

Activité "Théorème de Pythagore"

Niveau

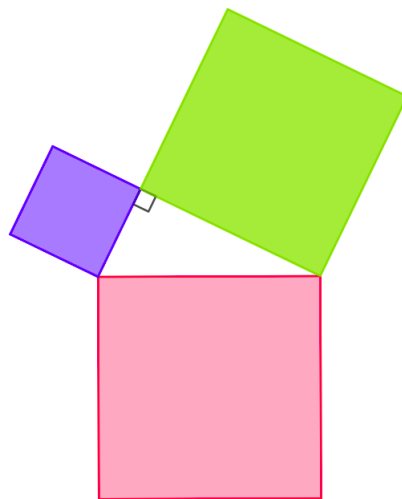
2^{ème} année de cycle 4

Prérequis

Les carrés parfaits

Objectifs

- Découvrir le théorème de Pythagore (uniquement avec les aires des carrés, la version algébrique viendra plus tard dans l'année).
- Différence entre conjecture et propriété démontrée.
- Se créer une image mentale du théorème de Pythagore :



Déroulement

- Travail en équipes homogènes :
 - Sujet 1 : niveau débutant.
 - Sujet 2 : niveau confirmé.
 - Sujet 3 : niveau intermédiaire.

On peut réajuster les groupes en fonction de la motivation des élèves.

- Les élèves se mettent directement en groupe. (30 min)
- La correction se fera par la présentation des travaux par un élève de chacun des groupes. Le passage au tableau pour ce temps de correction se fera dans l'ordre suivant : un groupe ayant le sujet 1, puis un groupe ayant le sujet 2, et enfin un groupe ayant le sujet 3.

Analyse a priori

Sujet 1

Dans cette activité, il n'y a pas d'obstacle particulier. On attend des élèves un découpage propre. Aucune démonstration n'est faite. Le puzzle peut être réalisé par des élèves en difficulté.

Le terme "paver" pourra être expliqué aux élèves.

Un dialogue entre les élèves par le-la professeur-e pourra relancer le groupe dans les questions 4. et 5.

Sujet 2

L'énoncé sera soit distribué en couleur, soit projeté au tableau.

Voici la traduction des sinogrammes : "Si crochet 3 et brin 4 alors corde 5"¹.

À gauche de la figure il est écrit : "l'aire rouge 6 l'aire jaune 1".

À droite de la figure il est écrit : "l'aire du carré de côté corde 25 comprend toutes les aires rouges et l'aire jaune".

Dans la figure à étudier par les élèves, nous avons choisi de ne pas quadriller le carré $IJKL$ en vingt-cinq petits carrés, car ce quadrillage est une conclusion du théorème chinois et risquerait d'être considéré comme hypothèse par les élèves.

Dans cette activité, nous prouvons que le triangle 3-4-5 est un triangle rectangle, ce qui permet d'avoir un exemple.

Pour prouver que le quadrilatère $IJKL$ est un carré, les élèves risquent de se contenter de montrer que c'est un losange, et d'omettre de prouver qu'on a un angle droit.

Sujet 3

Dans cette activité, une démonstration permet de prouver l'égalité qui relie les aires des carrés, mais le théorème n'est pas démontré.

1. À cette époque en Chine, on définit les trois côtés d'un triangle rectangle par :

- côté le plus court : crochet
- côté le plus long : corde
- côté entre les deux : brin

Analyse a posteriori

Cette activité a été testée dans deux classes de quatrième d'effectif 30. Le professeur a choisi de faire sept groupes (cinq d'effectif 4 et deux d'effectif 5). Ainsi dix élèves ont travaillé sur le sujet 1, huit sur le sujet 2 et douze sur le sujet 3.

Temps de travail en groupes :

Dans tous les groupes, c'est le dialogue entre les élèves qui a permis d'écrire la conjecture du théorème de Pythagore. En effet dans chacun d'entre eux on est passé de "*L'aire du grand carré est l'aire du petit carré et l'aire du moyen carré*" à "*Autour d'un triangle, l'aire du grand carré est l'aire du petit carré et l'aire du moyen carré*" puis à "*Autour d'un triangle rectangle, l'aire du grand carré est l'aire du petit carré et l'aire du moyen carré*". C'est souvent la dernière question qui a permis d'écrire la version finale de leur conjecture.

Sujet 1

Les élèves qui avaient le sujet 1 n'ont pas eu besoin d'aide. Le rôle de l'enseignant a simplement été de passer les voir de temps en temps pour les valoriser.

La question "Ça veut dire quoi paver ? " a été posée par les élèves.

Trouver un contre-exemple a été assez rapide, mais dans les groupes ayant eu ce sujet aucun·e élève n'a trouvé d'exemple.

Sujet 2

Les élèves qui avaient le sujet 2 ont justifié que $IJKL$ était un carré en écrivant : "C'est un quadrilatère dont les côtés mesurent 5". L'enseignant a donc réinterrogé les élèves sur les définitions des différents quadrilatères. Nous nous sommes mis d'accord que pour prouver que $IJKL$ était un carré, on pouvait montrer que c'était un losange dont un angle était droit. De plus l'enseignant a eu besoin de recontextualiser la figure, c'est à dire d'expliquer aux élèves que sur le manuscrit chinois, on démontre que $IJKL$ est un carré, puis que l'aire de ce carré est 25, et que donc le côté du carré mesure 5. Le quadrillage dans $IJKL$ est venu après cette démonstration. Il faut donc aussi prouver que le carré a pour côté 5. Ensuite les élèves se sont remis au travail avec de nouveaux objectifs.

Sujet 3

Les élèves travaillant sur ce sujet ne réussissaient pas à faire la démonstration de la question 1. L'enseignant a conseillé aux élèves d'admettre pour le moment le fait que le découpage donne deux carrés et de passer à la question 3. Les élèves pourront revenir sur cette question ultérieurement.

Le pavage du grand carré s'est fait naturellement, celui des deux autres carrés, non. Il a fallu que le professeur précise que l'on avait admis le résultat de la question 1, mais qu'elle était sans doute utile pour la suite. La figure 2 ayant été découpée, les élèves ont coopéré pour tenir les pièces et tracer le pointillé permettant d'obtenir les deux carrés. La démonstration de la question 1 n'a été faite que dans un groupe à l'aide du professeur qui a insufflé l'idée de passer par l'algèbre en notant a et b les côtés de l'angle droit du triangle rectangle, et en exprimant en fonction de a et b les côtés des quadrilatères dont on veut montrer que ce sont des carrés.

Correction :

Au moment de la correction, les figures du sujet 2 ont été distribuées afin de faciliter la prise de note.

Un représentant des élèves ayant eu le sujet 1 est passé au tableau pour présenter la figure et la conclusion obtenue : "L'aire du grand carré est égale à l'aire du petit carré plus l'aire du moyen carré". L'enseignant a interrogé la classe sur la signification du verbe "être" de cette phrase et demandé la différence entre "L'aire du grand carré est égale à l'aire du petit carré plus l'aire du moyen carré" et "L'aire du grand carré semble être égale à l'aire du petit carré plus l'aire du moyen carré". Les élèves ont remarqué que l'angle du triangle est droit, ont trouvé des contre-exemples (triangle équilatéral de côté 6cm par exemple), mais pas d'exemple.

C'est alors qu'un élève ayant eu le sujet 2 a levé la main pour donner l'exemple du triangle 3-4-5. Nous avons alors corrigé cette activité pour justifier l'exemple.

Ensuite nous sommes revenus sur la différence entre "est" et "semble être", ce qui a permis la transition vers la présentation des travaux faits par les élèves qui avaient le sujet 3. La démonstration de la question 1 a été faite par un dialogue entre la classe et l'enseignant.

insertion document prise de note élève.

Conclusion

La coopération entre les différents groupes a permis de mettre en évidence :

- la différence entre conjecturer et justifier,
- la notion de contre-exemple pour invalider une affirmation.

Après la correction les élèves étaient en mesure de faire la synthèse :

Théorème de Pythagore

Si on construit les carrés sur les cotés d'un triangle rectangle, alors l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés.

