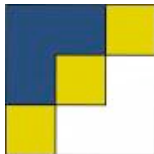


L'escalier qui chante



gilles.carron@univ-nantes.fr

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR n° 6629

CNRS & Université de Nantes

https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~joly/index.html

Informationen Divers


Romain Joly

Navigation

- Accueil
- Recherche
- Enseignement
- Vulgarisation
- Doc. pédagogiques
- Cv
- Montagne

Liens externes

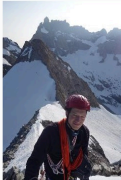
- Institut Fourier



Contact

e-mail : romain.joly@univ-grenoble-alpes.fr
Bureau : B109
Téléphone : (+33) (0)4 76 51 45 65
Fax : (+33) (0)4 76 51 44 78

Adresse : Romain Joly
Université Grenoble Alpes
Institut Fourier
CS 40700
F-38058 Grenoble cedex 9, France
[Comment venir à mon bureau](#)



Recherche et enseignement

Je suis actuellement maître de conférences à l'Institut Fourier de Grenoble.
Voici pour en savoir plus sur :

- ma recherche,
- un lien direct vers le projet ANR *ISDEEC*
- mes enseignements et des documents pédagogiques,
- mes activités de vulgarisation.

Divers

- Mon CV
- Un petit bol d'air frais



QUAND UNE FONTAINE ET UN ESCALIER FONT UNE NOTE DE MUSIQUE

Posté le 20/01/2016

Le 20 janvier 2016 - Ecrit par Romain Joly

[Voir les commentaires \(4\)](#)

Le bruit chaotique d'une fontaine se réfléchit sur le grand escalier du château de Chantilly en une jolie note de musique. L'explication du phénomène est l'occasion de découvrir de manière sonore l'analyse de Fourier.

Je suis né puis j'ai grandi à 10km de la ville de Chantilly et je travaille maintenant à l'Institut Fourier de Grenoble. J'ai donc forcément été interpellé par un article du *Pour la Science* numéro 456 parlant d'un phénomène sonore, qui fut observé par Huygens au château de Chantilly et qui se comprend grâce à une théorie développée par Joseph Fourier à Grenoble. L'explication du phénomène est en fait assez simple et amusante et je vais donc essayer de vous la donner.

Christian Huygens, (en néerlandais **Christiaan Huygens** ([ⓘ] Prononciation), en latin **Christianus Hugenius**), né le 14 avril 1629 à La Haye et mort le 8 juillet 1695 dans la même ville, est un mathématicien, un astronome et un physicien néerlandais.

Considéré comme un alter-ego de Galilée, notamment pour sa découverte de Titan qu'il décrit dans *Le Système de Saturne* (1659) où il fait une première description exhaustive du *Système solaire* à six planètes et à six lunes, avec une précision alors inégalée¹. Pour la première fois, il est possible d'avoir une idée de la dimension du système, de l'éloignement des étoiles² et de la position exacte de la Terre en son sein, ainsi que de sa dimension exacte, nettement plus grande que Mars ou Mercure, à peine plus grande que Vénus mais nettement plus petite que Jupiter et Saturne. Il construit également la première horloge à pendule, qui améliorerait la précision des horloges existantes de 15 minutes à 15 secondes par jour (1656). Huygens est généralement crédité pour son rôle fondamental dans le développement du calcul moderne, en particulier pour avoir développé les techniques de sommation et d'intégration nécessaires à la découverte de l'isochronisme de la cycloïde. En sciences physiques, il est célèbre pour la formulation de la théorie ondulatoire de la lumière³, et le calcul de la force centrifuge.

Sommaire [masquer]

1 Biographie

- 1.1 Naissance et formation
- 1.2 Astronome
- 1.3 Mathématicien
- 1.4 Physicien
 - 1.4.1 Pendule
 - 1.4.2 Lumière
 - 1.4.3 Mécanique
 - 1.4.4 Instrument de projection
- 1.5 Reconnaissance académique
- 1.6 Philosophie naturelle
- 1.7 Vie familiale et mort

2 Postérité

3 Notes et références

- 3.1 Notes
- 3.2 Références

4 Voir aussi

Christiaan Huygens



Christiaan Huygens

Naissance	14 avril 1629 La Haye (Provinces-Unies)
Décès	8 juillet 1695 (à 66 ans) La Haye (Provinces-Unies)
Nationalité	Néerlandais
Domaines	Mathématiques, physique, astronomie
Institutions	Académie des sciences Royal Society
Diplôme	Université de Leyde
Renommé pour	Principe de Huygens-Fresnel Biréfringence Théorie des ondes Force centrifuge Titan

modifier





Le château de Chantilly et son grand escalier

Le château n'est pas tel que l'a vu Huygens, mais le grand escalier donnant sur les jardins et sa statue équestre sont d'époque. Le jet d'eau de la fontaine était probablement beaucoup plus imposant alors.

Huygens à Chantilly

Christiaan Huygens, un grand mathématicien et astronome néerlandais, a visité le château de Chantilly en 1693 [1]. En face du grand escalier du château, donnant sur les jardins, se trouve une fontaine. Quand on se place près de l'escalier, on entend le bruit de la fontaine s'y réfléchissant. Si le bruit de la fontaine n'est qu'un gros brouhaha, son écho sur l'escalier est une note de musique particulière. Surprenant, non ? Huygens propose une explication à ce phénomène, basée sur ses connaissances de la physique en jeu dans les instruments de musique.

RENDEZ-VOUS

IDÉES DE PHYSIQUE

L'escalier chantant de Maoshan

Un bruit émis face à des marches d'escalier ou une autre structure périodique peut devenir un son d'une hauteur bien déterminée.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIJ

Un victorieux est debout devant l'escalier du monument à la victoire du mont Maoshan, dans la province du Jiangxi, en Chine. Un feu d'artifice est tiré au-dessus de lui. En écho de chaque explosion, le visiteur entend distinctement le son clair d'un clavier pour une brève mélodie de six notes [voir la figure ci-dessous].

On trouve ce phénomène sous diverses formes au théâtre grec d'Épidaure ou à la pyramide de Kukulkán sur le site maya de Chichén Itzá, au Mexique. Ces architectures ont toutes en commun la présence de structures périodiques, escaliers ou rangées de

sièges, dont les multiples échos s'additionnent pour produire des notes musicales. Comment peut-on l'expliquer ?

Quand l'écho donne une hauteur à un bruit

Avant de nous attaquer à la mélodie du mont Maoshan, commençons par un phénomène plus simple, constaté dès 1693 par le physicien néerlandais Christiaan Huygens devant l'escalier de pierre du château de Chantilly, en France. Quand la fontaine face à l'escalier fonctionnait, Huygens entendait un son de même hauteur que celui produit en soufflant dans un

tuyau de même longueur que la profondeur des marches, soit presque 46 centimètres.

L'effet est toujours présent aujourd'hui, comme un cliquetement de mains face à l'escalier du château vous le révélera. Chacune des marches renvoie un faible écho de ce cliquetement, mais notre cerveau interprète la succession rapide de ces échos comme un signal périodique. La période de ce son correspond au temps de trajet supplémentaire pour passer d'une marche à la suivante, c'est-à-dire à la durée que met le son pour parcourir deux fois la largeur d'une marche, soit 2,7 millisecondes. À partir d'un bruit, cliquetement de mains ou clapetis d'une fontaine, nous



Romain Joly explique d'abord que les sons que nous percevons sont des effets de l'oscillation de la pression de l'air au niveau de notre oreille.

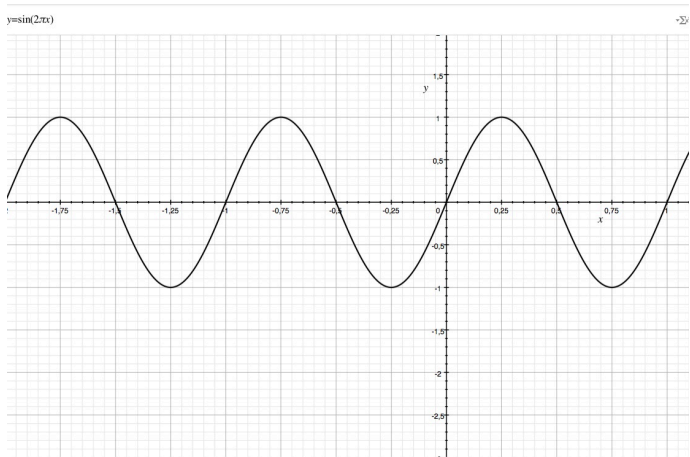
Romain Joly explique d'abord que les sons que nous percevons sont des effets de l'oscillation de la pression de l'air au niveau de notre oreille.

On a vu qu'un instrument de musique (corde, flute,...) produit des notes de musiques correspondant à des fréquences de vibration propre à l'instrument.

Par exemple le plus simple, un signal périodique sinusoïdale de fréquence ω

$$p(t) = \sin(2\pi\omega t).$$

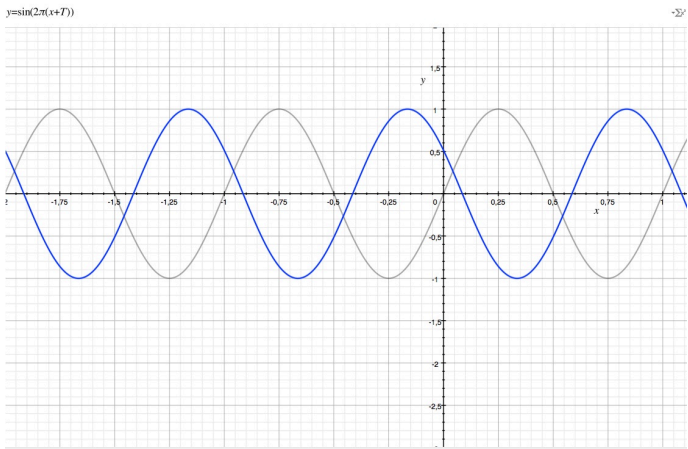
Le son se reproduit toutes les $\frac{1}{\omega}$ secondes.



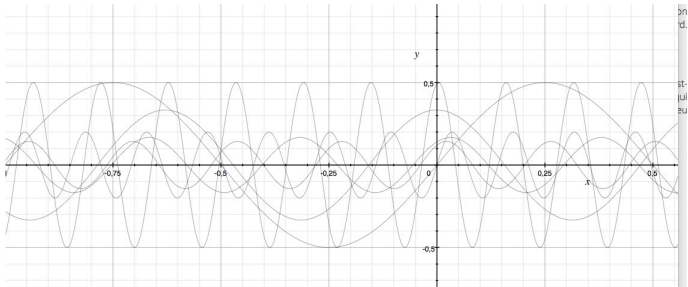
Ce signal peut être décalé dans le temps ce qui amène un déphasage par rapport au signal précédent

$$p(t) = \sin(2\pi\omega(t + T)).$$

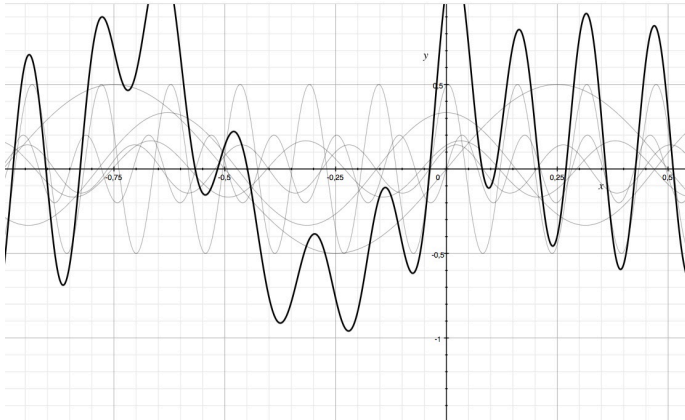
La fréquence est la même.



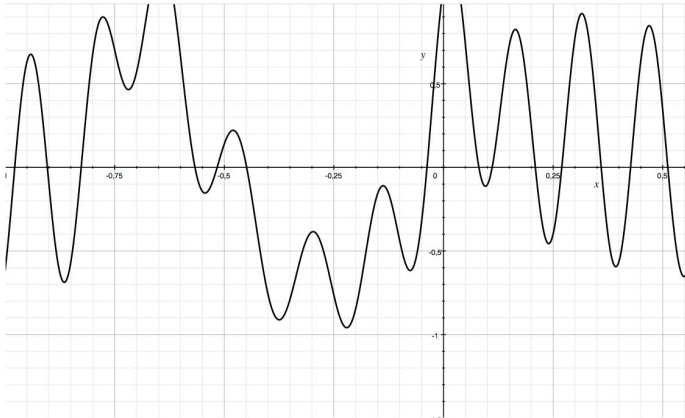
De façon générale ce que l'on entend est une superposition de tels signaux de fréquences différentes, de déphasages différents et de l'amplitude différente.



De façon générale ce que l'on entend est une superposition de tels signaux de fréquences différentes, de déphasages différents et de l'amplitude différente.



De façon générale ce que l'on entend est une superposition de tels signaux de fréquences différentes, de déphasages différents et de l'amplitude différente.

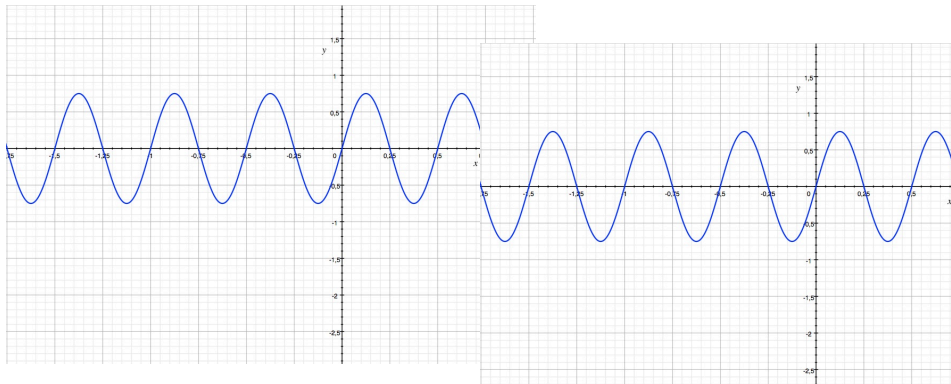


Considérons plusieurs exemples, d'abord on superpose des signaux de même fréquence mais de déphasages différents.

$$T = \frac{1}{\omega}$$

$$p_1(t) = \sin(2\pi\omega t)$$

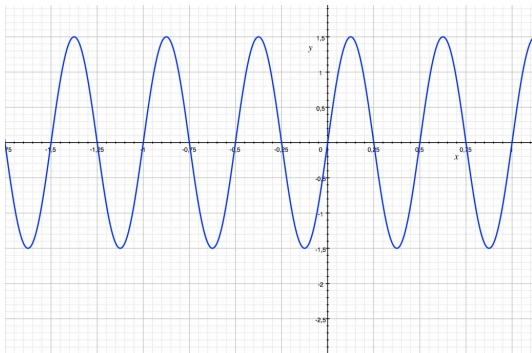
$$p_2(t) = \sin(2\pi\omega(t + T)) = \sin(2\pi\omega t)$$



Considérons plusieurs exemples, d'abord on superpose des signaux de même fréquence mais de déphasages différents.

$$T = \frac{1}{\omega}$$

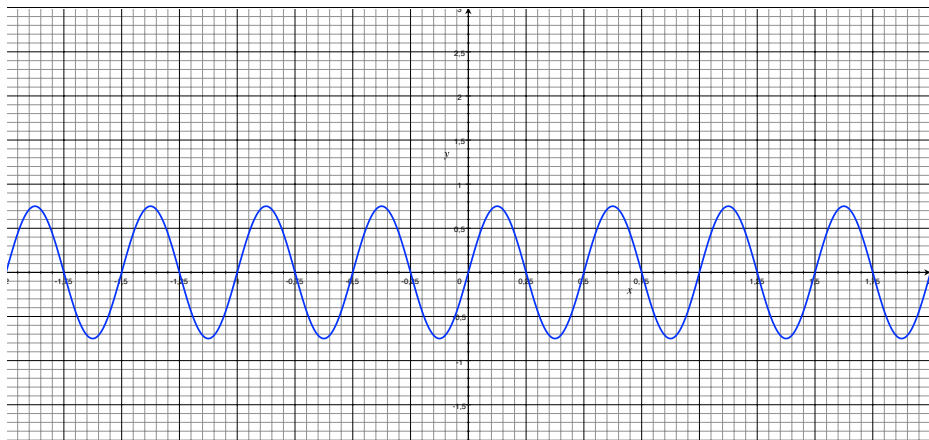
$$p_1(t) + p_2(t) = 2 \sin(2\pi\omega t)$$



Considérons plusieurs exemples, d'abord on superpose des signaux de même fréquence mais de déphasages différents.

$$T = \frac{1}{\omega}$$

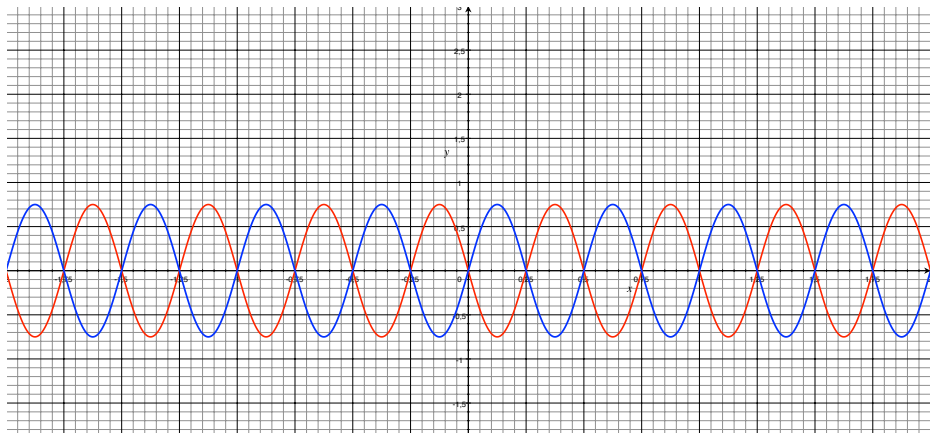
$$p_1(t) = \sin(2\pi\omega t)$$



Considérons plusieurs exemples, d'abord on superpose des signaux de même fréquence mais de déphasages différents.

$$T = \frac{1}{\omega}$$

$$p_1(t) = \sin(2\pi\omega t), p_2(t) = \sin(2\pi\omega(t + T/2)) = -\sin(2\pi\omega t)$$

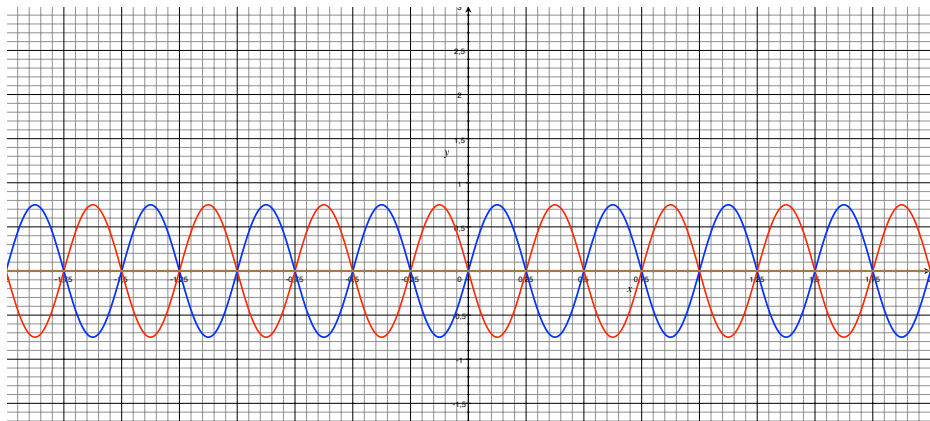


Considérons plusieurs exemples, d'abord on superpose des signaux de même fréquence mais de déphasages différents.

$$T = \frac{1}{\omega}$$

$$p_1(t) = \sin(2\pi\omega t), p_2(t) = \sin(2\pi\omega(t + T/2)) = -\sin(2\pi\omega t)$$

$$p_1(t) + p_2(t) = 0$$



Un second exemple permet d'entendre la formule trigonométrique

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cos(a - b) \sin(a + b)$$

Un second exemple permet d'entendre la formule trigonométrique

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cos(a - b) \sin(a + b)$$

On superpose deux signaux de même amplitude mais de fréquences voisines $\omega - \varepsilon$ et $\omega + \varepsilon$:

Un second exemple permet d'entendre la formule trigonométrique

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cos(a - b) \sin(a + b)$$

On superpose deux signaux de même amplitude mais de fréquences voisines $\omega - \varepsilon$ et $\omega + \varepsilon$:

$$p(t) = \sin(2\pi[\omega + \varepsilon]t) + \sin(2\pi[\omega - \varepsilon]t) = 2 \cos(2\pi\varepsilon t) \sin(2\pi\omega t)$$

Un second exemple permet d'entendre la formule trigonométrique

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cos(a - b) \sin(a + b)$$

On superpose deux signaux de même amplitude mais de fréquences voisines $\omega - \varepsilon$ et $\omega + \varepsilon$:

$$p(t) = \sin(2\pi[\omega + \varepsilon]t) + \sin(2\pi[\omega - \varepsilon]t) = 2 \cos(2\pi\varepsilon t) \sin(2\pi\omega t)$$

Pour εt petit, l'oreille ne perçoit que

$$p(t) = 2 \sin(2\pi\omega t).$$

Un second exemple permet d'entendre la formule trigonométrique

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cos(a - b) \sin(a + b)$$

On superpose deux signaux de même amplitude mais de fréquences voisines $\omega - \varepsilon$ et $\omega + \varepsilon$:

$$p(t) = \sin(2\pi[\omega + \varepsilon]t) + \sin(2\pi[\omega - \varepsilon]t) = 2 \cos(2\pi\varepsilon t) \sin(2\pi\omega t)$$

Pour εt petit, l'oreille ne perçoit que

$$p(t) = 2 \sin(2\pi\omega t).$$

C'est ce qui explique le battement pour les guitares et qui permet aussi d'accorder les instruments de musique.

Revenons en 1693 et à Chantilly, la fontaine produit un bruit qui est une superposition (aléatoire) de plusieurs signaux

$$p(t) = \sum a_\ell \sin(2\pi\omega_\ell(t + \varphi_\ell))$$

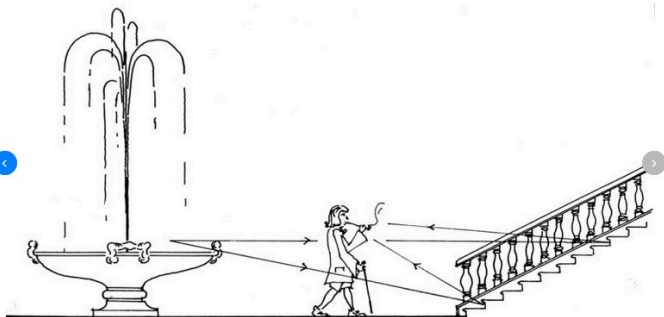
Revenons en 1693 et à Chantilly, la fontaine produit un bruit qui est une superposition (aléatoire) de plusieurs signaux

$$p(t) = \sum a_\ell \sin(2\pi\omega_\ell(t + \varphi_\ell))$$

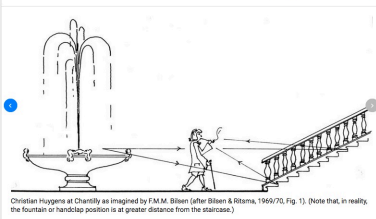
Fig 6 - uploaded by [Frans A Bilsen](#)

Download

View publication



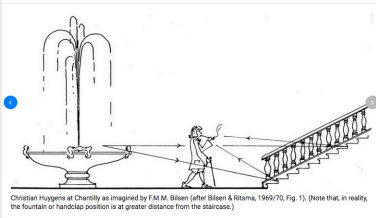
Christian Huygens at Chantilly as imagined by F.M.M. Bilsen (after Bilsen & Ritsma, 1969/70, Fig. 1). (Note that, in reality, the fountain or handclap position is at greater distance from the staircase.)



Ce que perçoit l'oreille de Huygens est le bruit de la fontaine réfléchi sur les marches d'escaliers et c'est donc une superposition du son émis par la fontaine mais décalé du temps que le son met pour parcourir l'aller retour sur la marche d'escalier c'est à dire

$$T = \frac{2L}{c}$$

Où $L = 0,46\text{m}$ est la longueur de la marche d'escalier et $c = 340\text{ms}^{-1}$ est la vitesse du son.

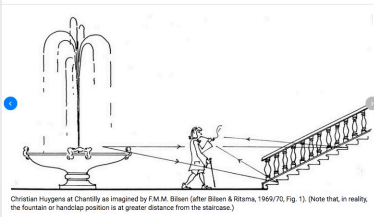


Ce que perçoit l'oreille de Huygens est le bruit de la fontaine réfléchi sur les marches d'escaliers et c'est donc une superposition du son émis par la fontaine mais décalé du temps que le son met pour parcourir l'aller retour sur la marche d'escalier c'est à dire

$$T = \frac{2L}{c}$$

Où $L = 0,46\text{m}$ est la longueur de la marche d'escalier et $c = 340\text{ms}^{-1}$ est la vitesse du son. on trouve

$$T \simeq 2,7\text{ms}$$



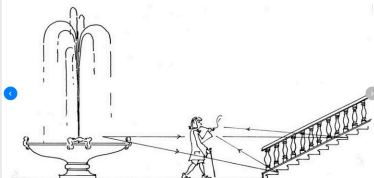
C'est à dire que l'oreille entend

$$p(t) + p(t + T) + p(t + 2T) + \dots + p(t + 9T)$$

s'il y a 10 marches d'escaliers et

$$p(t) + p(t + T) + p(t + 2T) + \dots + p(t + (n - 1)T) = \sum_{k=0}^{n-1} p(t + kT)$$

s'il y a n marches d'escaliers.



Christian Huygens at Chantilly as imagined by F.M.M. Bilzen (after Bilzen & Ritama, 1969/70, Fig. 1). (Note that, in reality, the fountain or handclap position is at greater distance from the staircase.)

Or

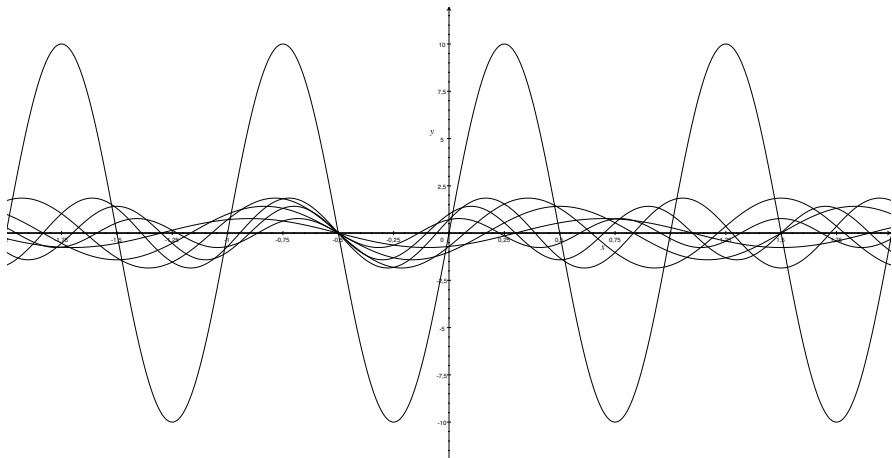
$$p(t) = \sum a_\ell \sin(2\pi\omega_\ell(t + \varphi_\ell))$$

C'est à dire que l'oreille entend une superposition des

$$a_\ell [\sin(2\pi\omega_\ell(t + \varphi_\ell)) + \sin(2\pi\omega_\ell(t + \varphi_\ell + T)) + \sin(2\pi\omega_\ell(t + \varphi_\ell + 2T)) \\ + \dots + \sin(2\pi\omega_\ell(t + \varphi_\ell + (n-1)T))]$$

Examinons ce que cette somme fait pour différentes fréquences.

Examinons ce que cette somme fait pour différentes fréquences



Une seule fréquence est amplifiée et les autres sont bornés.

Le calcul de la fréquence sélectionnée se calcule car on peut exprimer

si $\omega T \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2\pi\omega(t + kT)) = n \sin(2\pi\omega t),$$

Le calcul de la fréquence sélectionnée se calcule car on peut exprimer

si $\omega T \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2\pi\omega(t + kT)) = n \sin(2\pi\omega t),$$

si $\omega T \notin \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2\pi\omega(t + kT)) = \frac{\sin(\pi\omega T n)}{\sin(\pi\omega T)} \times \sin\left(2\pi\omega\left(t + \frac{n-1}{2}T\right)\right)$$

Ce dernier calcul peut s'effectuer à partir du calcul de la somme d'une suite géométrique de raison $e^{2i\pi\omega T}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2\pi\omega(t + kT)) = \Im \left[\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi\omega t} \times \left(e^{2i\pi\omega T} \right)^k \right].$$

En conclusion, le bruit émis par la fontaine est réfléchi sur les différentes marches d'escaliers et seules restent audibles les sons dont la fréquence est un multiple de la fréquence fondamentale

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{c}{2L}$$

où $L = 0,46\text{m}$ est la longueur de la marche d'escalier et $c = 340\text{ms}^{-1}$ est la vitesse du son.

En conclusion, le bruit émis par la fontaine est réfléchi sur les différentes marches d'escaliers et seules restent audibles les sons dont la fréquence est un multiple de la fréquence fondamentale

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{c}{2L}$$

où $L = 0,46\text{m}$ est la longueur de la marche d'escalier et $c = 340\text{ms}^{-1}$ est la vitesse du son. On trouve

$$\omega_0 = 370\text{Hz} \text{ soit } \text{Fa}\#!$$