Deux tours pareilles

Quelques choix pour cette situation :

Les problèmes de cette situation ressemblent plus aux problèmes numériques traditionnels que ceux de la situation "comparer des tours" puisque le résultat attendu est un nombre (plus exactement, c'est un nombre *et* une couleur).
Pour autant, la façon dont nous proposons de traiter ces problèmes s'éloigne de toutes les propositions basées sur l'enseignement aux élèves d'une classification des problèmes adaptées des travaux de Vergnaud sur les problèmes additifs.

Un appui sur le calcul réfléchi, et non sur la reconnaissance d'une catégorie de problèmes

En CP, le calcul d'une somme ou d'une différence relève soit d'un résultat mémorisé soit du calcul réfléchi.
Imaginons un élève de CP qui cherche à savoir combien il y a de boules dans un sac où l'enseignant a placé successivement 6 boules rouges puis 5 bleues. Si cet élève n'a pas encore en mémoire le fait numérique "6 et encore 5, c'est 11" il peut par exemple réfléchir ainsi :
6 et encore 5, je ne sais pas, mais 5 et 5 je sais, c'est dix.
Comme 6 c'est 5 et 1, 6 et encore 5 c'est 5, 5 et 1, c'est 10 et 1, c'est 11.

Si on a entrainé cet élève à reconnaître que ce type de problème relève d'une addition et à écrire "6+5 =", cela ne facilite en rien sa procédure de calcul. Imposer de façon prématurée cette écriture risque alors d'apparaître comme une formalité dénuée de sens.

C'est seulement quand des procédures de calcul écrit seront disponibles et efficaces que la détermination préalable d'une opération prendra son sens et facilitera la résolution de certains problèmes.
En CE1, déterminer que pour résoudre un problème il convient d'effectuer 214 - 68 ou 57 + 74 + 39 permet de séparer la résolution en deux phases : une phase d'analyse de la situation où on ne se soucie pas nécessairement des particularités des valeurs numériques puis une phase de calcul purement technique où l'on peut oublier le sens de la question.

Les signes d'opération utilisés a posteriori

Pour autant, pour que les opérations deviennent des outils efficaces en CE1, il faut que leur sens soit acquis. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser l'écriture symbolique régulièrement pour traduire le résultat d'un problème ou une étape de celui-ci.

Dans l'exemple ci-dessus, toutes les écritures suivantes sont pertinentes :
6 + 5 = 11 qui traduit le résultat,

5 + 5 = 10   6 = 5 + 1   ou 10 + 1 = 11 qui traduisent chacune une étape du raisonnement que l'on veut mettre en évidence.

Et pourquoi pas 5 + 1 + 5 = 5 + 5 + 1 qui traduit une propriété restée implicite dans la procédure que nous avons décrite.

Les écritures traduisant une étape du raisonnement sont particulièrement utiles : elles peuvent être utilisées par l'enseignant pour donner aux élèves qui ne résolvent pas le problème seuls des indications leur laissant une part importante du travail à effectuer.

Les problèmes présentés comme des énigmes

Dès que l'étape de présentation de la situation est franchie l'enseignant insiste sur le fait que les questions posées sont difficiles, ce sont des énigmes : résoudre un problème est un petit exploit et il est parfaitement normal de ne pas savoir les résoudre tous.
Ce positionnement permet de travailler sereinement. C'est vrai évidemment pour les élèves, mais aussi pour le maître qui peut proposer à côté de cas bien balisés pour lesquels il a anticipé une ou deux procédures accessibles à ses élèves quelques cas choisis un peu au hasard : si les nombres qui figurent dans le problème sont familiers, il y a de fortes chances que certains élèves trouvent une façon pertinente de les associer. Et si ce n'est pas le cas ce n'est pas grave, l'enseignant revient à des choses plus simples pour les cas suivants et laisse l'énigme irrésolue affichée jusqu'à la séance suivante.

Rappelons à ce propos que, comme dans toutes les autres situations où une réponse numérique est attendue, les élèves doivent pouvoir répondre qu'ils ne savent pas, par exemple en écrivant un point d'interrogation sur leur ardoise.

Matériel :

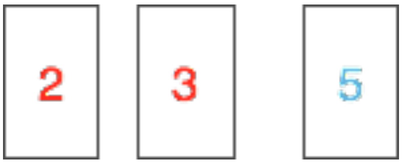
Pour l'enseignant : les cartes recto verso déjà utilisées pour la situation "comparer des tours"

Pour les élèves : ardoise, stylos pour ardoise bleu et rouge.

Déroulement de la première séance

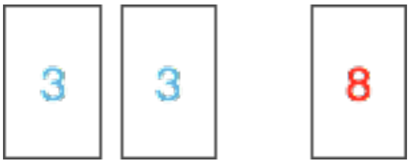
Le matériel utilisé est connu, c'est celui de la situation "comparer des tours" mais la question posée n'est plus la même. Le but de la séance est essentiellement que tous les élèves aient compris la nouvelle question, c'est pourquoi les problèmes posés dans cette séance sont faciles.

L'enseignant montre des cartes habituellement utilisées pour les problèmes "tours dessinées".
— Avec ces cartes, je vais vous poser de nouvelles questions. Nous ne chercherons pas quelle tour est la plus haute mais nous essayerons de faire deux tours de la même hauteur.



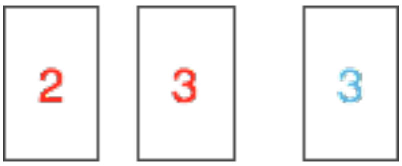
Avec ces cartes, c'est gagné, la tour rouge et la bleue ont la même hauteur (l'enseignant retourne les cartes pour réaliser les tours).

Avec ces cartes c'est aussi gagné parce que 3 et encore 3 c'est 6 et que 5 et encore 1 c'est 6 aussi (l'enseignant retourne les cartes)

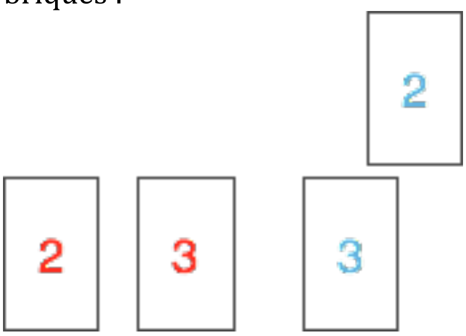


Avec ces cartes c'est perdu parce que la tour rouge est plus grande que la bleue : 8 briques contre 6 briques (l'enseignant retourne les cartes).

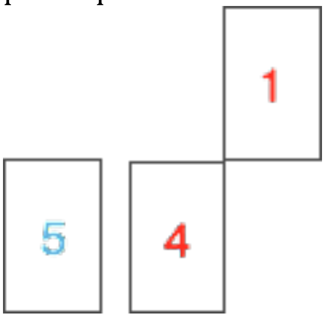
A chaque fois, je choisirai les cartes et je les mettrai au tableau… vous choisirez seulement la dernière carte, celle qu'il faut mettre avec les miennes pour gagner.



Pour avoir deux tours de la même hauteur, il faut ajouter une carte bleue de deux briques :



Pour avoir deux tours de la même hauteur, il faut ajouter une carte rouge d'une brique parce que 4 et encore un, c'est 5.



Maintenant c'est vous qui allez chercher, vous répondrez sur votre ardoise. Si vous pensez qu'il faut choisir le 3 rouge, vous écrivez 3 en rouge. Si vous pensez qu'il faut le 4 bleu, vous écrivez 4 en bleu. Si vous ne savez pas, vous écrivez un point d'interrogation. Quand vous avez écrit, vous retournez votre ardoise et vous attendez le signal pour la montrer.

L'enseignant propose ensuite les problèmes suivants en répétant à chaque fois la question : quelle carte faut-il ajouter pour que les deux tours aient la même hauteur ?
5 ; 2 vs 2
3 vs 5
3 ; 4 vs 3 ; 4 ; 2
6 vs 3
3 ; 2 vs pas de carte
6 ; 1 vs 6 ; 2

Les questions de cette séance peuvent se résoudre en utilisant seulement des décompositions bien connues (5, c'est 3 et encore 2, 6 c'est 3 et encore 3) et l'idée que si deux tours sont composées des mêmes morceaux elles ont la même hauteur.
Il ne devrait donc pas être nécessaire de valider en montrant les tours.

Évolutions de la situation

Jeu sur les valeurs numériques

Dans chaque séance, l'enseignant propose des cas simples pour lesquels la solution découle directement d'une décomposition mémorisée :
2 vs 6   9 vs 5   4 vs 8   ou 3 ; 3 vs rien
La part de ces cas simples dans une séance diminue quand les élèves prennent de l'aisance sur les situations plus complexes

Il propose également des cas plus complexes dans lequels les cartes proposées par l'enseignant sont des deux couleurs ou d'une seule.

- Quand l'enseignant n'affiche que des cartes d'une même couleur, cela revient à demander de calculer la somme de plusieurs nombres. Des problèmes de ce type sont proposés régulièrement, environ un à chaque séance :

2 ; 2 ; 2 ; 2
2 ; 3 ; 4
2 ; 3 ; 2 ; 3
3 ; 3 ; 1 ; 4

Pour ces cas, l'enseignant mettra en évidence les deux points suivants :

- On peut grouper dans l'ordre que l'on veut, ça ne change pas le résultat.
- Parfois, certaines façons de grouper rendent le calcul plus facile que d'autres (pour 3 ; 3 ; 1 ; 4 la procédure paraissant la plus simple pour beaucoup d'élèves sera probablement de grouper d'abord les deux 3 puis de grouper 6 et 4)

- Quand les cartes sont de deux couleurs, la procédure standard consistant à calculer le nombre total de briques de chaque couleur puis à chercher par quoi il faut compléter le côté le plus petit est rarement la plus efficace.

Très souvent plusieurs procédures sont possibles bien que nous n'en proposions qu'une à titre d'exemple.

Exemples de problèmes "à deux couleurs" :

2 ; 3 vs 2 ; 6
6 c'est comme 3 et encore 3. En remplaçant la carte 6 par deux cartes 3 on aurait
2 ; 3 vs 2 ; 3 ; 3 En ajoutant une carte 3 bleue on a les mêmes morceaux de chaque côté donc la même hauteur.

Lors de la mise en commun, à chaque fois qu'une procédure conduit à remplacer les cartes proposées par d'autre, l'enseignant écrit la nouvelle répartition sous les cartes. Dans la procèdure ci-dessus, il écrira donc 2 3 2 3 3

5 ; 6 vs 2 ; 3 ; 4
2 et encore 3 c'est 5, c'est comme si on avait 5 ; 6 vs 5 ; 4 Comme 4 et encore 2 c'est 6, en ajoutant une carte 2 rouge on aura 5 et 6 de chaque côté.

8 vs 2 ; 2 ; 3 ; 4
2 et encore 2 c'est 4, c'est comme si on avait 8 vs 4 ; 3 ; 4. 8 c'est 4 et encore 4 c'est comme si on avait 8 vs 8 ; 3. En ajoutant un trois bleu, on aura les mêmes morceaux de chaque côté donc la même hauteur.

6 ; 6 vs 5 ; 4

Pour avoir 6 et encore 6 du côté rouge, je peux ajouter une brique à la carte 5 et deux briques à la carte 4. Comme je n'ai droit qu'à une carte il faut que j'ajoute une brique et encore deux briques en une seule fois : j'ajoute une carte 3 rouge.

5 ; 5 vs 3 ; 3 ; 3
5 et encore 5 c'est 10. 3, 3 et encore 3 c'est 9. Comme 9 et encore 1 c'est 10, j'ajoute une carte 1 rouge.

Les problèmes proposés s'enrichissent à mesure que l'on apprend à travers d'autres situations de nouveaux faits numériques. Par exemple, après avoir travaillé la situation "les nombres de 11 à 19" les élèves savent que tous les nombres qui s'écrivent "1a" valent 10+a, on peut alors leur proposer les cas suivants :
5 ; 4 ; 5 ; 3 vs rien 5 ; 5 vs 18 16 vs 13

Utilisation de l'écriture symbolique

Dans un premier temps, l'enseignant demande seulement d'écrire sur l'ardoise le nombre trouvé, de la bonne couleur.

Dès que les cas proposés demandent plus que la restitution d'une décomposition mémorisés, il utilise au tableau des écritures

Pour 5 ; 6 vs 2 ; 3 ; 4 il peut par exemple écrire :

5 + 6 = 2 + 3 + 4 **+2** qui rend compte du résultat sans indiquer comment on l'a trouvé mais permet de s'assurer qu'il est correct

5 = 2 + 3 propose une façon d'aborder le problème : on remarque qu'il y a 5 de chaque côté, le problème peut donc se ramener à celui-ci 5 ; 6 vs 5 ; 4

6 = 2 + 4 propose une autre approche qui ramène le problème à 5 ; 6 vs 3 ; 6

Ces écritures peuvent être utilisées lors de la mise en commun pour étayer des propositions de procédures faites par les élèves.
Elles peuvent aussi être utilisées avant la mise en commun pour aider les élèves qui ne parviennent pas à résoudre seuls le problème.

Quand l'usage d'écritures symboliques au tableau par l'enseignant est bien établi, celui-ci peut demander aux élèves d'accompagner leur réponse d'une phrase mathématique qui aide à comprendre ce qu'ils ont fait.