Situation fil conducteur pour les périodes 1 et 2

Comparer des tours

Quelques choix pour cette situation :

Des problèmes où on ne cherche pas un nombre

Un problème numérique à l'école élémentaire a le plus souvent ces caractéristiques :

- Il est posé sous la forme d'un court texte racontant une histoire contenant des informations numériques et à propos de laquelle est posée une question.
- La réponse attendue est généralement un nombre que l'on obtient en effectuant une ou plusieurs opérations à l'aide des données numériques du texte. En CP, beaucoup d'élèves ne sont pas encore des lecteurs autonomes, le texte écrit est donc souvent remplacé par une illustration commentée ou par un texte dit oralement, ce qui ne change rien d'essentiel à la conception des problèmes.

Ces deux caractéristiques sont absentes de la situation "comparer des tours" :

- la question est toujours la même, la phase de compréhension de la question posée n'est donc pas nécessaire. Cela permet d'éviter les séances consacrées pour l'essentiel à éclaircir la question posée et où il reste donc très peu de temps pour faire des mathématiques. On pourrait craindre que, la question étant toujours identique, la tâche proposée aux élèves soit très répétitive et qu'il s'agissse plus d'exercices techniques d'entraînement que de véritables problèmes. Il n'en est rien car le changement des valeurs numériques proposée modifie beaucoup les procédures possibles. Il s'agit donc bien de véritables problèmes.

- La réponse attendue n'est pas un nombre et si des opérations sont parfois nécessaires cela n'a rien de systématique. Cette caractéristique permet d'éviter que les élèves considèrent rapidement que leur tâche consiste à trouver (deviner ?) et effectuer la bonne opération.

On aura compris que nous ne nous situons pas dans la lignée des méthodes qui considèrent que l'on doit enseigner aux élèves une version plus ou moins adaptée de la classification des problèmes additifs de Vergnaud.

La validation par le matériel : toujours possible, rarement effectuée

Dans cette situation les élèves doivent toujours comparer la hauteur d'une tour bleue et d'une tour rouge avant que ces tours ne soient effectivement réalisées par l'enseignant. Il est important qu'au début les tours soient vraiment réalisées : tous les élèves savent ainsi de quoi l'on parle et un contrat mathématique sain s'installe : on essaie de dire des choses vraies à propos d'objets que l'on ne voit pas.

Cependant, il est tout aussi important qu'après quelques séances on ne valide plus systématiquement avec le matériel : si je fais une tour bleue avec 4 briques et une tour rouge avec 4 briques et encore 2 briques, la tour rouge sera plus haute parce que 4 et encore quelque chose, c'est plus que 4. Si le maître pense que tous ses élèves adhèrent à ce raisonnement il peut leur poser la question " Êtes vous vraiment sûrs que la tour rouge sera plus haute ? Si quelqu'un n'est pas sûr je peux la construire pour voir mais si tout le monde est sûr, ce n'est peut-être pas la peine ".

Progressivement, la validation fera plus rare et sera réservée aux cas les plus délicats.

Introduire tôt les signes de comparaison (< ; > ; =) dans leur véritable signification mathématique.

Les signes < et > ont été choisis pour que leur signification soit intuitive et facile à retenir : le grand nombre est du grand côté, le petit nombre du petit côté.

Ces signes ne représentent pas un son ni même un mot mais directement une idée, l'écriture mathématique est largement idéographique.
Ainsi, il importe peu que l'écriture 10 > 8 soit traduite à l'oral par "dix est plus grand que huit", "dix, c'est plus que huit", "huit est plus petit que dix" ou toute autre phrase ayant la même signification.

Vouloir associer chaque signe à une expression comme "est plus grand que" introduit une difficulté inutile que l'image fréquemment proposée de la bouche du crocodile n'aide pas à résoudre.

Quant au signe =, il est employé pour dire que les deux tours ont la même hauteur ce qui est son sens mathématique exact :
4+1 = 2+3 signifie que 4+1 c'est la même chose que 2+3
Comme pour les signes d'inégalité, la façon dont le signe = est traduit à l'oral importe peu tant que le sens est respecté.
quatre plus un égal deux plus trois.
quatre plus un c'est la même chose que deux plus trois
quatre et encore un c'est autant que deux et encore trois
…

L'explicitation de propriétés mathématiques généralement implicites.

Voici deux exemples de ces propriétés :
Si on a deux collections d'objets et qu'on déplace un objet d'une collection à l'autre, le nombre total d'objets ne change pas.

Si deux collections contiennent autant d'objets et qu'on ajoute des objets à l'une des deux, elle comportera plus d'objets que l'autre.

La plupart des élèves ne découvrent pas spontanément ces propriétés et encore moins le fait qu'elles permettent parfois de répondre à des questions mathématiques de façon simple. C'est pourquoi nous pensons que l'enseignant doit les énoncer clairement et proposer des exemples de procédures les utilisant.

C'est ce qui permettra aux élèves de disposer rapidement d'une grande variété de procédures pour résoudre des problèmes.

Notons à ce propos que l'enseignant devra trouver un équilibre entre deux souhaits parfaitement légitimes :
Prendre en compte les propositions des élèves, les procédures originales
Assurer un rythme de travail soutenu pour maintenir l'intérêt.
Nous avons souvent observé des classes où le soucis de traiter de manière exhaustive les propositions des élèves conduisait à un rythme beaucoup trop lent et à l'ennui.

Précisions sur le matériel.

La situation peut être conduite à l'aide :

- d'objets empilables de dimensions identiques et de deux couleurs (par exemple briques Duplo bleues et rouges).
- de cartes recto-verso portant le dessin des briques sur une face et leur nombre sur l'autre.

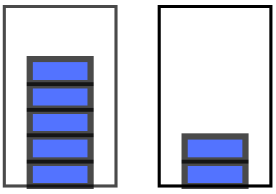
Les objets empilables nécessitent peu de préparation matérielle.
Ils pemettent de répondre facilement à des propositions d'élèves faisant intervenir des nombres que l'on n'avait pas anticipés.
Ils facilitent l'explicitation de certaines propriétés (on peut par exemple déplacer une brique d'une pile à une autre).
Cependant, la réalisation des morceaux de tour pour chaque problème prend un peu de temps et des étourderies lors de la réalisation peuvent perturber.

Les cartes recto-verso sont d'un emploi rapide car elles sont faites une fois pour toute.
Elles sont plus visibles de tous les élèves.
Elles sont plus fiables : on vérifie lors des premières séances que le nombre écrit d'un côté correspond bien aux briques dessinées de l'autre, ensuite on n'a plus besoin de s'en préoccuper.
Cependant elles nécessitent une préparation assez longue et sont moins polyvalentes (elles ne peuvent pas être découpées).

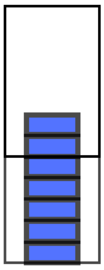
Notre préférence va à l'usage fréquent des cartes, mais en disposant tout de même d'objets empilables pour certaines illustrations.

Déroulement de la première séance

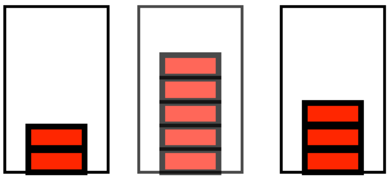
L'enseignant présente les cartes : au dos de cette carte où il est écrit 5 en rouge est dessinée une tour de 5 briques rouges. Au dos de celle-ci sur laquelle est écrit 4 en bleu, il y a une tour de 4 briques bleues.
Pour chaque exemple, un élève vient au tableau compter les briques (ce n'est pas facile de loin) afin de vérifier qu'il y en a bien le nombre annoncé par l'enseignant.
Cette présentation doit être rapide mais tous les élèves doivent comprendre comment sont faites les cartes.
Quand j'ai plusieurs tours de la même couleur, je fais des grandes tours en les empilant.
Par exemple, si j'ai ces deux cartes bleues

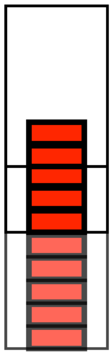


je les place comme ça :



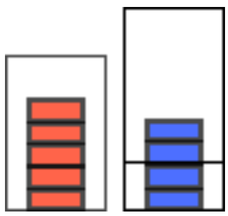
Si j'ai ces trois cartes rouges, je les place comme ça :



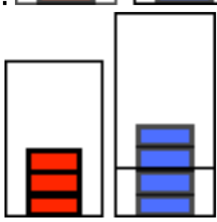


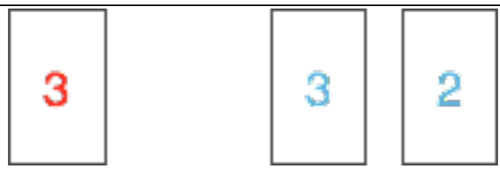
Je vous donne à chacun deux cartons, un rouge et un bleu. Ils servent à dire quelle est la tour la plus haute.

Si je vous montre ça, il faut lever le carton rouge.



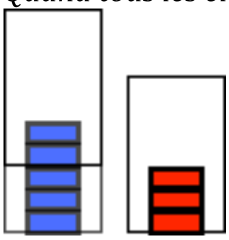
Si je vous montre ça, il faut lever le carton bleu :





— Maintenant, je ne vous montre que les nombres.
Je vais retourner les cartes pour faire les tours. Mais il faut lever le carton avant de voir les tours, c'est plus difficile. Quelle sera la plus haute ? Choisissez la bonne couleur… levez.

Quand tous les élèves ont levé leur carton, l'enseignant montre les tours :



Vous aviez raison, la tour bleue est plus haute.
Trois briques et encore deux briques, c'est plus que trois briques.
Trois et quelque chose en plus, c'est plus que trois.

Remarque : pour simplifier au maximum la consigne, l'enseignant n'envisage pas le cas où les deux tours ont la même hauteur.
Quand cela se produira pour la première fois, les élèves ne sauront donc pas comment répondre. L'enseignant présentera alors ses excuses à la classe : *"j'ai oublié de vous dire ce qu'il faut faire quand vous pensez que les deux tours ont la même hauteur, la prochaine fois que ça arrivera, vous lèverez les deux cartons*".

Dans cette phase introductive, les valeurs numériques utilisées sont de deux types seulement :

Une carte de chaque couleur.

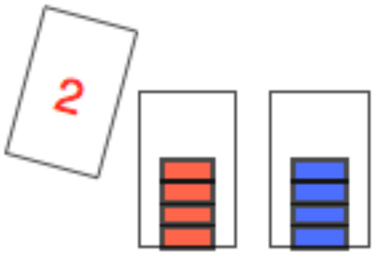
Pour répondre il faut savoir lire les deux nombres et les comparer.
Les erreurs sur ce cas devraient être rares et relever de l'étourderie. Si ce n'est pas le cas, les élèves ne sont pas prêts à aborder ce travail.

Une carte bleue et une rouge de même valeur, une autre carte de l'une des couleurs.

2 ; 4 / 4   5 ; 2 / 5   3 / 3 ; 1

Le raisonnement privilégié par l'enseignant est celui figurant à la fin de l'encadré de présentation : "quatre et encore quelque chose, c'est plus que quatre".

Pour aider les élèves à s'approprier ce raisonnement, l'enseignant peut, au moment de la correction, placer les cartes ainsi :



"Si j'ajoute des briques rouges, la tour rouge sera plus haute, je n'ai même pas besoin de savoir combien j'en ajoute".
Il peut aussi montrer la pertinence de la procédure privilégiée en l'appliquant à des grands nombres que les élèves ne maitrisent pas encore :
57 ; 21 / 57 ou même 471 ; 8 / 471
Même si on ne sait pas lire 471 et qu'on n'a pas la moindre idée de la quantité qu'il représente, il suffit de savoir qu'il s'agit d'un nombre pour être certain que 471 et encore 8, c'est plus grand que 471.

Évolutions de la situation

Utilisation de décompositions connues

Sans modifier le déroulement l'enseignant ajoute aux problèmes déjà rencontrés des problèmes pouvant se résoudre de façon privilégiée à l'aide d'une décomposition connue.

Cette introduction peut se faire très tôt, dès la deuxième séance si tous les élèves ont compris la consigne.
L'enseignant se limite aux décompositions déjà bien connues et en ajoute progressivement de nouvelles à mesure de leur étude, parmi lesquelles la décomposition générique "le nombre qui suit dans la comptine c'est un de plus" (voir situation xxxx)

Exemples de problèmes et explications associées.

2 ; 2 / 5
2 et encore 2, c'est 4, c'est comme si on avait 4 / 5.
5 c'est plus que 4 alors la tour bleue sera plus haute.

3 ; 3 / 6
3 et encore 3, c'est 6, c'est comme si on avait 6 / 6.
Les deux tours seront faites de 6 briques, elles auront la même hauteur.

3 ; 2 / 4 ; 1

2 ; 3 ; 3 / 6
3 et encore 3 c'est 6, c'est comme si on avait 2 ; 6 / 6. 6 et encore quelque chose, c'est plus que 6 alors la tour rouge sera plus haute.

2 ; 2 ; 3 / 4 ; 1
2 et encore 3 c'est 5 ; 4 et encore 1 c'est aussi 5. C'est comme si on avait 2 ; 5 / 5, la tour rouge est plus haute.

5 ; 5 / 6 ; 3
5 et encore 5 c'est 10, 6 et encore 3 c'est 9. La tour rouge est plus grande que la tour bleue.

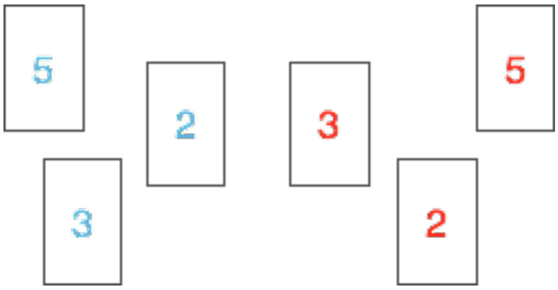
10 / 6 ; 5

- 6, c'est 5 et encore 1, c'est comme si on avait 10 / 5 ; 1 ; 5. 5 et encore 5 c'est 10, c'est comme si on avait 10 / 10 ; 1, la tour bleue est plus haute

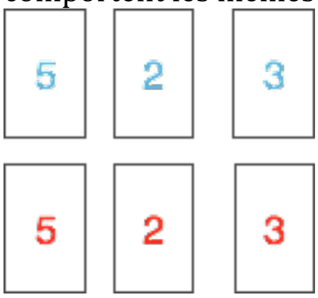
- 10 c'est 5 et encore 5, c'est comme si on avait 5 ; 5 / 6 ; 5 il y a 5 des deux côtés, du côté bleu on rajoute 6 et du côté rouge on rajoute un autre 5. Comme 6 est plus grand que 5, la tour bleue est plus haute.
- 10 c'est 5 et encore 5. 6 c'est 5 et encore 1. C'est comme si on avait 5 ; 5 / 5 ; 5 ; 1 Il ya 5 et encore 5 des deux côtés, du côté bleu il y a 1 en plus, la tour bleue est plus haute.

Introduction de connaissances générales sur les nombres.

Deux tours fabriquées avec les mêmes morceaux ont la même hauteur.



L'enseignant déplace les cartes pour insister sur le fait que les deux collections comportent les mêmes cartes.



L'enseignant réalise les deux tours dans le même ordre, par exemple il place le morceau rouge de 5 briques à côté du morceau bleu de 5 briques puis ajoute les morceaux de 2 briques et termine par ceux de 3 briques. À chaque étape il dit : " j'ai fait exactement la même chose pour les deux couleurs, c'est donc normal que les tours soient identiques ".

L'enseignant modifie ensuite l'ordre des pièces dans une des tours et fait remarquer que la hauteur totale n'a pas changé. Il peut poser la question aux élèves : " avec les mêmes cartes pouvez vous les placer autrement pour que la tour rouge devienne plus grande ? Si un élève pense pouvoir le faire, sa proposition est testée et on constate que la hauteur est toujours la même.

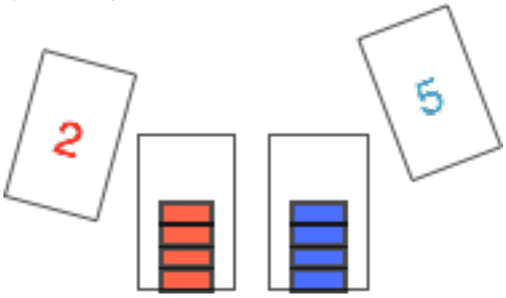
Ce raisonnement permet de résoudre directement les problèmes suivants :

3 ; 5 / 5 ; 3
2 ; 4 ; 6 / 6 ; 2 ; 4
12 ; 5 ; 10 ; 8 / 5 ; 12 ; 8 ; 10

utilisé conjointement à d'autres connaissances (nous vous laissons le soin de les identifier et de les formuler pour vos élèves) il permet de résoudre beaucoup d'autres problèmes parmi lesquels :

3 ; 4 ; 5 / 5 ; 3 ; 2 ; 2
5 ; 7 ; 2 / 2 ; 7 ; 5 ; 3
5 ; 4 ; 2 ; 3 / 4 ; 3 ; 2 ; 6

quand on agrandit deux tours identiques, il suffit de comparer les morceaux qu'on ajoute.



Les morceaux qu'on voit ont la même hauteur.
Le morceau bleu que je vais ajouter est plus grand que le morceau rouge.
La tour bleue sera plus grande que la rouge.

Ce raisonnement permet de résoudre directement les problèmes suivants :

5 ; 5 / 5 ; 3
6 ; 2 / 6 ; 3
12 ; 5 / 12 ; 6

utilisé conjointement à d'autres connaissances il permet de résoudre beaucoup d'autres problèmes parmi lesquels :

2 ; 6 / 6 ; 3
3 ; 4 ; 5 / 5 ; 3 ; 3
5 ; 5 ; 2 / 10 ; 3
5 ; 5 ; 2 / 9 ; 3 ; 1

Si je déplace une brique d'un morceau d'une tour à un autre morceau de la même tour, ça ne change pas la hauteur de cette tour.

Des déplacements de points ont été utilisés pour montrer l'équivalence de certaines décompositions. Par exemple, dans la situation "reconnaître rapidement un nombre" 7 a été vu d'abord comme 5 et encore 2 puis le déplacement ci-dessous a permis de montrer que c'était aussi 4 et encore 3.

L'enseignant rappelle cela : j'ai 5 points et encore 2 points, si je prends un point dans les 5 et que je le mets avec les deux j'ai maintenant un groupe de 4 points et un autre de 3 points. Le nombre de points en tout n'a pas changé.
5 et encore 2, c'est autant que 4 et encore 3.

L'enseignant construit sur son bureau une tour de 5 briques et une de 2 briques. il déplace une brique de la tour 5 vers la tour 2 et dit "avec les briques, c'est comme avec les points, 5 et encore 2, c'est autant que 4 et encore 3. La grande tour que je fais avec toutes les briques ne change pas de hauteur. Il fait la démonstration en construisant la tour et en la coupant à plusieurs reprises soit en 5 et 2 soit en 4 et 3 : c'est toujours la même tour.

Ce raisonnement permet de résoudre directement les problèmes suivants :

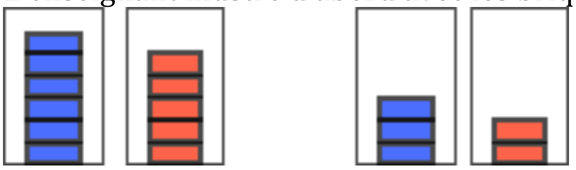
5 ; 2 / 4 ; 3
6 ; 3 ; 2 / 5 ; 4 ; 2

utilisé conjointement à d'autres connaissances il permet de résoudre beaucoup d'autres problèmes parmi lesquels :

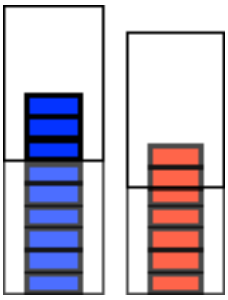
9 ; 5 / 7 ; 4
9 ; 5 / 10 ; 2
9 ; 5 / 5 ; 5 ; 3
5 ; 4 ; 6 / 7 ; 3 ; 4

Voici un morceau de tour bleu et un rouge, le bleu est plus grand.
Voici deux autres morceaux, le bleu est à nouveau plus grand.
La tour bleue sera plus grande que la rouge.

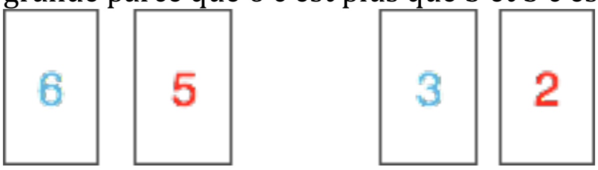
L'enseignant illustre d'abord avec les briques visibles :



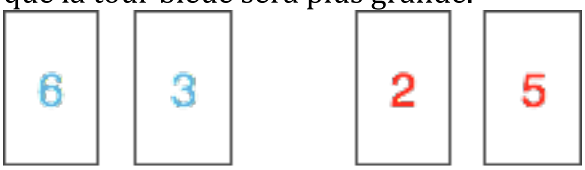
Les morceaux bleus sont plus grands, je sais que la tour bleue sera plus grande.



En regardant seulement les nombres, je peux déjà dire que la tour bleue sera plus grande parce que 6 c'est plus que 5 et 3 c'est plus que 2



Si les cartes sont placées comme ça, c'est plus difficile à voir mais je peux encore dire que la tour bleue sera plus grande.



Ce raisonnement permet de résoudre directement les problèmes suivants :

7 ; 2 / 8 ; 4
6 ; 3 ; 2 / 7 ; 4 ; 3

utilisé conjointement à d'autres connaissances il permet de résoudre beaucoup d'autres problèmes parmi lesquels :

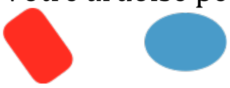
5 ; 3 ; 5 / 9 ; 2
4 ; 7 / 4 ; 4 ; 5
9 ; 5 / 4 ; 4 ; 4
9 ; 4 ; 6 / 5 ; 3 ; 9

Introduction des écritures mathématiques.

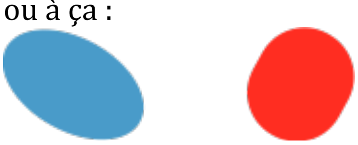
Introduction des signes de comparaison.

Aujourd'hui, nous allons chercher de nouveaux problèmes avec des tours, mais vous ne lèverez plus vos cartons, nous allons apprendre à dire quelle tour est la plus grande en écrivant sur l'ardoise.
Pour commencer, vous aller dessiner deux taches sur votre ardoise, une rouge et une bleue. Il faut qu'elles soient assez grosses pour que je les voie bien et il ne faut pas qu'elles se touchent, il faut laisser un peu de place entre les deux pour écrire.

Votre ardoise peut ressembler à ça :



ou à ça :



Pour dire que la tour bleue est plus grande, vous écrirez ça

Le signe que j'ai mis entre le bleu et le rouge a un côté bien grand ouvert ici et un autre tout petit ici.
Ce qui est du côté grand ouvert est plus grand que ce qui est du côté pointu. Si vous écrivez ça sur votre ardoise, ça voudra dire que la tour bleue est plus grande.

en écrivant ça, on dit aussi que la tour bleue est plus grande.

Si c'est la tour rouge qui est plus grande, il faut écrire ça

ou ça :

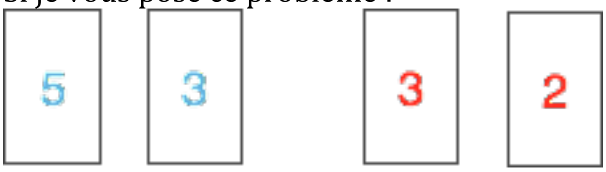
Si vous pensez que les deux tours sont de la même hauteur, il y a un autre signe pour le dire, vous écrirez ça :

ou ça :

Ce signe n'a pas un petit côté pointu et un grand côté bien large, ses deux côtés sont pareils, ça aide à se souvenir qu'il veut dire que les deux tours ont la même hauteur.

Introduction du signe +.

Pour répondre aux problèmes, nous n'allons plus utiliser de grosses taches rouges et bleues, nous allons écrire des phrases mathématiques.
Si je vous pose ce problème :



Vous écrirez :

$$5 + 3 > 3 + 2$$

5+3, ça veut dire cinq et encore trois, on peut le lire "cinq plus trois"
La phrase mathématique que j'ai écrite au tableau veut dire que 5 et encore 3 c'est plus que 3 et encore 2, ça dit que la tour bleue de ce problème est plus grande que la rouge.

Il y a beaucoup d'autres façons de dire la même chose avec une phrase mathématique, par exemple :

$$3 + 5 > 3 + 2$$

$$3 + 2 < 5 + 3$$

L'enseignant invite les élèves volontaires à venir chacun à son tour écrire d'autres phrases mathématiques qui disent la même chose.

Lors de la première séance d'utilisation de l'écriture mathématique complète des égalités ou inégalités l'enseignant propose des problèmes plus simples que ce à quoi il était parvenu.

Certains élèves trouveront peut être amusant de jouer avec l'ordre des nombres pour proposer une réponse dont l'aspect graphique ne ressemble pas du tout à la façon dont le problème est posé.

Par exemple pour le problème suivant

ils écriraient $1 + 2 + 9 < 5 + 3 + 5$

Tout en acceptant cette réponse l'enseignant dira qu'il vaut mieux que la réponse soit facile à lire.
Pour cela, on peut écrire les nombres dans le même ordre qu'au tableau, ainsi toutes les réponses seront identiques.
On peut aussi faire des modifications qui aident à comprendre comment on a trouvé :
par exemple $5 + 5 + 3 > 9 + 1 + 2$ est une bonne façon d'écrire la réponse pour des élèves qui ont utilisé un groupement de 10 dans chaque couleur.