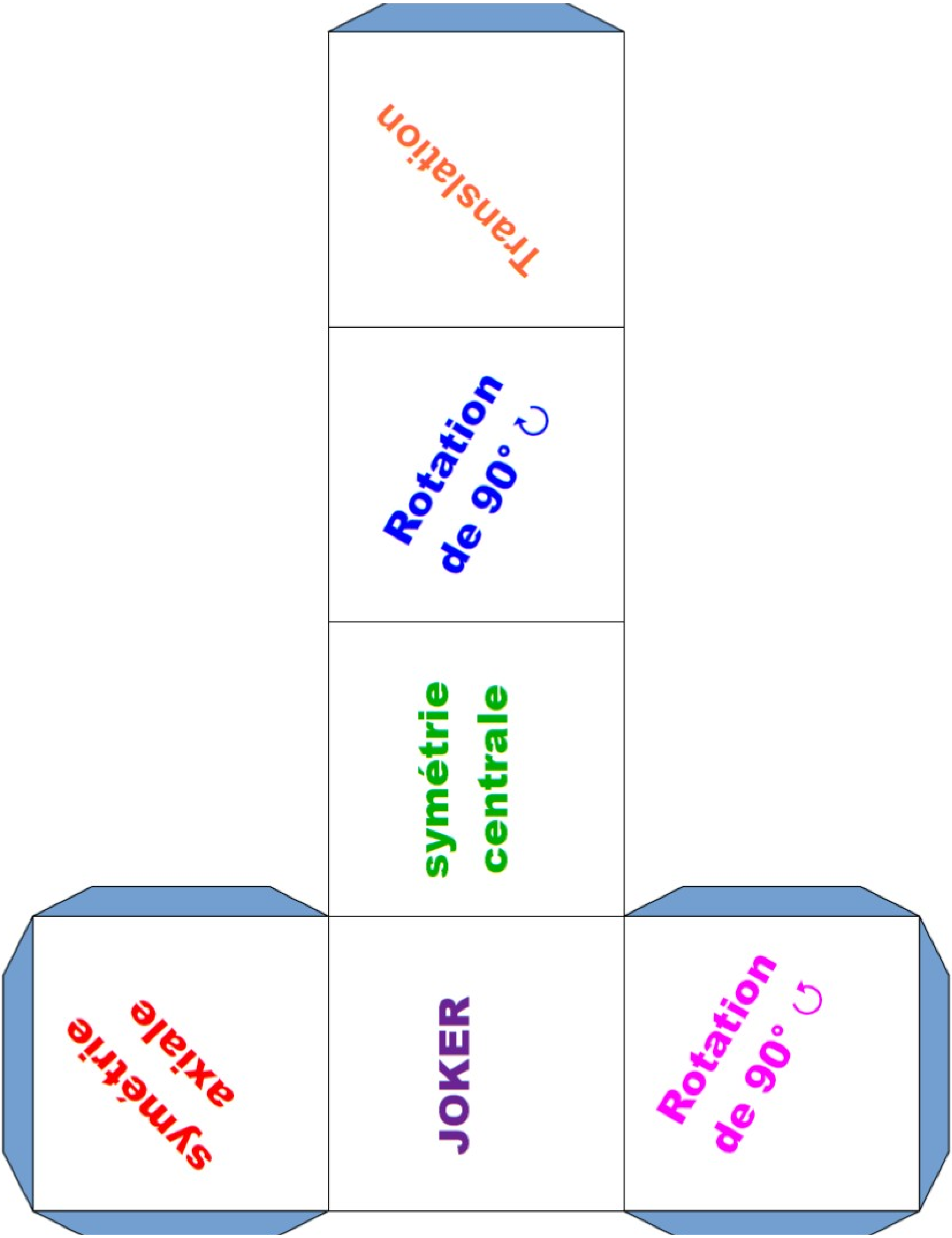
On distribue trois cartes à chaque joueur, le premier joueur cherche une combinaison lui permettant d'aller à la case « arrivée ». S'il ne trouve pas il pioche une nouvelle carte et passe son tour.

Le premier joueur à avoir atteint l'arrivée a gagné.

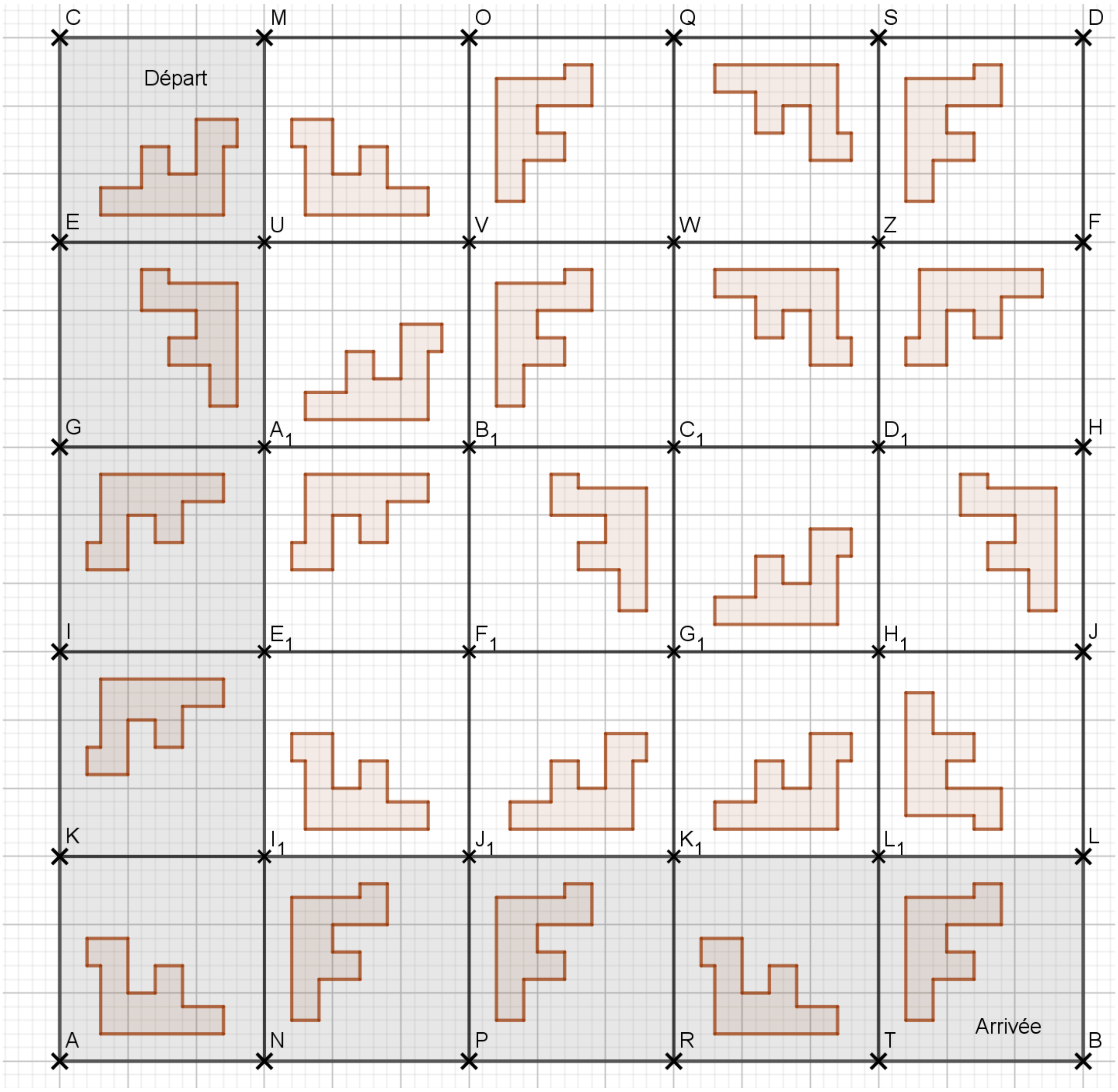
Variantes :

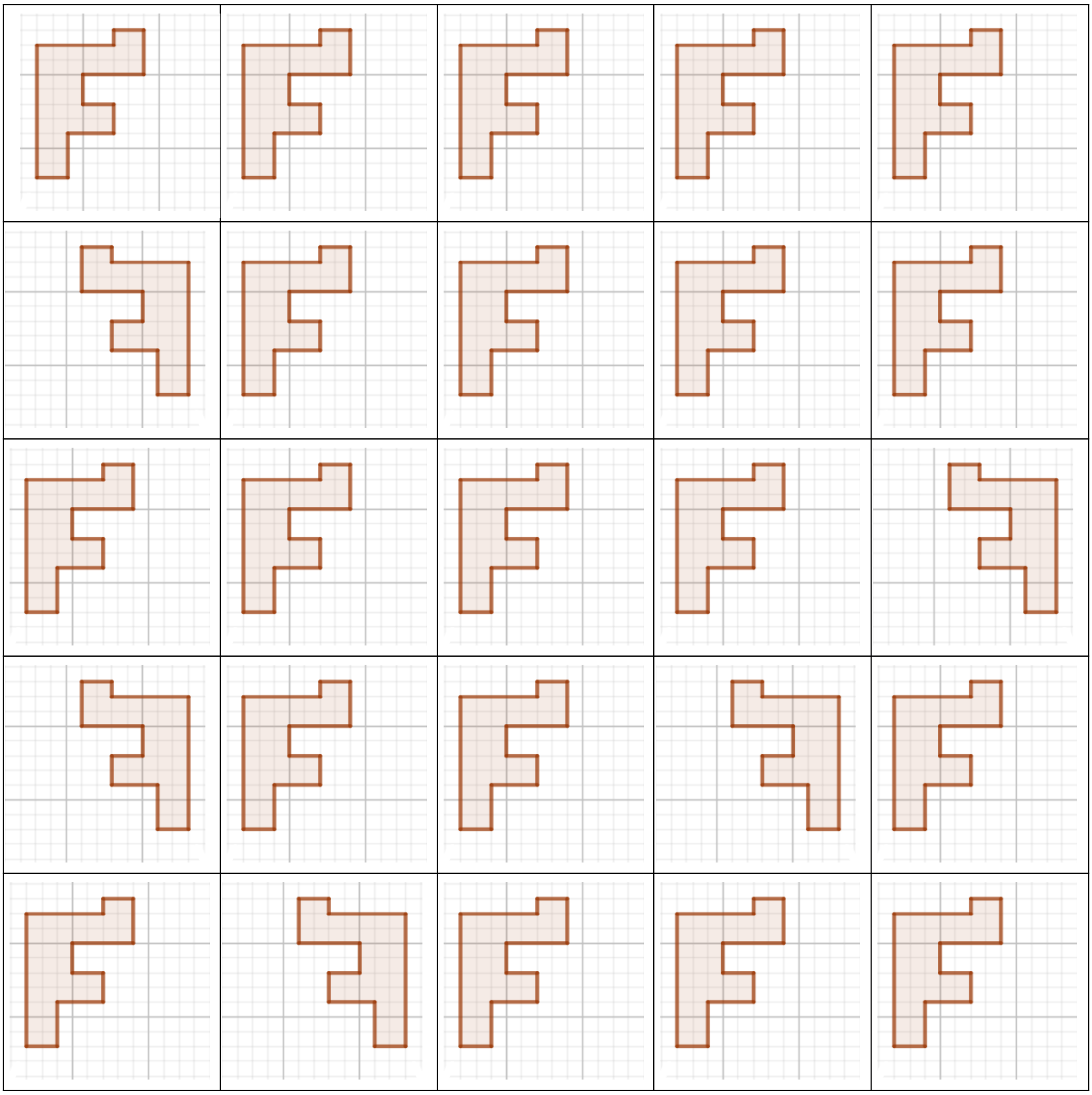
Taille du plateau

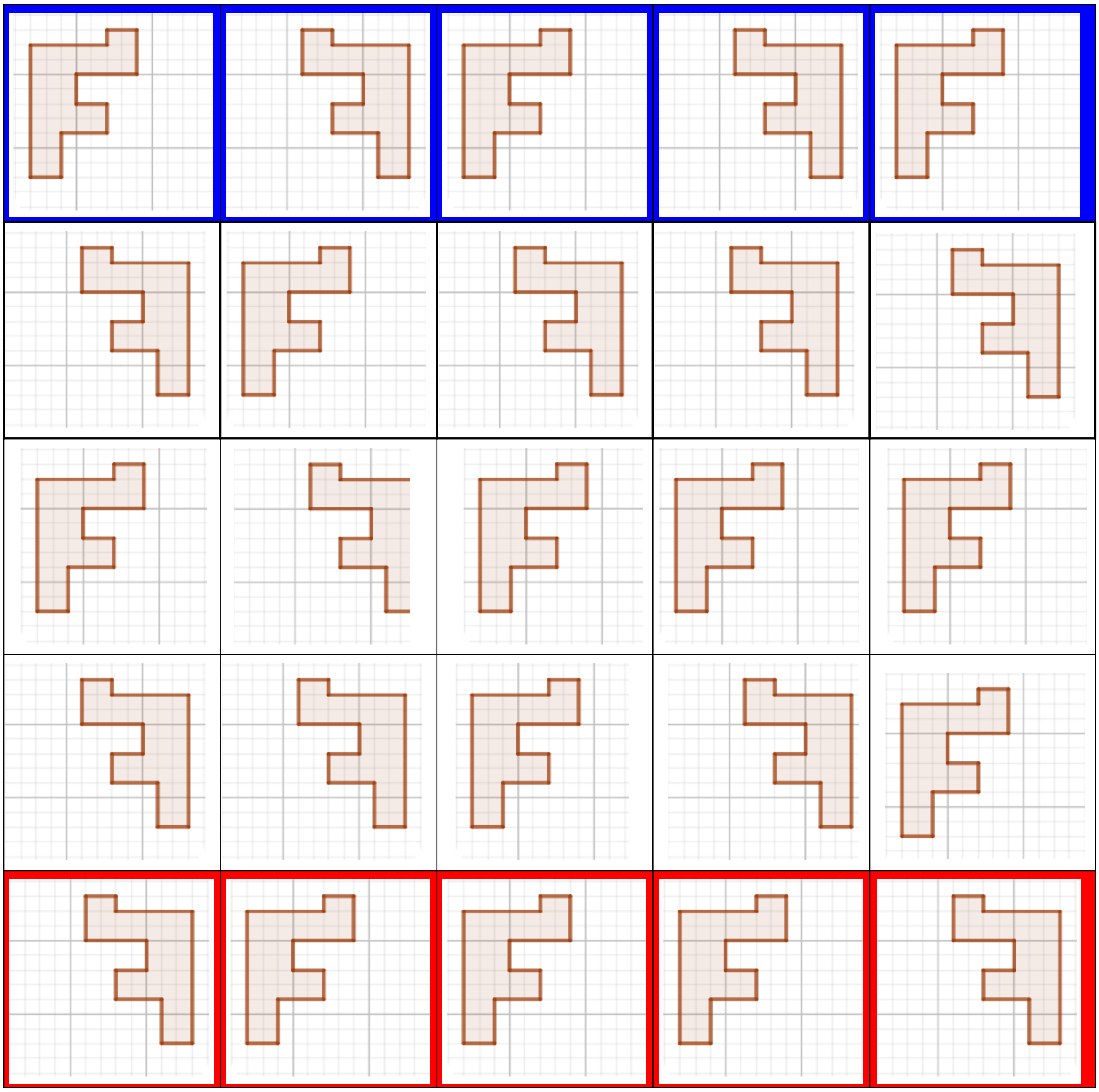
Zone de départ et zone d'arrivée au lieu d'une seule case

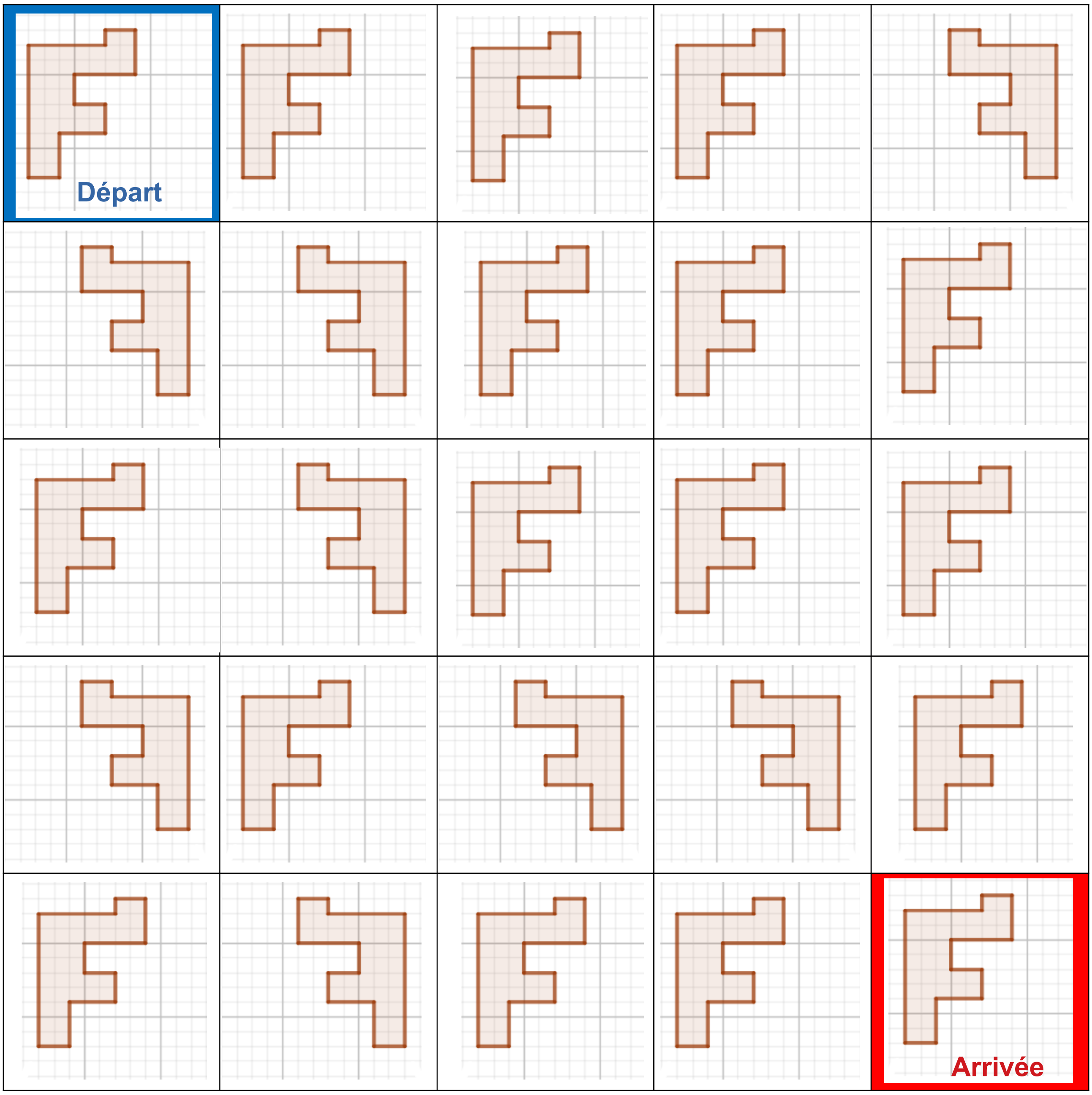

Translation
Rotation de 90°
symétrie centrale
symétrie axiale
JOKER
Rotation de 90°

symétrie axiale	JOKER	Rotation de 90° ↻	Translation
symétrie centrale	Rotation de 90° ↺	Rotation de 90° ↺	Translation
symétrie axiale	symétrie centrale	JOKER	Rotation de 90° ↻
symétrie centrale	symétrie axiale	Translation	Rotation de 90° ↻


C
M
O
Q
S
D
Départ
E
U
V
W
Z
F
G
A1
B1
C1
D1
H
I
E1
F1
G1
H1
J
K
I1
J1
K1
L1
L
A
N
P
R
T
Arrivée
B





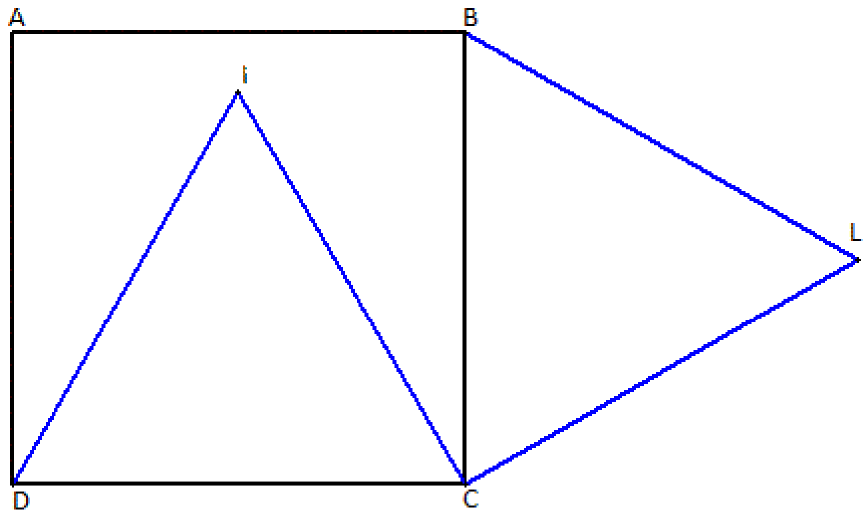

Départ
Arrivée

Problème de mesure

Problème 1

ABCD est un carré et les triangles DIC et BLC sont équilatéraux.

Explique comment on peut prouver que IL = DB sans faire de calculs !



Problème 2

ABCD est un carré. Comment à l’aide de transformations tracer un carré d’aire exactement double de celle de ABCD ?

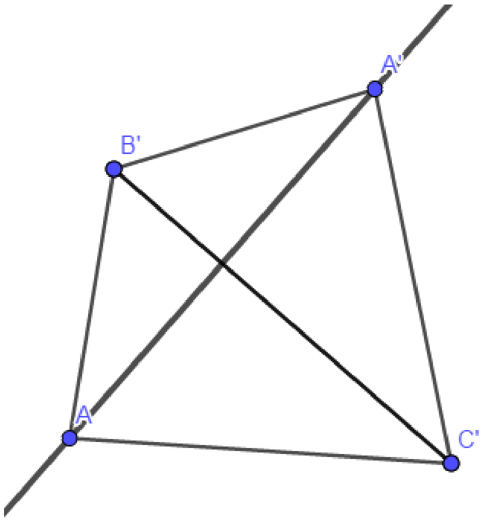
Les droites remarquables dans le triangle

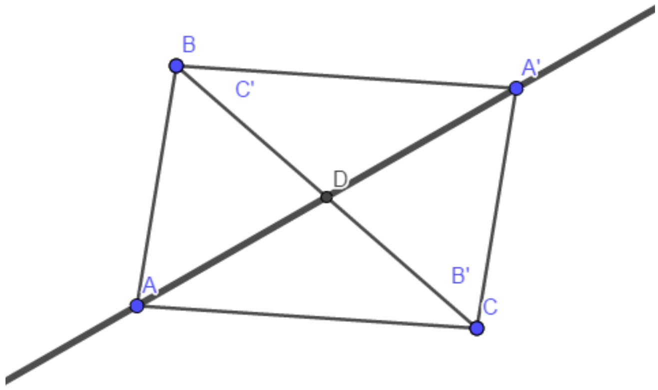
Voici les productions de trois groupes. Le triangle ABC a pour image le triangle A'B'C'.

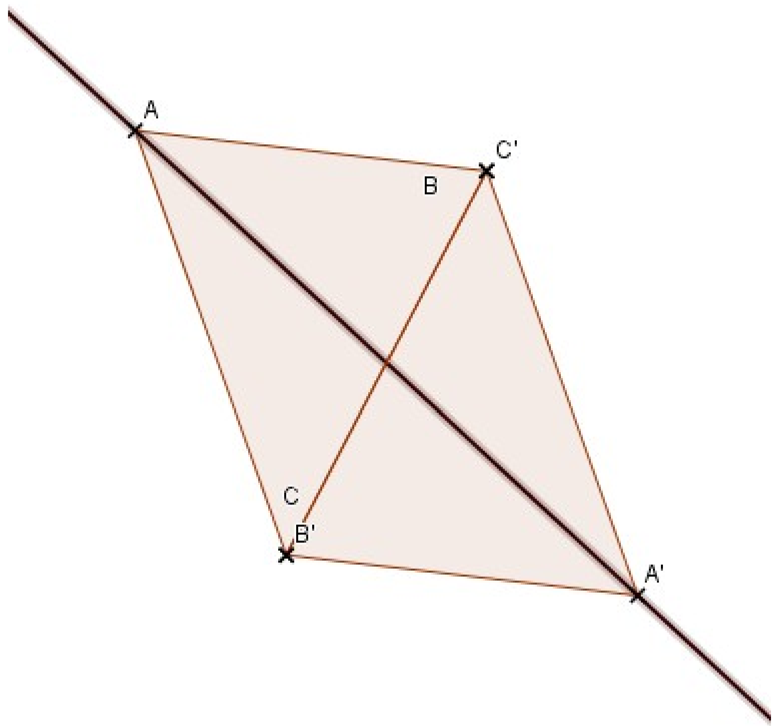
La droite remarquable obtenue est la droite dont le trait est épais.

Pour chaque production :

- indique la transformation utilisée (tu peux ajouter des points ou des droites en vert et leur donner des noms si tu en as besoin pour désigner la transformation)
- indique la droite remarquable obtenue (hauteur issue de A, médiatrice de [BC] ou médiane issue de A.
- prouve que c'est bien cette droite remarquable et pas une autre en utilisant des propriétés (tu peux utiliser le répertoire des propriétés pour t'aider)







Droite remarquable obtenue :

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Transformation utilisée :

…………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………...

Preuve :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

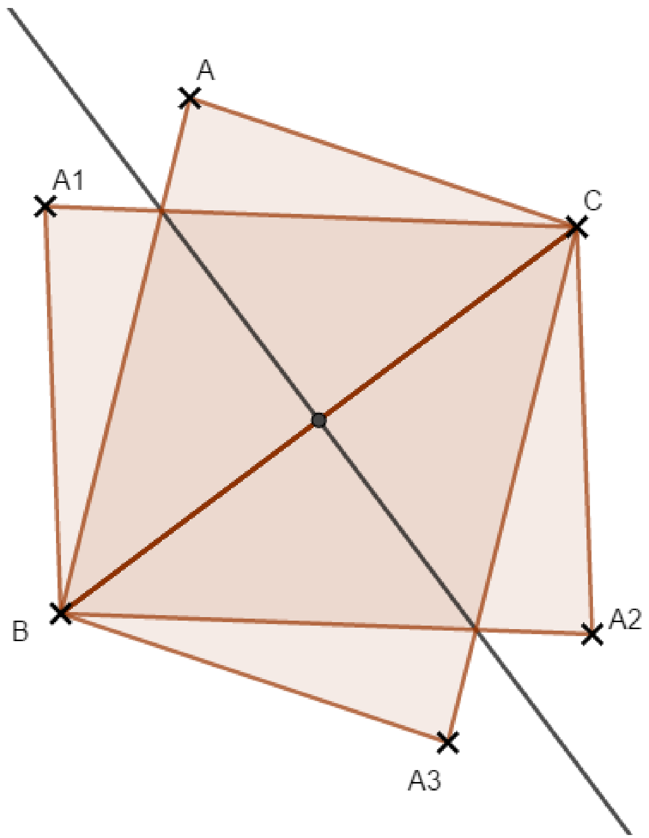
……………………………………………………………………………………………

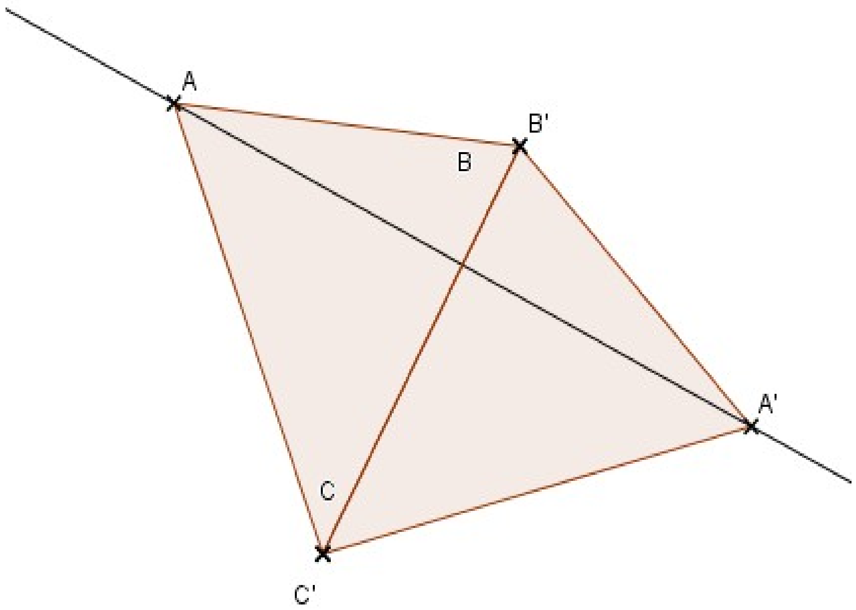
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………...

<table>
<tr>
<td rowspan="3">
</td>
<td>Droite remarquable obtenue :
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………</td>
</tr>
<tr>
<td>Transformation utilisée :
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………</td>
</tr>
<tr>
<td>Preuve :
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………</td>
</tr>
</table>



Droite remarquable obtenue :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Transformation utilisée :

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Preuve :

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

Frise 1	Frise 2
Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A. Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC). Vous obtenez ainsi le motif de base. Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.	Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A. Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC). Vous obtenez ainsi le motif de base. Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Frise 3	Frise 4
Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A. Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC). Vous obtenez ainsi le motif de base. Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.	Tracer le symétrique du motif élémentaire par la symétrie centrale de centre A. Tracer les symétriques des deux motifs par la symétrie axiale d'axe (BC). Vous obtenez ainsi le motif de base. Construire une frise à l'aide de ce motif de base et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Sitographie :

Eduscol :

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Geometrie_plane/31/2/RA16_C4_MATH_geo_plane_doc_maitre_574312.pdf

http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?rubrique92

https://irem.unicaen.fr/spip.php?article199

http://mathematiques.ac-dijon.fr/spip.php?article202

https://irem.univ-lille.fr/spip.php?article442

https://www.geogebra.org/m/YrQPGJmX

http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article15
http://culturemath.ens.fr/materiaux/maschietto/maschietto.htm

https://www.apmep.fr/SYMETRIES-TRANSLATION-ROTATION

https://www.apmep.fr/A-propos-du-pavage-du-Caire

https://www.apmep-iledefrance.fr/A-la-decouverte-des-pavages

http://www.apmep.tlse.free.fr/spip/spip.php?article33

https://www.youtube.com/channel/UCRVDPcrF_LTJo8u0bkzUL9A

http://www.pepit.be/cabri/acti2/math2A/chapit02/acti01.htm

Pour des situations problèmes amenant à la preuve.

http://www.mathkang.org/pdf/trucenveloppe.pdf

+ article IREM

http://www.mathkang.org/pdf/paver.pdf

Éditeur : IREM – PAYS DE LOIRE

2 rue de la Houssinière – BP 92208

44322 NANTES CEDEX 03

Université de Nantes

Responsable de la publication : Magali HERSANT

Auteurs : Jacques CASTAGNE professeur de mathématiques au collège Jacques Brel de Guérande

Nicole DERSOIR professeure de mathématiques au collège Jean Moulin de Saint-Nazaire

Sylvie GRAU maître de conférences en didactique des mathématiques à l'INSPE de Nantes

Christian JUDAS professeur de mathématiques au collège Pierre Garcie Ferrande de Saint-Gilles-Croix-de-Vie

Céline SAUVÊTRE professeure de mathématiques au collège Jules Ferry de Montaigu

Avec la participation de Claude FEY professeur de mathématiques au collège René Bernier de Saint-Sébastien-sur-Loire

Niveau : Cycle 4

Date : Juillet 2021

Résumé : Le groupe collège de l'IREM – Pays de Loire s'est donné comme but de concevoir une progressivité de l'enseignement des transformations du plan permettant la problématisation des savoirs afin de les rendre plus disponibles, c'est-à-dire de permettre aux élèves d'en disposer dans leur répertoire personnel pour les utiliser dans des situations complexes ou des problèmes à distance de l'apprentissage des transformations du plan, en particulier des situations où les transformations du plan sont utiles à l'analyse de figures géométriques.

Le groupe s'est limité dans cette brochure au cas des isométries et vous propose une séquence sur l'ensemble du cycle 4 à partir de la notion de pavage pour amener les élèves à concevoir les isométries comme des outils d'analyse et de démonstration.

Les situations proposées sont souvent reprises de supports que vous avez déjà peut-être à disposition mais elles sont ici analysées, des scénarios sont proposés pour leur mise en œuvre, ils ont pour la grande majorité été expérimentés et des productions d'élèves sont analysées. Des ressources complémentaires sont indiquées et le matériel est fourni.

Format : A4, 94 pages

Éditeur : IREM – PAYS DE LOIRE

2 rue de la Houssinière – BP 92208

44322 NANTES CEDEX 03

Université de Nantes

Responsable de la publication : Magali HERSANT