

Une séquence sur l`introduction des fractions au CM1



INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

Adresse postale
2, rue de la Houssinière • BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03

Direction
Magali HERSANT
Tel. : 02 51 12 59 09
E-Mail : magali.hersant@univ-nantes.fr

Technicien PAO
Serge CORMIER
Tel. 02 51 12 59 41
E-Mail : serge.cormier@univ-nantes.fr

Site web :
<https://irem.univ-nantes.fr/>

Lucie BRACHET
Magali HERSANT
Florence LUCAS

Avec la participation de
Bruno COURTEL

Mai 2020

ISBN10 : 2-86300-043-8
ISBN13 : 978-2-86300-043-4
EAN : 9782863000434

Une séquence
sur l'introduction
des fractions
au CM1

Lucie BRACHET
*Conseillère pédagogique de circonscription
Circonscription de Bouguenais*

Magali HERSANT
*Professeure des universités
INSPÉ de l'Académie de Nantes*

Florence LUCAS
*Professeure des écoles et formatrice
école M. Curie, Saint-Sébastien sur Loire
INSPÉ de l'Académie de Nantes*

Avec la participation de

Bruno COURTEL
ERUN Bouguenais - Vertou - Rezé

Une séquence sur l'introduction des fractions au CM1

CYCLES 3

MAI 2020

IREM
Des Pays de la Loire

Nous proposons dans cette première brochure une séquence d'introduction des fractions au CM1. Elle s'arrête aux fractions décimales qui seront développées dans une seconde brochure traitant des nombres décimaux.

Les fractions y sont présentées, au départ, comme des nouveaux nombres permettant de résoudre des problèmes pour lesquels les nombres entiers ne suffisent pas, dans le contexte de mesures de longueurs, comme le proposent les travaux didactiques (Douady et Perrin-Glorian, 1986¹) et les programmes actuels. En ce sens, cette séquence n'est pas forcément originale par rapport à ce que l'on peut trouver dans certains manuels (ERMEL, Cap Maths, EuroMaths/Opération Maths...). L'originalité de cette ressource réside plus dans l'attention portée à l'explicitation de certains aspects de l'enseignement des fractions. D'une part, nous explicitons les choix effectués pour les différentes étapes de la séquence et les ruptures ou continuités auxquels ils sont associés. Nous pensons en effet que cela peut aider à négocier les ruptures avec les élèves et à comprendre certaines de leurs difficultés. D'autre part, nous proposons des formulations des savoirs et savoirs-faire relatifs aux fractions qui peuvent être reprises oralement ou par écrit (affiches dans la classe, notes provisoires au tableau, cahier de l'élève). La formulation des savoirs au plus proche des activités effectuées dans la classe est, en effet, une condition essentielle de l'apprentissage et nous savons qu'il n'est pas toujours aisé de trouver de telles formulations. Ces formulations devront ensuite être reprises et, petit à petit, décontextualisées.

Cette séquence a été expérimentée dans plusieurs classes, ce qui nous a permis de l'affiner. Des productions d'élèves recueillies aux cours de ces expérimentations sont insérées pour certaines séances. Nous pensons que cela peut aider à anticiper le déroulement de ces séances.

Pour chaque séance, nous mentionnons le matériel nécessaire, étape par étape, à l'aide de représentations en format réduit de ce matériel. Le matériel pour la classe à l'échelle 1 figure en annexe.

1 Douady R., Perrin M-J. (1986). Liaison école collège. Nombres décimaux, IREM de Paris 7, Paris, <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97032.pdf>

Sommaire de la brochure

Une séquence sur l'introduction des fractions au CM1	1
Remarques sur la notion de « fractions »	7
Vue d'ensemble de la séquence.	8
Séance 1 : insuffisance des nombres entiers (1h)	9
Séance 2 : introduction de l'écriture fractionnaire (1 h)	15
Séance 3 : codage et décodage de fractions (1 heure)	20
Séance 4 : décomposition de fractions (1 h)	23
Séance 5 : découverte et utilisation d'autres fractions (45 min.)	25
Séance 6 : placer des fractions sur une droite graduée (45 min.)	28
Séance 7 : utiliser des fractions dans des problèmes (45 min.)	30
Activités ritualisées	33
ANNEXES	35

Remarques sur la notion de « fractions »

Nous apportons des éclairages mathématiques sur la notion de fraction et sur les difficultés de leur apprentissage qu'il nous semble importantes d'avoir en tête pour bien appréhender l'enseignement des fractions.

Savoirs en jeu

Dans les programmes de mathématiques actuels, les « fractions » sont assimilées à des nombres². Cela constitue un abus de langage. Il est plus juste de considérer les fractions comme un moyen de représenter les *nombre rationnels*. Une fraction est en effet une écriture de type $\frac{a}{b}$

où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0.

Qu'est-ce qu'un nombre rationnel alors ? Il y a plusieurs façons de l'envisager. Bien entendu on peut dire qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction. 2

et 1,5 sont ainsi des nombres rationnels puisqu'ils peuvent s'écrire comme $\frac{2}{1}$ et $\frac{3}{2}$ par exemple.

Mais en faisant ainsi on tourne en rond. Sans entrer, dans des questions compliquées de classe d'équivalence, on peut dire qu'un nombre rationnel est la solution d'une équation du type $a = bx$ où a et b sont des entiers et b est non nul. Cette équation admet une seule solution qui

peut s'écrire de différentes façons, comme par exemple $\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \dots$. En particulier, si b

vaut 1, alors x est égal à a et le nombre x est un entier. Si b ou $2b$ ou $4b \dots$ s'écrivent comme une puissance de 10 alors x est un nombre rationnel particulier, c'est un nombre décimal. Et ce type particulier de nombre rationnel peut s'écrire soit sous la forme d'une fraction, soit sous la forme d'une écriture chiffrée avec une virgule. Il y a alors plusieurs fractions pour représenter ce nombre mais une seule écriture chiffrée avec une virgule (si l'on admet qu'on ne met pas de zéro superflu à l'extrémité droite de l'écriture).

Obstacles et points de vigilance

Ces remarques nous semblent éclairer les enjeux liés à l'enseignement des fractions et les difficultés de certains élèves. Voici quelques points de vigilance à prendre en compte :

- Alors que les élèves ne connaissent que les entiers, il s'agit d'introduire des « nouveaux nombres », les rationnels, sans entrer dans cette distinction de nature des nombres car l'objectif est *in fine* de permettre de manipuler des rationnels particuliers : les décimaux (opérations, problèmes...).
- Les élèves ont l'habitude d'une relation univoque entre un nombre et son écriture chiffrée (sans zéro inutile à gauche du nombre). Dire qu'une fraction est un nombre génère une difficulté : pour l'élève cela va impliquer, en effet, que deux nombres $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ (avec a, b, a', b' des entiers tels que $a \neq a', b \neq b', b \neq 0, b' \neq 0$ et $ab' = a'b$) « différents » sont égaux ! Par exemple, pour un élève $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ vont correspondre à deux nombres différents puisque ce sont deux écritures différentes. Il semble alors important de préciser que toutes ces fractions correspondent au même nombre, même si elles s'écrivent différemment. Cela est bien mis en évidence lorsqu'on place les nombres sur la droite graduée.

Ces précisions sont importantes pour travailler ensuite les fractions décimales puis les nombres décimaux. En effet, pour étudier les nombres décimaux, on a besoin de les représenter. Pour cela on utilise les fractions décimales puis l'écriture chiffrée avec une virgule.

² Les programmes précisent en effet (B.O. du 26 novembre 2015) : « Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. »

Vue d'ensemble de la séquence.

La séquence se compose de 7 séances ; elle s'arrête aux fractions décimales. Nous conseillons :

- dans une séance préalable de faire mesurer par les élèves des bandes de papier dont la mesure est un nombre entier d'unité avec une bande unité fournie par l'enseignant de façon à les habituer à mesurer des longueurs sans la règle, avec une unité non conventionnelle
- d'enchaîner les séances 1 à 6 sur une période de 2 à 3 semaines. La séance 7 peut être réalisée plus tard. Nous proposons aussi des activités ritualisées pour consolider les connaissances des élèves.

Le tableau ci-dessous résume les principales étapes de la séquence avec leur enjeu et les contextes dans lesquels sont mobilisées les fractions.

Selon le niveau des élèves, ne pas hésitez à intercaler des séances d'entraînement qui reprennent des élèves en cours d'apprentissage afin de bien stabiliser les connaissances.

	Objectif	Domaine et contexte
Séance 0	Mesurer une longueur en reportant une unité non conventionnelle.	Grandeurs et mesures : longueur
Séance 1	Montrer l'insuffisance des nombres entiers pour communiquer précisément la mesure d'une longueur. Exprimer cette mesure en référence à des pliages - reports de la bande unité	Grandeurs et mesures : longueur
Séance 2	Introduire la représentation symbolique d'une fraction. Comprendre que des écritures fractionnaires différentes peuvent correspondre à une même mesure de longueur.	Grandeurs et mesures : longueur
Séance 3	Coder et décoder des fractions dans un contexte de mesure de longueurs.	Grandeurs et mesures : longueur
Séance 4	Introduire de nouvelles fractions (tiers, cinquième) dans de nouveaux contextes (aire de rectangles ou de disque). Décomposer une fraction en la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1 et inversement.	Grandeurs et mesures : aire
Séance 5	Utiliser les fractions, inférieures ou supérieures à 1, dans différents contextes (aire, partage...).	Grandeurs et mesures : aire, partage
Séance 6	Placer des fractions sur une droite graduée. Encadrer par deux entiers consécutifs. Comparer des fractions.	Grandeurs et mesures : longueur Nombre : droite graduée
Séance 7	Résoudre des problèmes impliquant les fractions.	Nombre et calcul : fraction opérateur
Activités ritualisées	Consolider les connaissances des élèves.	

Certaines séances nécessitent beaucoup de matériel, en particulier la séance 1. Nous avons donc distingué une rubrique spécifique qui donne les vignettes des fiches élèves et donne des indications sur le matériel.

L'ensemble des fiches élèves est disponible, comme matériel prêt à photocopier, en annexes.

Séance 1 : insuffisance des nombres entiers (1h)

Cette séance est largement inspirée des travaux de Douady et Perrin-Glorian (1986) et du ERMEL CM1. Nous avons en particulier repris les valeurs numériques proposées par ERMEL.

Objectifs

- Montrer l'insuffisance des nombres entiers pour communiquer précisément la mesure d'une longueur.
- Exprimer cette mesure en référence à des pliages - reports de la bande unité.

Cette séance comporte trois phases :

- A. Une phase de recherche qui vise à montrer l'insuffisance des nombres entiers (30 min)
- B. Une phase de synthèse sur la signification des mots « moitié », « demi » « quart » (10 min)
- C. Une phase d'appropriation qui vise à permettre à tous les élèves de proposer un codage des mesures des bandes avec des fractions exprimées dans le langage des pliages - reports (pliage de la bande unité en n parts égales et report de cette partie) (20 min).

La séance s'appuie sur une situation de communication entre deux binômes d'élèves. Une unité est fixée, les élèves disposent d'une bande unité et doivent utiliser pour coder la mesure d'une bande de papier puis transmettre cette mesure à d'autres élèves qui devront retrouver la bande en question parmi un ensemble de bandes possibles.

Matériel à prévoir (annexes 1 à 4)

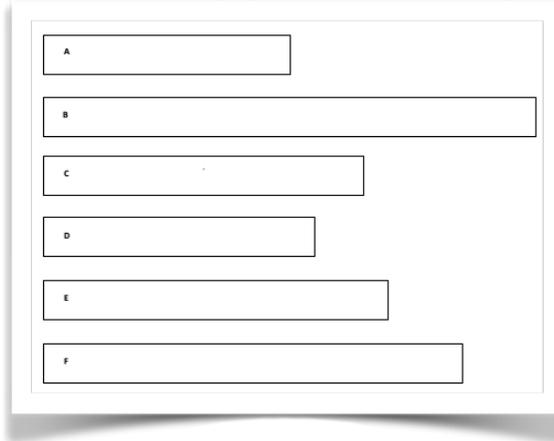
- par binôme :
 - étape A3 : plusieurs bandes unité (10 cm de long et 2 cm de haut) de couleur ; une bande de papier **sans indication de lettre** parmi les bandes B, E, F de la feuille étape A4 ; une feuille pour les échanges de messages entre les binômes

The diagram illustrates the communication task. On the left, a red rectangle contains the letter 'U'. Below it are three horizontal rectangles of different lengths, representing possible bands. On the right is a communication sheet with the following fields:

- Prénoms :
- Message pour trouver notre bande :
.....
- Message reçu par :
- Réponse :
Nous avons trouvé votre bande : c'est la bande
.....
- Nous n'avons pas trouvé votre bande car
.....

Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

- étape A4 : une feuille avec 6 bandes de papier dessinées et repérées par des lettres



- étape C2 : fiche d'exercice d'appropriation

Code les bandes suivantes en utilisant la bande unité rouge :

G

G =

H

H =

- pour l'enseignant :
 - du matériel agrandi : une bande unité pour le tableau (40 cm, soit échelle 4 par rapport aux bandes élèves) ; les bandes A à F reproduites au tableau à l'échelle 4
 - ou le matériel de l'élève avec un visualiseur relié à un vidéoprojecteur.

Précisions sur le matériel

- Demander aux élèves de ranger dans leur casier leur règle graduée. En effet, seule la bande unité distribuée doit être utilisée.
- Seules les bandes B, E et F sont distribuées aux élèves.
- Les mesures des bandes sont les suivantes :

Bande	B	E	F	A	C	D
Mesure en unité u	$2u + \frac{1}{2} u$	$1u + \frac{3}{4} u$	$2u + \frac{1}{8} u$	$1u + \frac{1}{4} u$	$1u + \frac{5}{8} u$	$1u + \frac{3}{8} u$

- Les bandes ne sont pas choisies au hasard. Elles correspondent à des fractions supérieures à un. Ce choix évite que les élèves associent les fractions à des nombres plus petits que l'unité.
- Nous avons choisi des puissances de 2 au dénominateur parce qu'on pense facilement à plier en deux et encore en deux (on obtient ainsi des demis, des quarts puis des huitièmes si on recommence) et qu'il est plus facile de plier en deux parts égales qu'en trois parts égales.

Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

- Le matériel nécessaire à chacune des phases de cette séance est introduit au fur et à mesure.
- Cette séance demande l'utilisation de beaucoup de matériel ; il est important de prendre le temps de l'introduire auprès des élèves pour leur permettre de bien entrer dans la situation-problème.
- Prévoir un nombre important de bandes unité pour que les élèves puissent en manipuler autant qu'ils le veulent.
- L'enseignant choisit la bande blanche donnée à chaque binôme parmi B, E, F. Il est préférable de réserver la bande F aux binômes les plus à l'aise car il est moins facile de penser à plier en 8 parts égales que en 2 ou 4.
- L'enseignant devra anticiper la façon dont il organisera les échanges de messages entre les binômes : quel binôme donne son message à quel autre binôme ?

Phase A : recherche « report de la bande unité pour exprimer une mesure de longueur »

1. Présentation du matériel :

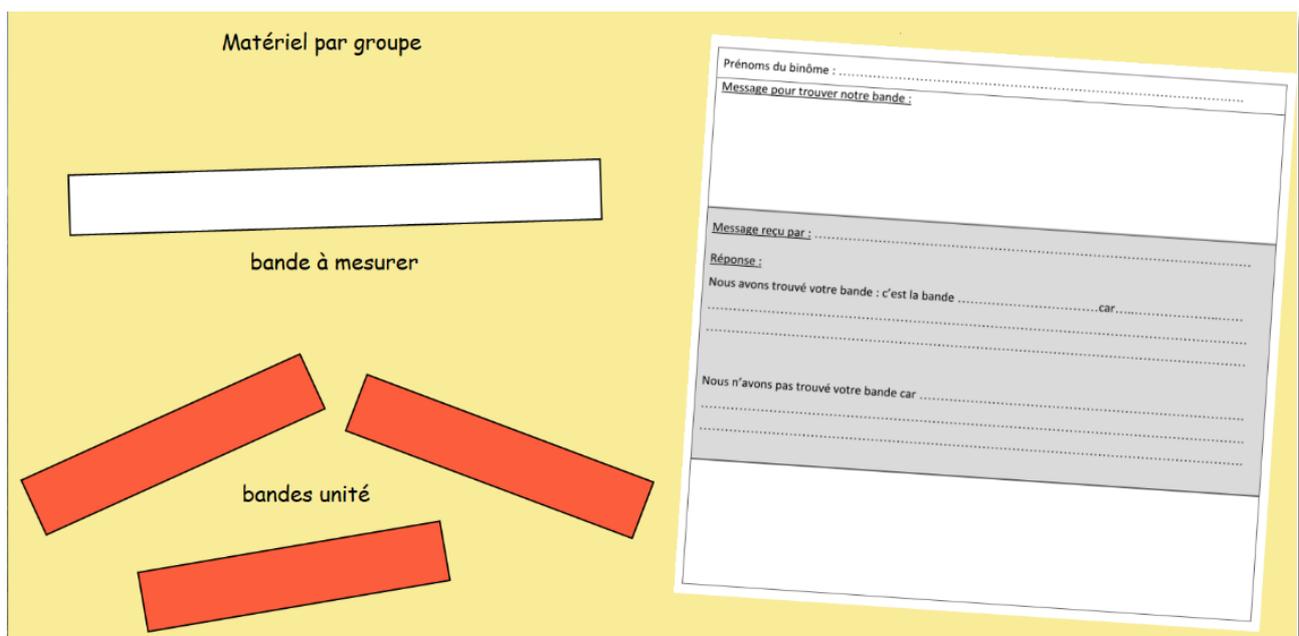
L'enseignant présente les différentes bandes qui seront utilisées pendant la phase de recherche :

- les bandes unité (« les bandes rouges, sont les bandes unité, elles ont toutes la même longueur ») ;
- les bandes blanches, une par binôme, choisie par l'enseignant parmi les bandes B, E, F de la fiche de l'étape A4 ;
- la feuille navette sur laquelle les élèves écrivent leur message (fiche A3)
- la fiche A4 qui sera distribuée à l'étape 4.

2. Formation des binômes et explication de la consigne :

« Vous allez utiliser la bande unité pour mesurer votre bande blanche. Vous pouvez plier la bande unité si vous le souhaitez. Une fois que vous êtes d'accord entre-vous, vous écrivez un message qui doit permettre à ceux qui le recevront d'identifier votre bande parmi d'autres. »

3. Rédaction du premier message par chaque binôme sur la feuille navette



Pendant ce temps de rédaction, l'enseignant circule dans la classe et observe les productions des élèves. Si les élèves codent la mesure en cm (ce qui se produit souvent d'après nos observations), il leur indique que leur réponse est forcément fautive puisqu'ils n'ont pas de règle graduée et qu'il faut trouver une autre façon de faire (par exemple : « Comment pouvez-vous dire

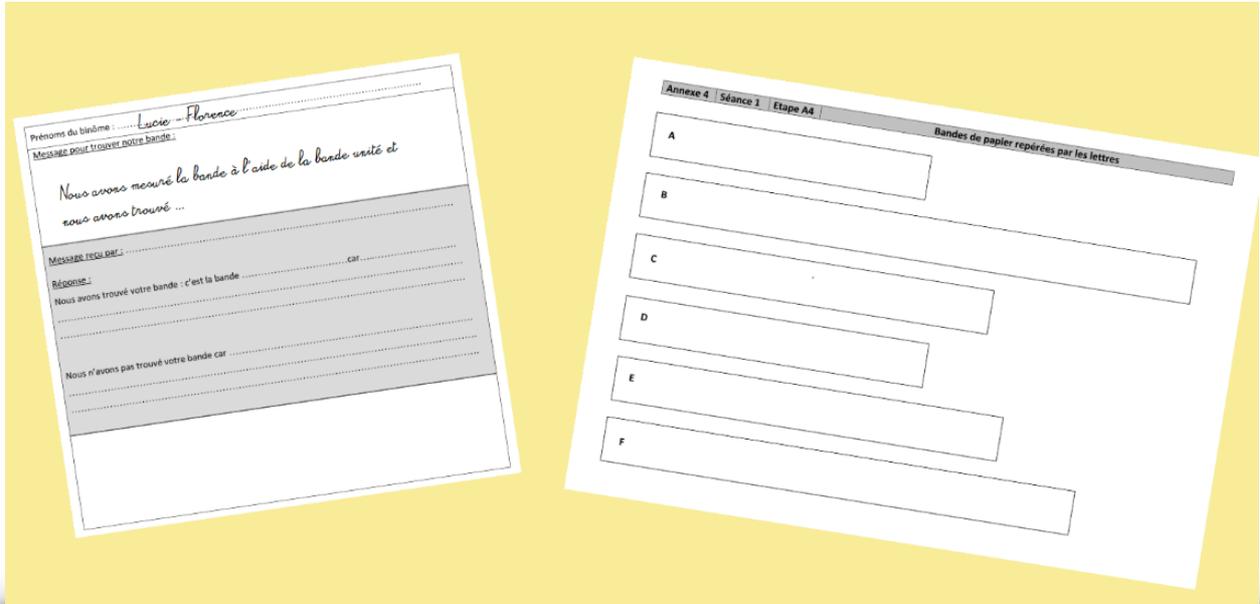
Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

que la bande mesure 15 cm alors que vous n'avez pas de règle graduée ? Il faut trouver une façon de faire sans les cm, en utilisant l'unité qui est donnée par la bande rouge. »).

4. Distribution de la fiche A4 une fois que tous les binômes ont rédigé un message.

Chaque groupe identifie la lettre qui correspond à sa bande sur la feuille distribuée par l'enseignant pendant que celui-ci effectue les échanges de messages entre les binômes.

Chaque binôme prend connaissance du message de l'autre binôme et fait une proposition de bande à partir des explications données ou explique pourquoi il n'a pas pu trouver la bande décrite (10 minutes).



5. Retour de la feuille navette à l'émetteur et prise en compte des remarques.

Chaque groupe échange ensuite avec l'autre binôme sur les difficultés rencontrées pour identifier une bande à partir des messages.

Message pour trouver notre bande : C'est 2 et la moitié de la bande rouge.

Message reçu par :

Réponse :

Nous avons trouvé votre bande : c'est la bande B parce que on a fait 2 fois la bande rouge et la moitié.

Nous n'avons pas trouvé votre bande car nous aurions plus précisés que c'était une bande rouge de moitié 2.

Message pour trouver notre bande :

La bande rouge mesure la moitié et un petit peu plus la bande blanche est plus grande que la bande rouge plus

Message reçu par : C

Réponse :

Nous avons trouvé votre bande : c'est la bande

Nous n'avons pas trouvé votre bande car nous aurions pas précisés la moitié de quoi et un petit peu plus de

Exemples de productions d'élèves

6. Mise en commun.

L'enseignant interroge les élèves sur les difficultés qu'ils ont rencontrées et sur les messages qui permettent de retrouver le segment. Il fait ressortir trois choses (dans cet ordre de préférence) :

(a) certains messages ne permettent pas de retrouver le segment : ils ne sont pas assez précis (« grand segment » ; « un peu plus petit que 2 unités » ; « 1 plus un bout de »...)

(b) il est difficile d'être précis « C'est difficile parce la mesure des bandes n'est pas un nombre entier, ça ne tombe pas juste. Les nombres que vous connaissez, les nombres entiers, ne permettent pas de rédiger un message suffisamment précis. »

(c) il y a quand même des messages qui ont permis de retrouver la bande (en fonction de ce qui a été observé) : « des élèves ont utilisé des mots comme moitié, quart qui ont permis de retrouver la bande de papier. » ; « des élèves ont expliqué qu'ils avaient plié une fois la bande en deux, puis encore une fois ».

Phase B : synthèse et explicitation des termes « quart », « demi », « huitième »

L'enseignant explique : « Pour mesurer certaines bandes, les nombres entiers ne suffisent pas. Il faut utiliser d'autres nombres qui permettent d'être plus précis et qu'on écrit avec des fractions. Par exemple, « moitié », « quart », « huitième » sont des fractions de l'unité. »

L'enseignant explique avec l'aide des élèves qui les ont utilisés la signification des mots « moitié », « quart » ; « demi-quart », « huitième », « moitié de moitié », toujours en lien avec les actions de pliage : « plier la bande unité en parts égales permet d'être plus précis et de donner la mesure de certains segments. Par exemple, si je plie la bande unité en 2 parts égales, et que je reporte une des parts cinq fois comme ça, je la mesure de façon plus précise ».

Phase C : appropriation des termes « quart », « demi », « huitième »

1. Correction collective de la situation de recherche à l'aide du matériel enseignant

Les élèves proposent des façons d'exprimer la mesure de chacune des 3 bandes (B, E, F) en utilisant les termes « demi » et « quart ». L'enseignant peut, s'il le juge intéressant, introduire l'écriture fractionnaire au cours de cette correction. Pour cette introduction voir la séance 2.

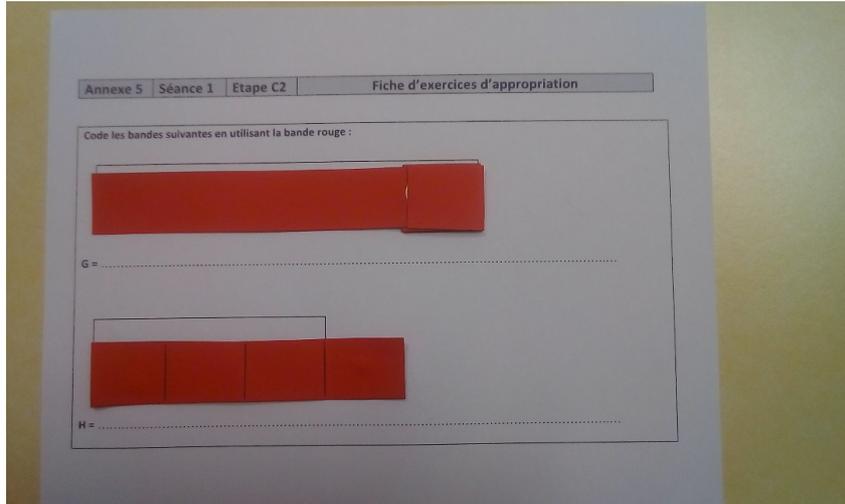


Les trois bandes sont au tableau. Deux bandes unités et une demi bande unité sont utilisées pour mesurer la bande du haut.

Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

Exercice d'application individuelle.

L'enseignant distribue la fiche C2 où figurent deux nouvelles bandes (G et H) : « En pliant la bande unité comme on vient de le voir, écrivez un message pour décrire chacune des bandes que je vais vous distribuer. »



Les pliages reports d'un élève

Correction :

G mesure une unité et un quart d'unité ; H mesure trois quarts de l'unité.

D'autres réponses sont également possibles :

- pour G, cinq quarts de l'unité, deux demis et un quart de l'unité ;
- pour H, un demi et un quart de l'unité ou une unité moins un quart...

Séance 2 : introduction de l'écriture fractionnaire (1 h)

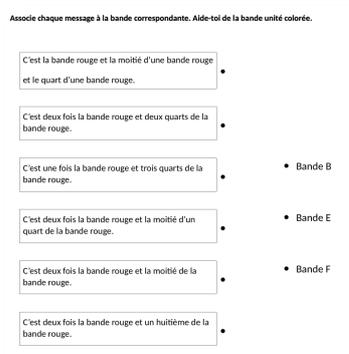
Objectifs

- Introduire la représentation symbolique d'une fraction
- Comprendre que des écritures fractionnaires différentes peuvent correspondre à une même mesure de longueur.

Avant la séance, le professeur peut, s'il le souhaite, confectionner une feuille de correspondance messages-bandes à partir des propositions des élèves. Seuls les messages clairs et ceux qui mobilisent le pliage ou des expressions de fractions dans le langage naturel sont retenus. Il peut aussi se servir de celle que nous proposons (fiche B1).

Matériel (annexes 6 à 9)

- étape B1 : matériel de la première séance : bandes unité et fiche annexe 4 ; feuille de mise en correspondance messages - bande (fiche B1 ou fiche construite par l'enseignant) ;



- étape B2 : bandes de papier B, E, F à l'échelle 4 pour afficher au tableau ; étiquettes avec chacun des messages (en version papier avec des aimants pour les tableaux traditionnels, en version électronique pour les TNI) ; bande unité à l'échelle 4
- étape D4 : fiche d'exercices d'appropriation

Code les mesures des bandes A, C et D à l'aide d'une fraction. Trouve 2 façons différentes si tu peux :

A = ; A =

C = ; C =

D = ; D =

Phase A : rappel des termes (« quart », « demi », « huitième »)

« La dernière fois, nous avons mesuré des bandes blanches en utilisant une bande unité rouge. Nous avons remarqué que pour être précis il fallait plier la bande unité :

- en 2 parts égales : on parle alors de « demi »,
- en 4 parts égales : on parle alors de « quart »,
- ou en 8 parts égales : on parle alors de « huitième ».

Vous avez écrit des messages pour indiquer la longueur de votre bande. En voici quelques-uns sur la feuille que je vous distribue. »

Phase B : recherche « associer un message à une bande »

1. Association des messages à une bande

L'enseignant explicite la consigne : « Maintenant, vous reprenez vos bandes unités (colorée) et votre feuille (fiche A4 de la séance 1). Chacun de vous essaie de retrouver le segment qui correspond au message. Attention plusieurs messages peuvent correspondre à une même bande »

2. Correction collective

(a) « À quelle bande correspond le premier message ? ». On vérifie la validité de l'association : un élève vient au tableau effectuer les pliages de la bande unité et les reports, les autres vérifient de leur place. Si la proposition est validée, le professeur déplace le message sous la bande désignée.

Ces manipulations de la bande unité sont l'occasion de verbaliser les actions de pliage-report et de s'assurer que tous les élèves les ont comprises.

(b) « Est-ce qu'il y a d'autres messages qui correspondent à la même bande ? »

On constitue ainsi, au fur et à mesure, un ensemble de messages corrects différents qui codent la mesure d'une même bande.

(c) On procède de la même façon pour les autres messages.

(d) Le professeur conclut : « Il y a plusieurs façons de désigner la mesure d'un même segment. Par exemple... »

Phase C : introduction de l'écriture fractionnaire

1. Intérêt du symbolisme et de l'écriture fractionnaire de « un demi »

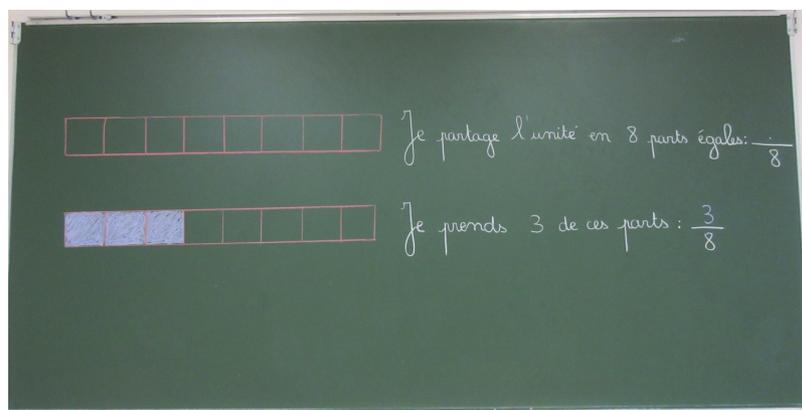
L'enseignant précise la convention d'écriture : « En mathématiques, pour exprimer une demi unité ou une moitié d'unité on écrit $\frac{1}{2}$ u, c'est plus court que de l'écrire avec des mots. »

2. Introduction de l'écriture fractionnaire.

Ensuite, l'enseignant introduit l'écriture fractionnaire avec $\frac{3}{8}$ u : « Si, comme pour le dernier segment, on partage la bande unité en 8 parts égales, on écrit $\frac{1}{8}$ u et, ensuite, comme on prend 3 parts, on écrit 1 ici : $\frac{3}{8}$ u.

Autrement dit, cette écriture signifie qu'on partage la bande unité en 8 parts égales et qu'on prend trois de ces parts. Cette écriture est une fraction. Elle se lit trois huitièmes de l'unité. »

Laisser cette trace au tableau puis en faire une affiche.



Remarque : il est très important de dire que l'on partage et non que l'on découpe l'unité en parts égales.

3. Vers la généralisation

Dans cette partie, les élèves ne disposent pas de leur bande unité, l'objectif est qu'ils explicitent le sens de l'écriture fractionnaire en terme de pliage-report sans effectuer réellement ces pliages et reports. L'enseignant montre pour chaque situation le pliage - report correspondant à la fraction.

D'abord il modélise la formulation puis progressivement il invite les élèves à formuler par eux-mêmes la signification de l'écriture fractionnaire.

(a) « Si maintenant j'écris $\frac{1}{4}$ u, qu'est-ce que ça signifie? » « Cela signifie que l'unité est partagée en 4 parts égales et qu'on prend une de ces parts. »

(b) « et cette écriture $\frac{1}{2}$ u, qu'est-ce qu'elle signifie ? » « Cela signifie que l'unité est partagée en 2 parts égales et qu'on prend une de ces parts. »

(c) « Si maintenant j'écris $\frac{3}{8}$ u, qu'est-ce que ça signifie? » « Cela signifie que l'unité est partagée en 8 parts égales et qu'on prend trois de ces parts.

(d) « Si maintenant j'écris $\frac{5}{4}$ u, qu'est-ce que ça signifie? » « Cela signifie que l'unité est partagée en 4 parts égales et qu'on prend cinq de ces parts ou plus précisément qu'on reporte 5 fois une de ces parts. »

Remarques relatives aux valeurs choisies :

1. On choisit volontairement des fractions inférieures et supérieures à une unité.
2. On choisit des fractions dont le dénominateur est 2, 4 ou 8, facilement obtenues par pliages et qui font sens pour les élèves.

Phase D : appropriation de l'écriture fractionnaire

Le but de cette phase est de faire travailler les élèves sur les relations entre pliage-report et l'écriture fractionnaire.

1. Exercice.

L'enseignant propose aux élèves de s'entraîner : « Prenez votre ardoise, votre bande unité et la fiche distribuée à la première séance. Vous allez écrire avec une fraction la mesure de la bande B. »

2. Mise en commun.

Le professeur relève les différentes réponses et demande : « qu'est-ce qui n'est pas possible ? » puis il remarque « On a plusieurs propositions qui semblent possibles pour un même segment ! Est-ce qu'il y a des erreurs ? On va vérifier. ». Il vérifie avec l'aide des élèves, en utilisant la bande rouge.

3. Synthèse

(a) L'enseignant conclut sur **l'existence de plusieurs écritures fractionnaires pour une même mesure** : « Il y a plusieurs façons d'écrire avec une fraction la mesure d'un même longueur. Par exemple pour la bande B, on peut écrire (proposer différentes écritures en fonction de ce que les élèves ont trouvé). C'est très différent de ce qui se passe avec les nombres entiers.»

(b) Il synthétise les équivalences trouvées sur une affiche.

4. Exercice d'entraînement individuel

Chaque élève code, d'une ou plusieurs façons, les 3 autres bandes de la fiche A4 de la séance 1 (bandes A, C et D) et l'enseignant relève les productions.

Phase E : Trace écrite

- L'enseignant constitue avec les élèves la trace écrite des séances 1 et 2. Elle comporte la signification de l'écriture fractionnaire ainsi des équivalences de fractions rencontrées au cours de la séance 2 (voir annexe 9). Les élèves collent leurs bandes de papier pliées dans leur cahier.

Les Fractions

Une fraction est l'écriture d'un nouveau nombre. Par exemple, le signe $\frac{3}{8} u$ signifie qu'on a partagé l'unité en 8 parts égales et qu'on a pris (ou reporté) 3 de ces parts.

$\frac{3}{8} u$

\longrightarrow

On prend 3 de ces parts

On a partagé en 8 parts égales l'unité

Les fractions permettent de mesurer précisément des longueurs.

1u

Une unité

$\frac{1}{2} u$	$\frac{1}{2} u$
-----------------	-----------------

Deux demi-unités

$\frac{1}{4} u$	$\frac{1}{4} u$	$\frac{1}{4} u$	$\frac{1}{4} u$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Quatre quarts d'unité

$\frac{1}{8} u$							
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Huit huitièmes d'unité

Une même fraction a de multiples écritures :

$$\frac{1}{2} u = \frac{1}{4} u + \frac{1}{4} u \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} u = \frac{4}{8} u \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} u = \frac{1}{4} u + \frac{2}{8} u$$

$$1u + \frac{1}{2} u = \frac{12}{8} u \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{1}{2} u = \frac{6}{4} u \quad \text{etc...}$$

Les fractions simples

Une fraction représente une unité partagée en parts égales.

2 ← On prend 2 parts (numérateur)
 8 ← On a partagé en 8 parts égales l'unité (dénominateur)

Pour mesurer des segments, on a utilisé des fractions de bande unité u .

$1u$ ou $\frac{1}{1}u$ une unité

$\frac{1}{2}u$ | $\frac{1}{2}u$ 2 demis

$\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ 4 quarts

$\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ 8 huitièmes

Une même fraction a de multiples écritures :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{10}{20} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{18}{12} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{36}{12}$$

Séance 3 : codage et décodage de fractions (1 heure)

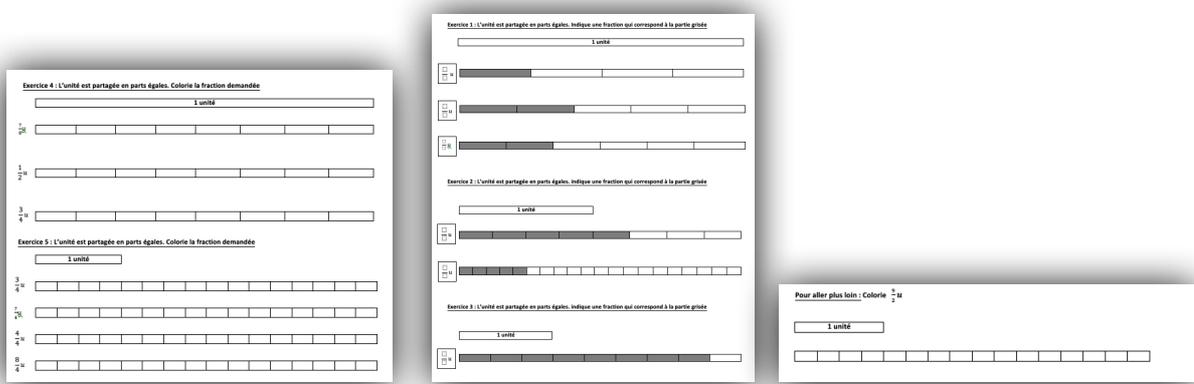
Objectifs

- Entraîner à coder/décoder des fractions pour consolider le sens de l'écriture fractionnaire
- Acquérir du vocabulaire relatif aux fractions (cinquième...).

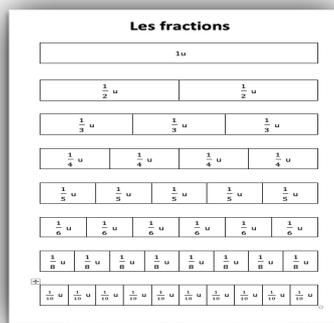
Un travail sur les équivalences de fractions renforce le sens de l'écriture fractionnaire et favorise la rupture avec les nombres entiers.

Matériel (annexes 10 et 11)

- Pour toute la séance : affiche de classe réalisée en étape D3 de la séance 2
- Phase B : fiches étapes B1, B2, B3



- Phase C : trace écrite



Phase A : rappel et entraînement sur l'ardoise

1. Rappel de la signification de l'écriture fractionnaire à partir de l'affiche de classe
 « Voici l'affiche de la séance précédente. Qui peut expliquer ce que l'on a appris la dernière fois ? »

Quatre éléments sont attendus :

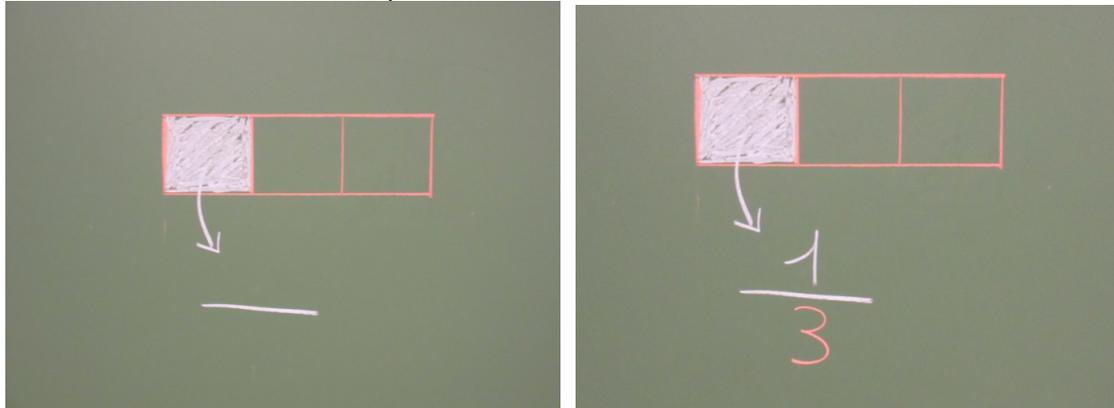
- le sens du symbolisme de l'écriture fractionnaire,
- l'idée qu'il y a plusieurs façons d'écrire un même nombre,
- le fait qu'une fraction peut être supérieure ou inférieure à une unité,
- les égalités de fractions évoquées lors de la séance 2.

2. Entraînement au décodage.

Écrire des fractions au tableau et demander aux élèves leur signification en termes de pliage et de report.

Entraînement au codage.

L'enseignant poursuit en proposant aux élèves un autre exercice : « Voici une nouvelle bande unité. Je l'ai partagée en n (n vaut 3, 5, 6... au choix de l'enseignant) parts égales, je colorie ça : à quelle fraction de l'unité cela correspond t-il ? Ecrivez-le sur votre ardoise. »



Ici on a choisi de faire écrire et non lire la fraction car il s'agit prioritairement de travailler sur ce codage ; des élèves peuvent mal dire la fraction mais l'écrire correctement.

Écrire quelques propositions des élèves au tableau (des correctes et des non correctes). Les nommer. Discuter ces différentes propositions pour éliminer les erreurs. On reviendra à chaque fois au symbolisme et à son sens.

Valeurs proposées pour le codage :

- **des fractions inférieures à une unité :** $\frac{1}{6}u$; $\frac{7}{8}u$; $\frac{3}{5}u$; $\frac{2}{3}u$.

On choisit des fractions pour lesquelles il n'existe pas d'équivalence facile (comme $\frac{1}{2}u = \frac{2}{4}u$) et plutôt des fractions qui vont permettre d'introduire des termes nouveaux : tiers, cinquièmes, sixièmes.

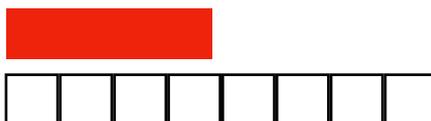
Pour chaque proposition, il est très important préciser que l'on partage et non que l'on découpe l'unité en n parts égales.

- **des fractions inférieures à une unité pour lesquelles plusieurs écritures sont facilement envisageables :** $\frac{1}{2}u$; $\frac{2}{6}u$; $\frac{6}{6}u$. La dernière proposition est l'occasion d'introduire l'égalité

$$\frac{6}{6}u = 1u.$$

- **des fractions supérieures à une unité.**

« Maintenant je prends une bande plus grande. Elle mesure 2 unités. Je partage chaque unité en parts égales. Si je colorie ça, à quelle fraction de l'unité cela correspond t-il ? »



(ce partage peut laisser penser que chaque part représente $\frac{1}{8}u$, erreur classique)

Valeurs proposées (valeurs inférieures et supérieures à une unité, où plusieurs écritures sont facilement envisageables) : $\frac{1}{4}u$ (attention erreur possible : $\frac{1}{8}u$) ; $\frac{3}{4}u$ (erreur possible : $\frac{3}{8}u$) ; $\frac{6}{4}u$.

Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

Lister les réponses et les écrire au tableau.

Revenir au pliage si nécessaire pour montrer les équivalences de fractions ainsi que les équivalences entre une fraction et une décomposition sous la forme d'un entier et d'une fraction).

Phase B : entraînement individuel

Entraînement individuel sur papier qui sera ramassé. Les erreurs, les différentes propositions permettront de lever des malentendus et de travailler sur les équivalences de fractions.

Pour donner à chaque élève la possibilité de mobiliser les connaissances visées, il est conseillé de faire les exercices un à un en accompagnant les élèves et de les corriger au fur et à mesure.

1. Exercices de codage : exercices 1, 2 et 3 de l'annexe 10. On propose une unité et des dessins de bandes de papier avec une partie coloriée, les élèves doivent indiquer une fraction correspondante.

2. Exercices de décodage : exercice 4, 5 et 6 de l'annexe 10

On propose une bande unité et des dessins de bandes unité partagées en n parts égales ou de plusieurs bandes unités mises bout à bout et chacune partagée en parts égales, l'élève doit colorier la fraction demandée.

Il est important ici de proposer des longueurs de plus de 2 unités.

Prévoir une correction collective au fur et à mesure pour lever les malentendus et consolider les connaissances.

3. Exercice « pour aller plus loin ».

Les élèves auront à faire face à deux difficultés :

- la fraction est exprimée en demi et l'unité est partagée en 4 parts égales

- la bande dessinée n'est pas assez longue pour représenter $\frac{9}{2}u$. Les élèves devront dessiner la demie unité manquante.

Phase C : trace écrite

Proposer aux élèves la trace écrite sur les fractions (annexe 11).

Séance 4 : décomposition de fractions (1 h)

Objectifs

- Comprendre qu'une fraction de type $\frac{n}{n}$ est égale à une unité.
- Décomposer une fraction en un entier et une fraction, et inversement.

Dans cette séance, on travaille les égalités de fractions et les écritures additives impliquant un nombre entier et une fraction dans le contexte des longueurs.

Matériel (annexe 12)

- Phase A : fiche de recherche

$\frac{7}{7}u$	$\frac{1}{2}u$	$\frac{3}{2}u$	$1u + \frac{7}{3}u$
$\frac{2}{4}u$	$1u + \frac{1}{2}u$	$\frac{10}{3}u$	$1u$
$\frac{6}{4}u$	$\frac{10}{10}u$	$2u + \frac{4}{3}u$	$\frac{4}{8}u$

Pour les plus rapides :

$\frac{50}{100}u$	$2u - \frac{1}{2}u$
-------------------	---------------------

- Phase B : fiche d'exercices d'entraînement

1. Colorie de la même couleur les fractions qui sont équivalentes :

$\frac{10}{4}u$	$\frac{2}{5}u$	$2u + \frac{1}{3}u$	$\frac{2}{3}u$
$\frac{4}{10}u$	$\frac{5}{2}u$	$\frac{1}{5}u + \frac{1}{5}u$	$\frac{4}{6}u$
$\frac{7}{3}u$	$3u - \frac{2}{3}u$	$2u + \frac{1}{2}u$	$2u + \frac{2}{4}u$

2. Trouve au moins trois fractions équivalentes aux fractions proposées :

$\frac{10}{10}u = \dots = \dots = \dots$

$3u + \frac{2}{4}u = \dots = \dots = \dots$

$\frac{13}{5}u = \dots = \dots = \dots$

Phase A : recherche « premières recherches d'équivalence »

1. Présentation de la situation

L'enseignant présente la situation de recherche : « Voici des écritures fractionnaires qui correspondent à des mesures des longueurs de bandes de papier. Je vous propose de colorier de la même couleur les étiquettes qui correspondent à la même mesure. »

Si besoin, renvoyer les élèves à la trace écrite de la séance précédente.

Pour les élèves qui n'arrivent pas à démarrer, proposer de colorier les étiquettes de la première ligne de 4 couleurs différentes (voir fiche A1).

Au bout de quelques minutes, corriger collectivement les équivalences pour $\frac{7}{7}u$.

Solutions :

- $\frac{7}{7}u; 1u; \frac{10}{10}u$
- $\frac{1}{2}u; \frac{2}{4}u; \frac{4}{8}u; (\frac{50}{100}u)$

$$- 1u + \frac{1}{2}u; \frac{3}{2}u; \frac{6}{4}u; (2u - \frac{1}{2}u)$$

$$- 2u + \frac{1}{3}u; 1u + \frac{1}{3}u; \frac{10}{3}u$$

2. Mise en commun

(a) Organiser une correction collective. Faire vérifier les égalités à l'aide de bandes au tableau. Au cours de cette mise en commun, faire expliciter les procédures des élèves et accompagner à la formulation, par exemple, en disant, « si je partage ma bande unité en 7 parts égales et que je prends 7 de ces parts, c'est comme si je prenais une unité. »

(b) En conclusion, revenir à la trace écrite de la séance 2 du cahier que l'on complète avec :

• $\frac{7}{7}u$ c'est comme $1u$, $\frac{10}{10}u$ c'est comme une unité. Ces fractions sont équivalentes, on écrit

$$\frac{7}{7}u = \frac{10}{10}u = 1u.$$

• $1u + \frac{1}{2}u$ c'est comme $\frac{3}{2}u$. Ces fractions sont équivalentes, on écrit $1u + \frac{1}{2}u = \frac{3}{2}u$.

• $2u - \frac{1}{2}u$ c'est comme $\frac{3}{2}u$. Ces fractions sont équivalentes, on écrit $2u - \frac{1}{2}u = \frac{3}{2}u$.

• On peut exprimer une mesure de longueur de différentes façons :

- avec un nombre entier (quand c'est possible)
- avec une fraction
- avec un nombre entier et une fraction

Phase B : entraînement individuel

Avant cette phase d'entraînement il peut être intéressant de proposer aux élèves de faire un exercice du même type sur l'ardoise afin de préparer à la phase d'exercices individuels. En effet, dans cet exercice le contexte des mesures est implicite. Si des élèves sont en difficulté, on peut leur proposer de revenir au contexte de la mesure.

1. Exercice n°1 : trouver les fractions équivalentes dans une liste donnée

(a) Renvoyer à la trace écrite du cahier et prévoir des bandes unités déjà marquées, à proposer aux élèves en cas de difficulté (voir annexe 11).

(b) Correction collective et verbalisation des équivalences : « c'est comme ».

Pour les fractions qui posent problème, démontrer les équivalences en revenant au pliage de bandes et reports. Mais essayer le plus possible de recourir à des faits d'équivalence plutôt qu'au matériel, en s'appuyant sur la trace écrite du cahier. Par exemple

- pour prouver que $\frac{10}{4}u$ c'est comme $\frac{5}{2}u$ on peut dire que $\frac{10}{4}u$ c'est comme 2 unités et

encore deux quarts de u , c'est-à-dire comme deux unités et deux quarts de l'unité ou encore comme 2 unités et une demie unité

- pour prouver que $\frac{4}{10}u$ c'est comme $\frac{2}{5}u$, on peut dire que $\frac{4}{10}u$ c'est 2 dixièmes de u et encore

2 dixièmes de u . Comme 2 dixièmes de u c'est comme un cinquième de u , $\frac{4}{10}u$ c'est comme $\frac{2}{5}u$.

- pour prouver que $\frac{10}{4}u$ c'est différent de $\frac{4}{10}u$, on peut dire que $\frac{10}{4}u$ est plus grand que 1 et

$\frac{4}{10}u$ plus petit que 1.

2. Exercice n°2 : proposer au moins trois fractions équivalentes à une fraction donnée

(a) recherche individuelle

(b) correction individuelle ou collective avec mise en évidence des équivalences trouvées.

Séance 5 : découverte et utilisation d'autres fractions (45 min.)

Objectif

- Utiliser les fractions, inférieures ou supérieures à 1, dans différents contextes (aire, partage...).

Il s'agit ici d'utiliser des fractions, inférieures et supérieures à une unité, dans différents contextes et représentations.

La difficulté observée comme récurrente chez les élèves est le repérage de l'unité.

Par conséquent, nous proposons de mettre en évidence (surligner, colorier...) et expliciter l'unité.

Matériel (annexe 14)

- Phase B : fiche d'exercices d'entraînement

Phase A : introduction des différents contextes

Introduire la situation auprès des élèves en faisant le lien avec ce qui a été vu lors des séances précédentes :

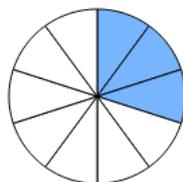
« Depuis plusieurs séances nous utilisons les fractions pour mesurer avec précision des longueurs de bandes de papier. Aujourd'hui, nous allons utiliser les fractions dans de nouveaux contextes. »

Différentes situations sont proposées au tableau, les élèves répondent sur l'ardoise. Les réponses recueillies sont discutées.

Bien préciser à chaque fois quelle est l'unité pour éviter les malentendus.

Situations proposées :

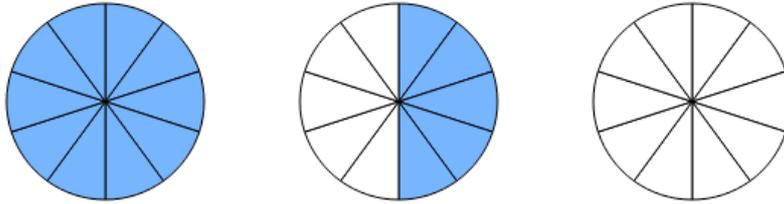
(a) « Je considère cette pizza comme l'unité. Je la partage en 10 parts égales puis je colorie des parts comme ça. À quelle fraction de l'unité correspond la partie colorée ? »



Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

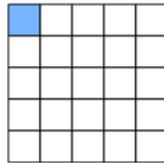
Commentaire possible : « Chaque part correspond à $\frac{1}{10}u$. Je colorie 3 parts, donc $\frac{3}{10}u$ ».

(b) Maintenant, mon unité est toujours cette pizza et je la partage toujours en 10. Je colorie de la façon suivante. À quelle fraction de l'unité correspond la partie coloriée ?



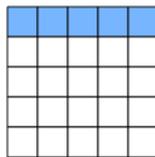
Commentaire possible : « Chaque part correspond à $\frac{1}{10}u$. J'ai colorié 15 parts, cela fait $\frac{15}{10}u$ ou $1u$ et $\frac{5}{10}u$ ou encore $1u$ et $\frac{1}{2}u$ » (et non $\frac{15}{30}u$).

(c) Voici un carré qui représente une unité. Il est partagé en parts égales. À quelle fraction de l'unité correspond la partie coloriée ?



Commentaire possible : « Le grand carré est partagé en 25 petits carrés identiques, chacun représente donc $\frac{1}{25}u$. »

4/ idem avec ce quadrillage :



Commentaires possibles : « Chaque petit carré représente $\frac{1}{25}u$. J'en colorie 5, c'est $\frac{5}{25}u$ » et

« Le grand carré est partagé en 5 barres de 5 carrés identiques. Chaque barre vaut $\frac{1}{5}u$. J'ai colorié une barre, c'est donc aussi $\frac{1}{5}u$. »

Phase B : entraînement

Ce travail peut être réalisé individuellement par les élèves ou par groupe afin de favoriser des échanges verbaux. L'enseignant peut également faire ce travail avec un groupe d'élèves plus en difficulté en étayant si nécessaire.

On peut vérifier si les élèves repèrent bien l'unité dans chacune des propositions en leur demandant de la mettre en évidence.

Solutions pour les exercices :

$$1a) \frac{6}{10}u \text{ ou encore } \frac{1}{2}u + \frac{1}{10}u \text{ ou } 1u - \frac{4}{10}u \text{ (et non } \frac{6}{30}u)$$

$$1b) 1u \text{ ou encore } \frac{6}{6}u \dots \text{ et non } \frac{1}{3}u$$

$$3a) \frac{30}{25}u \text{ ou } 1u \text{ et } \frac{5}{25}u \text{ ou } 1u \text{ et } \frac{1}{5}u.$$

$$3b) \frac{10}{100}u \text{ ou } \frac{1}{10}u$$

$$3c) \frac{150}{100}u \text{ ou } 1u \text{ et } \frac{1}{2}u \text{ ou } 1u \text{ et } \frac{50}{100}u$$

$$3d) \frac{50}{100}u = \frac{1}{2}u = \frac{5}{10}u$$

Phase C : bilan

L'enseignant peut choisir un exercice qui a posé plus de problème et le proposer en correction collective dans le but de faire émerger les différentes procédures des élèves.

Les questions qui peuvent guider ce moment sont : « quelle est l'unité ici ? Comment est-elle partagée ? Combien de parts sont coloriées ? »

On peut terminer cette séance en demandant aux élèves ce qu'ils ont appris.

Séance 6 : placer des fractions sur une droite graduée (45 min.)

Objectif

- placer des fractions sur une droite graduée, en dehors de tout contexte de mesure explicite, pour donner petit à petit à la fraction un statut de nombre et travailler sur l'ordre des nombres rationnels

Il est souhaitable d'entraîner régulièrement les élèves aux types d'exercices proposés dans cette séance.

Matériel (annexes 15 à 17)

Les droites proposées dans cette séance sont réalisées à partir du site <http://micetf.fr/Fractions/generateur/#ligne> et à partir du site <https://www.geogebra.org/m/yG4N8cVd>.

- Phase A : fiche d'exercices annexe 15

Exercice 1 - Place les nombres 4 et 10 et indique à quel nombre correspondent les flèches.

Exercice 2 - Place 0 et 6 et indique à quel nombre correspond la flèche.

Exercice 3 - Indique les nombres correspondant aux flèches.

- Phase B : fiche d'exercices (annexe 16)

Exercice 1 : Indique les nombres qui correspondent aux flèches.

Exercice 2 : Place les nombres $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{3}$, 2 sur cette droite graduée.

Exercice 3 : Place les nombres $\frac{30}{3}$, $\frac{22}{2}$, $\frac{24}{2}$.

- Phase C : fiche d'exercices (annexe 17)

Place chaque fraction sur la droite graduée puis complète le tableau.

$\frac{5}{4}$... $\frac{5}{4}$...	$\frac{5}{4}$ = ... + ...
$\frac{1}{4}$... $\frac{1}{4}$...	$\frac{1}{4}$ = ... + ...
$\frac{3}{2}$... $\frac{3}{2}$...	$\frac{3}{2}$ = ... + ...
$\frac{10}{4}$... $\frac{10}{4}$...	$\frac{10}{4}$ = ... + ...

Phase A : comprendre les conventions de la droite graduée

Cette phase peut être réalisée la veille ou en introduction.

Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

Il s'agit de rappeler, à partir d'un travail avec les nombres entiers, les conventions d'une droite graduée avant de proposer aux élèves de placer des fractions sur une telle droite, à savoir :

- Un espace entre deux graduations (traits sur la droite) / un intervalle ne correspond pas (toujours) à une unité.
- La première graduation (le premier trait dessiné) ne correspond pas toujours à 0.
- Pour calculer la valeur d'un intervalle on fait la différence entre les nombres qui correspondent à des repères consécutifs sur la droite graduée (illustrer avec un exemple aux élèves)
- S'il n'y a pas deux nombres correspondant à deux repères consécutifs on fait la différence entre 2 nombres et on divise par le nombre d'intervalles entre les repères associés à ces nombres.

Travail individuel avec correction des exercices au fur et à mesure au tableau, avec explication de l'enseignant.

Précisions sur les exercices :

- Exercice 1. : on commence à 0, un intervalle = une unité
- Exercice 2 : un intervalle = une unité, impossible de placer 0 car la graduation démarre à 1, cela permet de remarquer que la première graduation ne correspond pas toujours 0.
- Exercice 3 : début à 0, 4 unités pour 2 intervalles, un intervalle = 2 unités, erreur possible : placer 5 après 4, puis 6 juste avant 10, le fait d'avoir à placer le nombre après 10 devrait faire réagir.

Phase B : placer des fractions sur une droite graduée

Le travail se poursuit avec des nombres rationnels.

Travail individuel avec correction des exercices au fur et à mesure au tableau et explications de l'enseignant.

Précisions sur les exercices :

- Exercice 1a : on débute à 0, un intervalle égal $\frac{1}{2}$, l'unité est donnée
- Exercice 1b : début à 0 ; un intervalle correspond à un quart ; plusieurs expressions possibles pour la 2ème flèche : $1 + \frac{3}{4}$ ou $\frac{7}{4}$.
- Exercice 2a : on ne débute pas à 0, l'intervalle doit être calculé avec des fractions qui n'ont pas le même dénominateur mais à partir d'un seul intervalle.
- Exercice 3 : on ne débute pas à 0 ; l'intervalle doit être calculé à partir d'entiers mais quatre intervalles pour 2 unités ; fraction exprimées avec des quarts et des tiers alors qu'on a gradué en demi ; les deux dernières fractions sont là pour mettre en évidence qu'on peut partir de $\frac{22}{2}$ pour trouver $\frac{24}{2}$ mais aussi de l'idée que $\frac{24}{2}$ c'est 12.

Phase C : encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs

L'enseignant reprend l'exercice 2 de la phase B et fait remarquer en situant les points sur la droite : « 2 c'est 4 demis, 3 c'est 6. Il y a des fractions qui correspondent à des nombres entiers. Mais il

y a aussi des fractions qui ne correspondent pas à des nombres entiers. Par exemple $\frac{5}{2}$ n'est pas

un entier. Il est compris entre deux entiers : 2 et 3. C'est 2 et un demi : $2 + \frac{1}{2}$. On a décomposé

la fraction $\frac{5}{2}$ la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1. On peut toujours faire ainsi. Par exemple ... »

Travail individuel sur fiche C et correction collective.

Séance 7 : utiliser des fractions dans des problèmes (45 min.)

Objectif :

- Résoudre des problèmes impliquant les fractions

Il s'agit ici de poursuivre le travail des fractions dans différents contextes dont celui de la résolution de problèmes numériques où la fraction joue le rôle d'opérateur (on prend par exemple un cinquième d'un paquet de bonbons).

Il est difficile pour l'élève d'appréhender l'unité dans ces situations car elle peut correspondre à une quantité bien supérieur à 1, par exemple une salle de cinéma qui comprend 250 places. La représentation mentale de la situation est primordiale pour accéder à la signification des fractions et à leur utilisation dans la résolution de chacun des problèmes.

Nous proposons pour cela une représentation de la situation sous la forme d'une bande. Cette représentation a pour nous trois avantages : 1/ elle renvoie au sens de la fraction tel qu'il a été construit dans la séquence ; 2/ elle permet une représentation rapide de la situation (par rapport à une représentation des objets un à un par exemple) ; 3/ elle est utilisable même quand les quantités en jeu ne sont pas des entiers (par exemple si le problème évoque les deux tiers de 83 !).

Nombreux seront les élèves qui auront besoin d'utiliser des schémas ou du matériel pour se représenter la situation.

Dans cette séance, le choix est fait d'utiliser des nombres qui appartiennent à des résultats multiplicatifs connus ou faciles d'accès par une multiplication à trous afin de ne pas assimiler dès le CM1 les fractions à de simples divisions.

Matériel (annexe 18)

- Phase C : fiche d'exercices avec les problèmes

a) Dans un petit cinéma, il y a 60 fauteuils. Le tiers de ces fauteuils est à remplacer.

Combien de fauteuils cela représente-t-il ?

b) Dans un parking, il y a 100 places. La moitié des places sont réservées aux commerçants.

Combien reste-t-il de places disponibles pour les autres personnes ?

Pour les plus rapides :

c) Monsieur Bernier est boulanger. Tous les jours, il prépare 80 pains au chocolat. Aujourd'hui, il en a vendu seulement les trois quarts.

Combien de pains au chocolat n'ont pas été vendus ?

d) Tom a déjà avalé $\frac{17}{4}$ de tartelettes et voici ce qu'il lui reste.

Combien de tartelettes entières a-t-il avalées ?

Combien en avait-il au début ?

e) J'ai lu un tiers de la moitié de mon livre qui fait 1200 pages.

A quelle page suis-je rendu ?

Phase A : présentation d'un premier problème

Expliquer aux élèves l'utilité des fractions : « Jusqu'ici on a utilisé des fractions pour mesurer des longueurs ou des aires. Les fractions peuvent nous aider à résoudre d'autres problèmes. Par exemple :

Tom a 30 bonbons. Il en mange $\frac{1}{5}$. Combien de bonbons mange t-il ? »

L'enseignant laisse un temps de recherche aux élèves et organise la correction de la façon suivante.

Il représente les 30 bonbons à l'aide d'une bande, puis partage la bande en 5 parts égales.



Il précise : « 30 est l'unité que l'on partage en 5 parts égales. On cherche combien vaut un cinquième. Pour cela, on cherche dans la table de 5 le nombre qui multiplié par 5 donne 30. C'est 6. » puis complète :

30				
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
6	6	6	6	6

Phase B : entraînement collectif

Ces problèmes peuvent être proposés à l'oral, au tableau. La résolution peut se faire par 2, sur l'ardoise ou en individuel.

Pour la correction on reprend la présentation et les formulations analogues à celles utilisées en phase A.

Problème 1 : Un livreur doit distribuer 400 magazines pendant sa tournée. Il dépose un quart de sa livraison à la librairie du centre. Combien lui reste t-il de magazines à livrer ?

Problème 2 : Sonia a mangé les $\frac{3}{5}$ d'une pizza pesant 250g. Quelle est la masse de ce qu'elle a mangé ?

Problème 3 : Il ne reste plus que 56 tigres au Pakistan. $\frac{3}{8}$ sont des mâles. Combien y- a- t- il de femelles ?

Phase C : entraînement individuel

Résolution des problèmes de la feuille en individuel puis par 2.

Énoncés des problèmes de la fiche C :

Fractions au CM1 - IREM des Pays de la Loire

- a) Dans un petit cinéma, il y a 60 fauteuils. Le tiers de ces fauteuils est à remplacer. Combien de fauteuils cela représente-t-il ?
- b) Dans un parking il y a 100 places. La moitié de ces places sont réservées aux commerçants d'un immeuble. Combien reste-t-il de places disponibles pour les autres personnes ?
- c) (pour les plus rapides) Monsieur Bernier est boulanger. Tous les jours il prépare 80 pains au chocolat. Aujourd'hui il en a vendu seulement les trois quarts. Combien de pain au chocolat n'ont pas été vendus ?
- d) L'orge a déjà avalé $\frac{17}{4}$ des tartelettes et voici ce qu'il lui reste. Combien de tartelettes entières a t-il avalées ? Combien en avait-il au début ?
- e) J'ai lu un tiers de la moitié de mon livre qui fait 1200 pages. À quelle page suis-je rendu ?

Phase D : bilan

Organiser la mise en commun des réponses et/ou corriger un problème pour lequel les élèves auront rencontré des difficultés.

On pourra proposer comme trace écrite un exemple de problème corrigé.

Activités ritualisées

Différents petits rituels impliquant des fractions peuvent être proposés aux élèves dans le cadre d'une organisation de classe utilisant ces moments habituellement ou sur un temps de calcul mental ou en « échauffement » lors des séances de mathématiques.

Il s'agit de reprendre des petits exercices que les élèves connaissent et qui ne prennent pas beaucoup de temps.

Cet entraînement permet d'asseoir le concept de fraction et d'acquérir certains automatismes indispensables pour faire gagner du temps à l'élève dans des situations plus complexes.

« La fraction du jour »

Une écriture fractionnaire est proposée par l'enseignant, les élèves doivent :

- la dire ou l'écrire en lettres ;
- en proposer une écriture fractionnaire équivalente ;
- pour une fraction supérieure à l'unité, trouver une égalité sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 ;
- pour une fraction inférieure à l'unité, trouver le complément pour arriver à 1 ;
- l'encadrer par deux entiers, consécutifs ou pas ;
- la représenter en coloriant une partie de quadrillage ou de disque... ;
- la placer sur une droite graduée.

Codage et décodage de fractions

Reprendre les exercices de la séance 3 phase A avec d'autres valeurs.

Utiliser d'autres représentations de l'unité comme lors de la séance 5.

Sur l'utilisation de fractions dans différents contextes

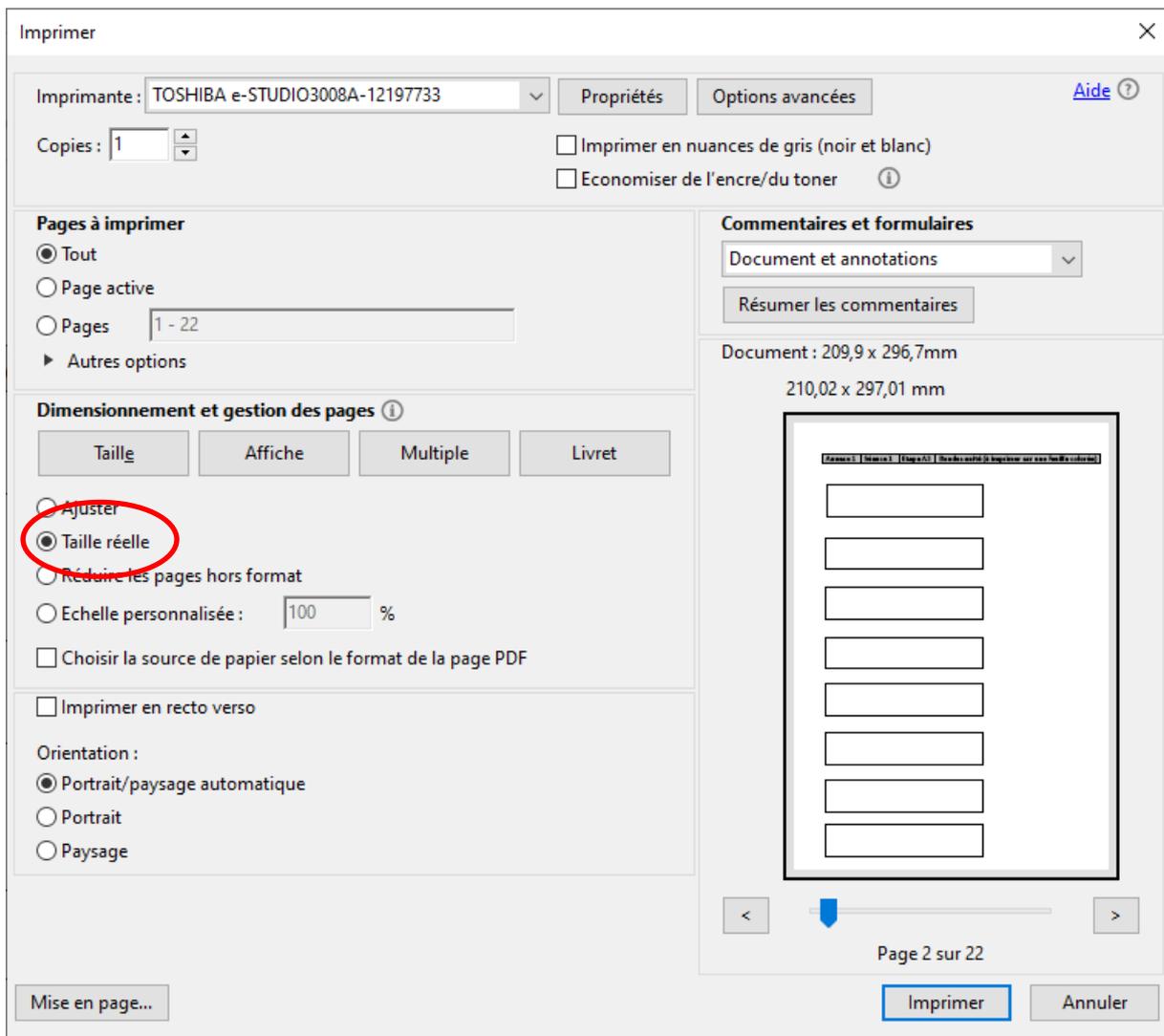
Des petits problèmes numériques sous forme écrite ou orale pourront être proposés.

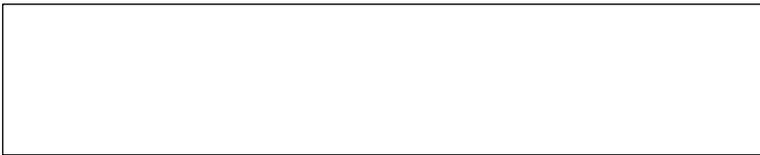
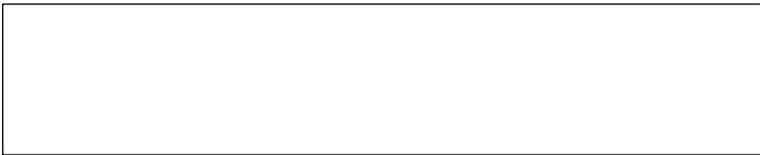
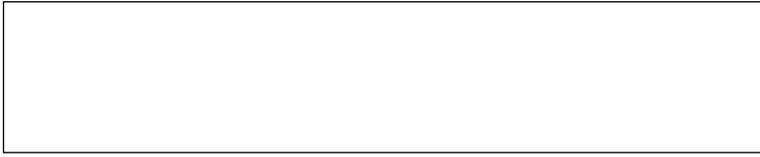
Il existe également différents jeux et matériel qui permettent de s'entraîner de façon un peu plus ludique : réglettes Cuisenaire ; carrés fractionnés ; disques fractionnés...

ANNEXES

Avertissement :

Pour imprimer les documents en conservant les mesures, vous devez impérativement vérifier avant de lancer l'impression que le dimensionnement des pages est bien en taille réelle (sans mise à l'échelle ou sans ajuster).





Blank rectangular box for student use.

Blank rectangular box for student use.

Blank rectangular box for student use.

Prénoms du binôme :

Message pour trouver notre bande :

Message reçu par :

Réponse :

Nous avons trouvé votre bande : c'est la bandecar.....

Nous n'avons pas trouvé votre bande car

A

B

C

D

E

F

Code les bandes suivantes en utilisant la bande rouge :

G

G =

H

H =

Associe chaque message à la bande correspondante. Aide-toi de la bande unité colorée.

C'est la bande rouge et la moitié d'une bande rouge et le quart d'une bande rouge.

•

C'est deux fois la bande rouge et deux quarts de la bande rouge.

•

C'est une fois la bande rouge et trois quarts de la bande rouge.

•

• Bande B

C'est deux fois la bande rouge et la moitié d'un quart de la bande rouge.

•

• Bande E

C'est deux fois la bande rouge et la moitié de la bande rouge.

•

• Bande F

C'est deux fois la bande rouge et un huitième de la bande rouge.

•



Je partage l'unité en 8 parts égales: $\frac{1}{8}$



Je prends 3 de ces parts: $\frac{3}{8}$

Code les mesures des bandes A, C et D à l'aide d'une fraction. Trouve 2 façons différentes si tu peux :

A = ; A =

C = ; C =

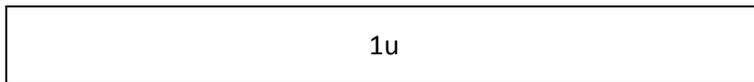
D = ; D =

Les Fractions

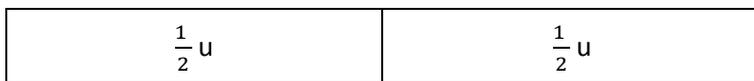
Une fraction est l'écriture d'un nouveau nombre. Par exemple, le signe $\frac{3}{8} u$ signifie qu'on a partagé l'unité en 8 parts égales et qu'on a pris (ou reporté) 3 de ces parts.

$$\frac{3}{8} u \begin{array}{l} \longrightarrow \text{On prend 3 de ces parts} \\ \longrightarrow \text{On a partagé en 8 parts égales l'unité} \end{array}$$

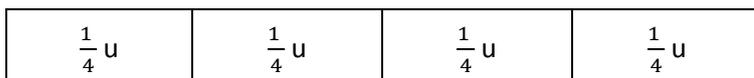
Les fractions permettent de mesurer précisément des longueurs.



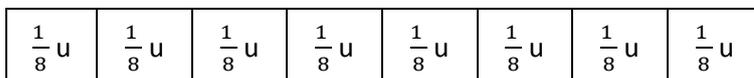
Une unité



Deux demi-unités



Quatre quarts d'unité



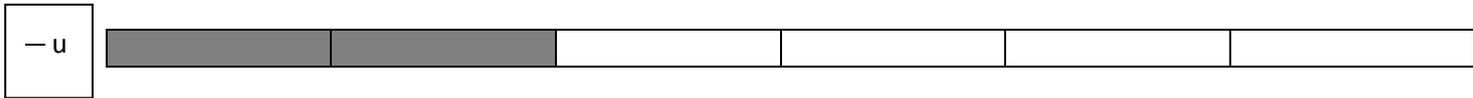
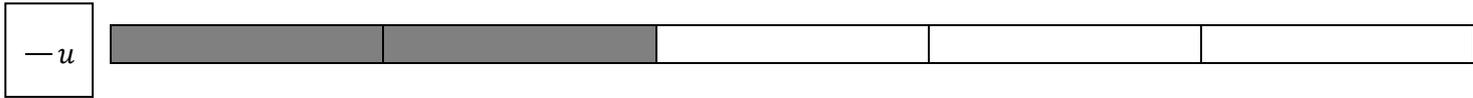
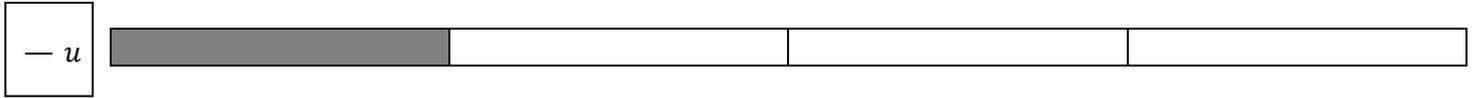
Huit huitièmes d'unité

Une même fraction a de multiples écritures :

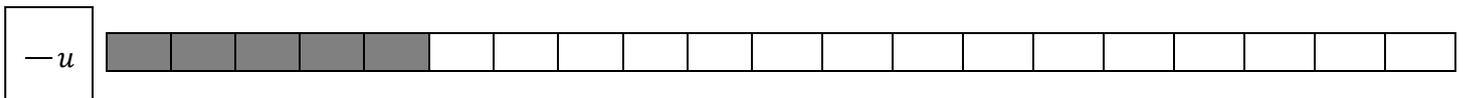
$$\frac{1}{2} u = \frac{1}{4} u + \frac{1}{4} u \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} u = \frac{4}{8} u \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} u = \frac{1}{4} u + \frac{2}{8} u$$

$$1 u + \frac{1}{2} u = \frac{12}{8} u \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{1}{2} u = \frac{6}{4} u \quad \text{etc...}$$

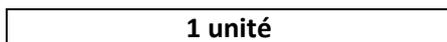
Exercice 1 : indique une fraction qui correspond à la partie grisée



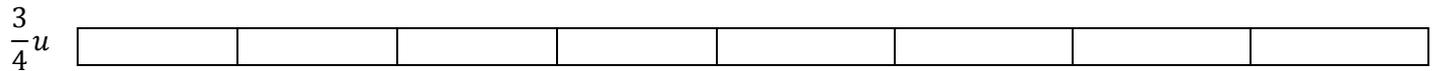
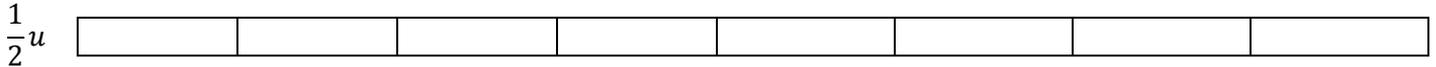
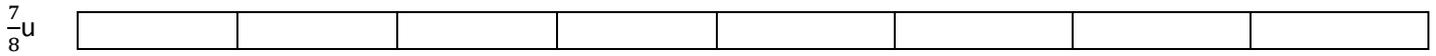
Exercice 2 : indique une fraction qui correspond à la partie grisée



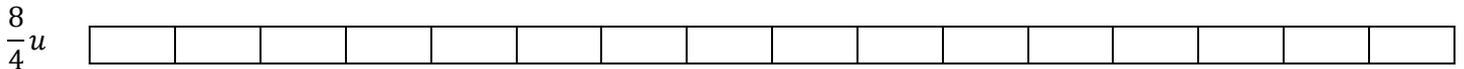
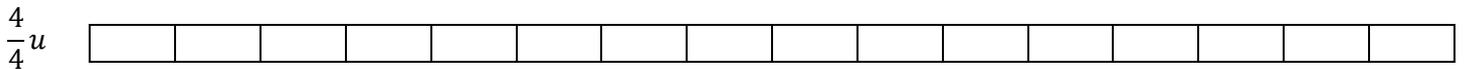
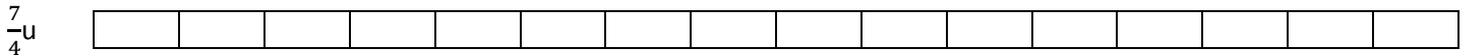
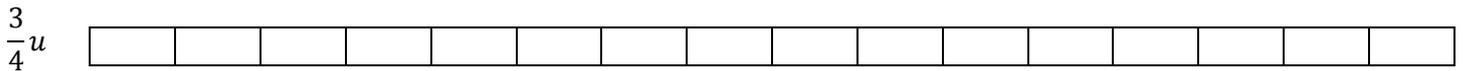
Exercice 3 : indique une fraction qui correspond à la partie grisée



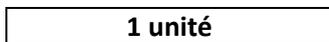
Exercice 4 : Colorie la fraction demandée



Exercice 5 : Colorie la fraction demandée



Pour aller plus loin : Colorie $\frac{9}{2}u$



Les fractions

1u

$\frac{1}{2} u$	$\frac{1}{2} u$
-----------------	-----------------

$\frac{1}{3} u$	$\frac{1}{3} u$	$\frac{1}{3} u$
-----------------	-----------------	-----------------

$\frac{1}{4} u$	$\frac{1}{4} u$	$\frac{1}{4} u$	$\frac{1}{4} u$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

$\frac{1}{5} u$				
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

$\frac{1}{6} u$					
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

$\frac{1}{8} u$							
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

$\frac{1}{10} u$									
------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

Colorie de la même couleur les étiquettes qui correspondent à la même mesure :

$$\frac{7}{7} u$$

$$\frac{1}{2} u$$

$$\frac{3}{2} u$$

$$1 u + \frac{7}{3} u$$

$$\frac{2}{4} u$$

$$1 u + \frac{1}{2} u$$

$$\frac{10}{3} u$$

$$1 u$$

$$\frac{6}{4} u$$

$$\frac{10}{10} u$$

$$2 u + \frac{4}{3} u$$

$$\frac{4}{8} u$$

Pour les plus rapides :

$$\frac{50}{100} u$$

$$2 u - \frac{1}{2} u$$

1. Colorie de la même couleur les fractions qui sont équivalentes :

$\frac{10}{4} u$	$\frac{2}{5} u$	$2u + \frac{1}{3} u$	$\frac{2}{3} u$
$\frac{4}{10} u$	$\frac{5}{2} u$	$\frac{1}{5} u + \frac{1}{5} u$	$\frac{4}{6} u$
$\frac{7}{3} u$	$3u - \frac{2}{3} u$	$2u + \frac{1}{2} u$	$2u + \frac{2}{4} u$

2. Trouve des fractions équivalentes aux fractions proposées :

$$\frac{10}{10} u = \dots\dots\dots$$

$$3u + \frac{2}{4} u = \dots\dots\dots$$

$$\frac{13}{5} u = \dots\dots\dots$$

Pour les plus rapides :

3. Trouve d'autres fractions équivalentes aux fractions proposées :

$$\frac{10}{10} u = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$3u + \frac{2}{4} u = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\frac{13}{5} u = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

Aide pour les élèves en difficultés :

--	--	--	--

--	--	--	--

--	--	--	--

--	--	--	--

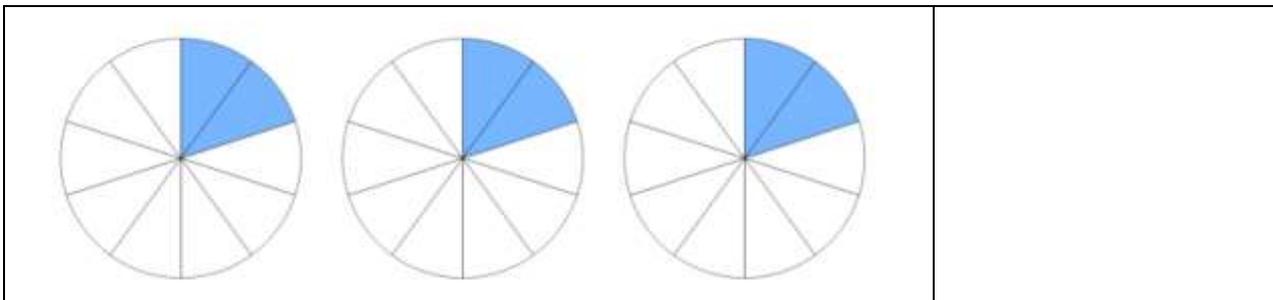
--	--	--	--

--	--	--	--

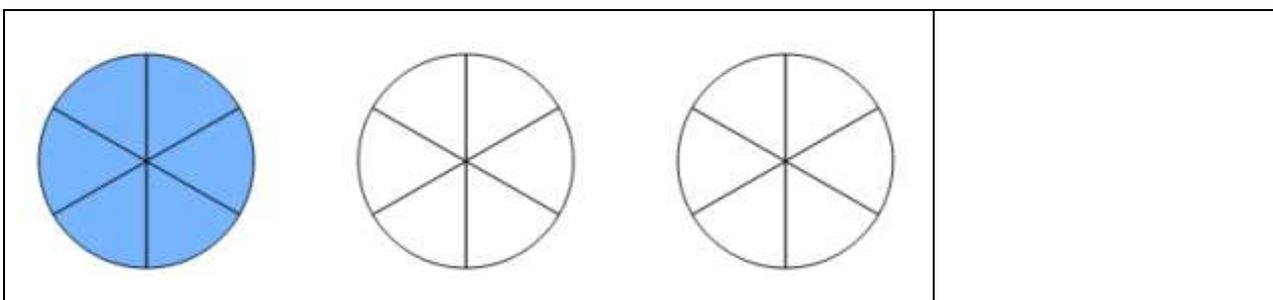
--	--	--	--

1. L'unité est la pizza. Trouve au moins deux fractions qui correspondent à la partie colorée :

a)



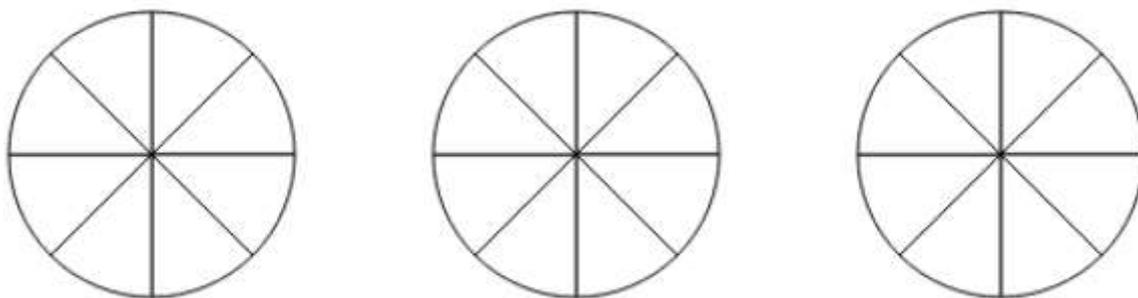
b)



2. Chaque pizza représente une unité :

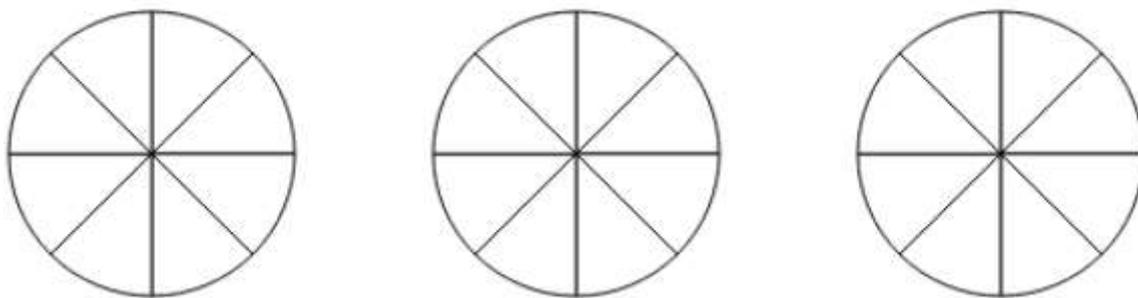
a)

Colorie une façon de faire $\frac{6}{8}u$

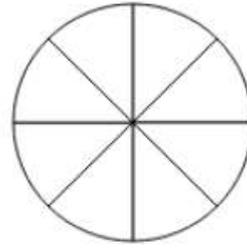
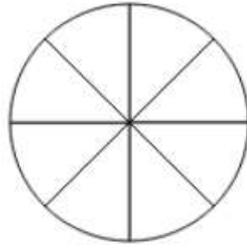
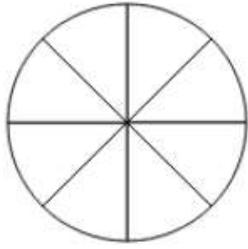


b)

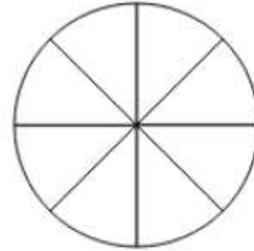
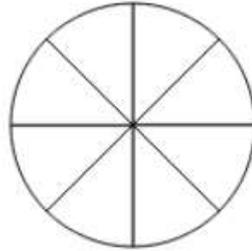
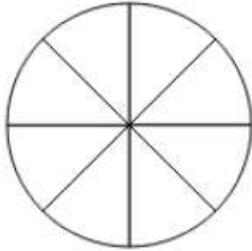
Trouve une autre façon de colorier $\frac{6}{8}u$



c) Colorie une façon de faire $\frac{3}{4}u$

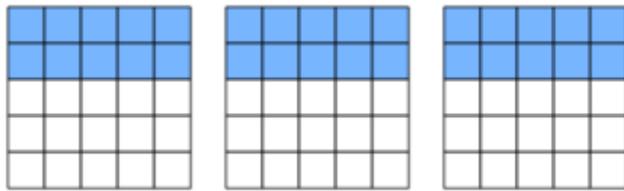


d) Trouve une autre façon de faire $\frac{3}{4}u$

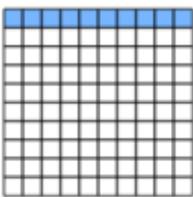


3) L'unité est le grand carré. Trouve au moins deux fractions qui correspondent à la partie colorée :

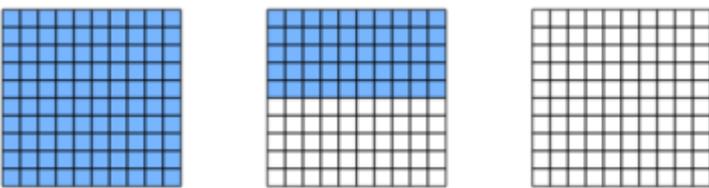
a)



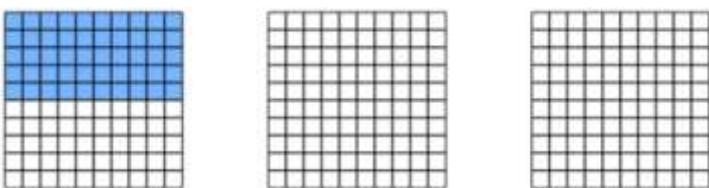
b)



c)

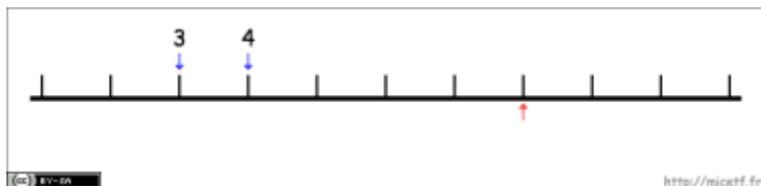


d)

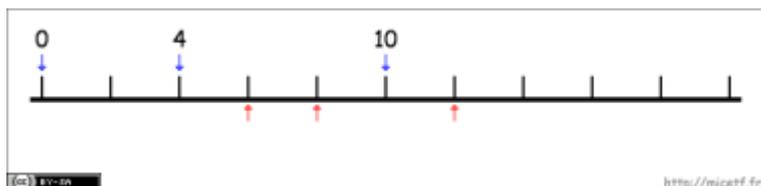




Exercice 1 : Place les nombres 4 et 10 et indique à quel nombre correspondent les flèches.

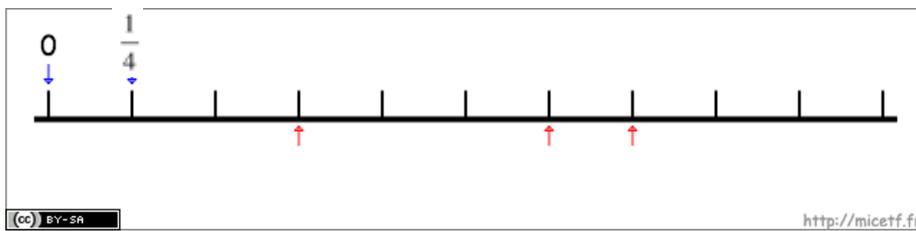
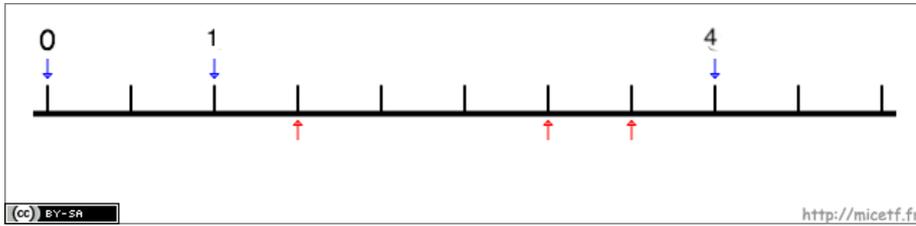


Exercice 2 : Place 0 et 6 et indique à quel nombre correspond la flèche.



Exercice 3 : Indique les nombres correspondant aux flèches.

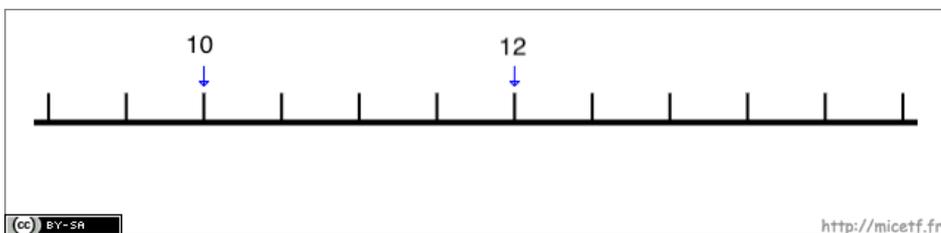
Exercice 1 : Indique les nombres qui correspondent aux flèches.



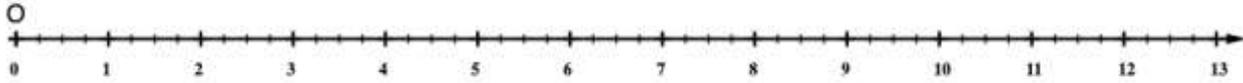
Exercice 2 : Place les nombres $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{4}$, 2 sur cette droite graduée.



Exercice 3 : Place les nombres 13 ; $\frac{30}{3}$; $\frac{22}{2}$; $\frac{24}{2}$.



Place chaque fraction sur la droite graduée puis complète le tableau.



$\frac{5}{4}$	$\dots < \frac{5}{4} < \dots$	$\frac{5}{4} = \dots + \frac{\dots}{\dots}$
$\frac{1}{4}$	$\dots < \frac{1}{4} < \dots$	$\frac{1}{4} = \dots + \frac{\dots}{\dots}$
$\frac{3}{2}$	$\dots < \frac{3}{2} < \dots$	$\frac{3}{2} = \dots + \frac{\dots}{\dots}$
$\frac{10}{4}$	$\dots < \frac{10}{4} < \dots$	$\frac{10}{4} = \dots + \frac{\dots}{\dots}$

- a) Dans un petit cinéma, il y a 60 fauteuils. Le tiers de ces fauteuils est à remplacer.

Combien de fauteuils cela représente-t-il ?

- b) Dans un parking, il y a 100 places. La moitié des places sont réservées aux commerçants.

Combien reste-t-il de places disponibles pour les autres personnes ?

Pour les plus rapides :

- c) Monsieur Bernier est boulanger. Tous les jours, il prépare 80 pains au chocolat. Aujourd'hui, il en a vendu seulement les trois quart.

Combien de pains au chocolat n'ont pas été vendu ?

- d) Tom a déjà avalé $\frac{17}{4}$ de tartelettes et voici ce qu'il lui reste.

Combien de tartelettes entières a-t-il avalées ?

Combien en avait-il au début ?

- e) J'ai lu un tiers de la moitié de mon livre qui fait 1200 pages.

A quelle page suis-je rendu ?

Pierre achète pour sa maman un bouquet de 45 fleurs (roses, tulipes et marguerites). Le tiers d'entre elles sont des roses. Les $\frac{3}{5}$ du reste sont des tulipes.

1- Combien y a-t-il de roses dans le bouquet ?

2- Combien y a-t-il de tulipes ?

3- Combien y a-t-il de marguerites ?

J'ai acheté une boîte de 36 chocolats. $\frac{7}{12}$ d'entre eux sont des pralinés. Les $\frac{2}{3}$ de chocolats restants sont au caramel.

1- Combien y a-t-il de chocolats pralinés ?

2- Combien en reste-t-il ?

3- Combien y a-t-il de chocolats au caramel ?

Sur 2 classes de 5^{ème} (représentant 48 élèves) mangeant au restaurant scolaire du collège, $\frac{3}{4}$ choisissent le plat avec de la viande. Les $\frac{5}{6}$ des élèves restants choisissent le plat avec du poisson.

1- Quel est le nombre d'élèves qui mangera un plat avec de la viande ?

2- Les élèves qui ne mangent ni viande ni poisson sont végétariens. Combien y a-t-il de végétariens ?

Un rectangle a pour longueur 48 cm ; sa largeur est égale aux $\frac{5}{8}$ de sa longueur.

Quel est son périmètre ?

Paul mange $\frac{3}{4}$ pizza. Pierre dévore $\frac{5}{4}$ de pizza. Céline mange $\frac{2}{4}$ de pizza. Quelle fraction de pizza a été mangée en tout. ?

Combien avaient-ils acheté de pizzas au minimum ?

Titre : Une séquence sur l'introduction des fractions au CM1

Auteurs : Lucie BRACHET (*CPC Circonscription de Bouguenais*)
Magali HERSANT (*INSPÉ de l'Académie de Nantes*)
Florence LUCAS (*École M. Curie, Saint Sébastien sur Loire*
et *INSPÉ de l'Académie de Nantes*)

Avec la participation de
Bruno COURTEL (*ERUN Bouguenais - Vertou - Rezé*)

Niveau : Cycle 3 (CM1)

Date : Mai 2020

Résumé : Cette brochure propose une séquence d'introduction des fractions au CM1, expérimentée dans plusieurs classes. Les fractions y sont présentées, au départ, comme des nouveaux nombres permettant de résoudre des problèmes pour lesquels les nombres entiers ne suffisent pas, dans le contexte de mesures de longueurs, comme le proposent les travaux didactiques (Douady et Perrin-Glorian, 1986) et les programmes actuels. En ce sens, cette séquence n'est pas originale par rapport à ce que l'on peut trouver dans certains manuels. L'originalité de cette ressource réside plus dans l'attention portée à l'explicitation de certains aspects de l'enseignement des fractions (choix effectués pour les différentes étapes de la séquence, ruptures ou continuités auxquels ils sont associés, formulations des savoirs et savoir-faire relatifs aux fractions).

Pour chaque séance, nous mentionnons le matériel nécessaire ; le matériel pour la classe à l'échelle 1 figure en annexe.

Format : A4, 62 pages

Éditeur : IREM des Pays de la Loire
2, rue de la Houssinière - BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03

Université de Nantes

Responsable de la publication : Magali HERSANT

