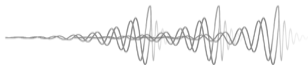


# Peut-on entendre la forme d'un tambour? des maths avec du son...

Eric Paturel

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray  
Université de Nantes - CNRS

Journée Académique de l'IREM des Pays de la Loire



# Entendre une forme ?

- 1 Qu'est-ce qu'un son ?
- 2 Les cordes vibrantes
  - Les résonances
- 3 De la corde à la membrane
  - En dimension 2...
  - Entendre la forme d'un tambour ?

# 1. Qu'est-ce qu'un son ?

# De l'impulsion à l'oreille.

# De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

# De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

- Quelque chose (corde, membrane, diapason...) **vibre** dans un **fluide** (l'air).

# De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

- Quelque chose (corde, membrane, diapason...) **vibre** dans un **fluide** (l'air).
- Cette vibration **se propage** dans ce fluide.

## De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

- Quelque chose (corde, membrane, diapason...) **vibre** dans un **fluide** (l'air).
- Cette vibration **se propage** dans ce fluide.
- Le fluide met le **tympa**n en mouvement.

## De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

- Quelque chose (corde, membrane, diapason...) **vibre** dans un **fluide** (l'air).
- Cette vibration **se propage** dans ce fluide.
- Le fluide met le **tympan** en mouvement.
- Le tympan est relié à de petits os : vibrations **mécaniques**.

# De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

- Quelque chose (corde, membrane, diapason...) **vibre** dans un **fluide** (l'air).
- Cette vibration **se propage** dans ce fluide.
- Le fluide met le **tympan** en mouvement.
- Le tympan est relié à de petits os : vibrations **mécaniques**.
- Un organe (cochlée) transforme cette vibration en impulsions **électriques**.

## De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

- Quelque chose (corde, membrane, diapason...) **vibre** dans un **fluide** (l'air).
- Cette vibration **se propage** dans ce fluide.
- Le fluide met le **tympan** en mouvement.
- Le tympan est relié à de petits os : vibrations **mécaniques**.
- Un organe (cochlée) transforme cette vibration en impulsions **électriques**.
- Ces impulsions sont transmises par des **neurones** au cerveau.

# De l'impulsion à l'oreille.

La chaîne du son :

- Quelque chose (corde, membrane, diapason...) **vibre** dans un **fluide** (l'air).
- Cette vibration **se propage** dans ce fluide.
- Le fluide met le **tympan** en mouvement.
- Le tympan est relié à de petits os : vibrations **mécaniques**.
- Un organe (cochlée) transforme cette vibration en impulsions **électriques**.
- Ces impulsions sont transmises par des **neurones** au cerveau.
- Le cerveau les analyse en temps réel.

# Les vibrations de l'émetteur

# Les vibrations de l'émetteur

Lorsqu'un objet (corde, membrane, diapason) vibre,

# Les vibrations de l'émetteur

Lorsqu'un objet (corde, membrane, diapason) vibre, sa **forme** lui impose certains types de mouvements

# Les vibrations de l'émetteur

Lorsqu'un objet (corde, membrane, diapason) vibre, sa **forme** lui impose certains types de mouvements **périodiques**...

# Les vibrations de l'émetteur

Lorsqu'un objet (corde, membrane, diapason) vibre, sa **forme** lui impose certains types de mouvements **périodiques**...

# Les vibrations de l'émetteur

Lorsqu'un objet (corde, membrane, diapason) vibre, sa **forme** lui impose certains types de mouvements **périodiques**...

Exemples :

# Les vibrations de l'émetteur

Lorsqu'un objet (corde, membrane, diapason) vibre, sa **forme** lui impose certains types de mouvements **périodiques**...

Exemples :

- une corde tendue à ses deux extrémités :



# Les vibrations de l'émetteur

Lorsqu'un objet (corde, membrane, diapason) vibre, sa **forme** lui impose certains types de mouvements **périodiques**...

Exemples :

- une corde tendue à ses deux extrémités :



- une membrane tendue sur un cadre :



# Les vibrations (suite)

# Les vibrations (suite)

En fait

# Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations

# Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences**

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

- vibrations élémentaires  $\Rightarrow$  **modes propres** de l'objet

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

- vibrations élémentaires  $\Rightarrow$  **modes propres** de l'objet

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

- vibrations élémentaires  $\Rightarrow$  **modes propres** de l'objet
- fréquences correspondantes  $\Rightarrow$  **fréquences propres**

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

- vibrations élémentaires  $\Rightarrow$  **modes propres** de l'objet
- fréquences correspondantes  $\Rightarrow$  **fréquences propres**

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

- vibrations élémentaires  $\Rightarrow$  **modes propres** de l'objet
- fréquences correspondantes  $\Rightarrow$  **fréquences propres**

Pourquoi **propres** ?

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

- vibrations élémentaires  $\Rightarrow$  **modes propres** de l'objet
- fréquences correspondantes  $\Rightarrow$  **fréquences propres**

Pourquoi **propres** ?

On va le voir : ces vibrations et ces fréquences leur sont mathématiquement **propres**...

## Les vibrations (suite)

En fait on peut **décomposer** ces vibrations en certaines vibrations périodiques **élémentaires**.

Ces vibrations élémentaires se produisent à des **fréquences** (nombre de périodes par seconde) bien précises.

Vocabulaire :

- vibrations élémentaires  $\Rightarrow$  **modes propres** de l'objet
- fréquences correspondantes  $\Rightarrow$  **fréquences propres**

Pourquoi **propres** ?

On va le voir : ces vibrations et ces fréquences leur sont mathématiquement **propres**... ou presque !

# Pourquoi propre ? La physique parle

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière :

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

## Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

En physique :

## Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

En physique : chaque élément (H, O, N, C,...), lorsqu'on lui donne de l'énergie,

## Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

En physique : chaque élément (H, O, N, C,...), lorsqu'on lui donne de l'énergie, peut émettre de la lumière

## Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

En physique : chaque élément (H, O, N, C,...), lorsqu'on lui donne de l'énergie, peut émettre de la lumière à des fréquences bien précises :

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

En physique : chaque élément (H, O, N, C,...), lorsqu'on lui donne de l'énergie, peut émettre de la lumière à des fréquences bien précises : les fréquences propres.

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

En physique : chaque élément (H, O, N, C,...), lorsqu'on lui donne de l'énergie, peut émettre de la lumière à des fréquences bien précises : les fréquences propres.

Spectre d'émission ou d'absorption :

# Pourquoi propre ? La physique parle

Dans le domaine médical : IRM

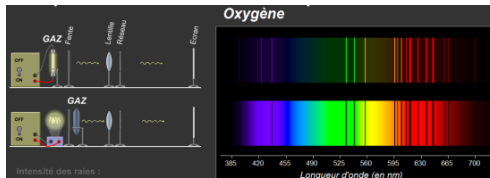
On met le corps dans un champ magnétique

Chaque particule (ici noyau d'atome) réagit en **vibrant** d'une façon particulière : fréquences propres !

Cela permet d'**identifier** les composants du corps, et leur **localisation**.

En physique : chaque élément (H, O, N, C,...), lorsqu'on lui donne de l'énergie, peut émettre de la lumière à des fréquences bien précises : les fréquences propres.

Spectre d'émission ou d'absorption :



# Le spectre sonore

# Le spectre sonore

C'est l'ensemble des fréquences sonores entendues à chaque instant.

# Le spectre sonore

C'est l'ensemble des fréquences sonores entendues à chaque instant.

Un exemple : voir des spectres

# Le spectre sonore

C'est l'ensemble des fréquences sonores entendues à chaque instant.

Un exemple : voir des spectres

Que voit-on ?

# Le spectre sonore

C'est l'ensemble des fréquences sonores entendues à chaque instant.

Un exemple : voir des spectres

Que voit-on ?

Une décomposition en fréquences du signal sonore...

# Le spectre sonore

C'est l'ensemble des fréquences sonores entendues à chaque instant.

Un exemple : voir des spectres

## Que voit-on ?

Une décomposition en fréquences du signal sonore...

Cette décomposition vient des travaux de J. Fourier : séries de Fourier, transformation de Fourier...

# Le spectre sonore

C'est l'ensemble des fréquences sonores entendues à chaque instant.

Un exemple : **voir des spectres**

## Que voit-on ?

Une décomposition en **fréquences** du signal sonore...

Cette décomposition vient des travaux de J. Fourier : séries de Fourier, transformation de Fourier...

A la base du **traitement du signal**.

# Joseph Fourier



## 2. Les cordes vibrantes

# Quelles cordes ?

# Quelles cordes ?

On écoute le son produit par des cordes élastiques tendues à leur extrémités.

# Quelles cordes ?

On écoute le son produit par des cordes élastiques tendues à leur extrémités.

Cordes pincées (guitare, mandoline, banjo, clavecin, etc.),

# Quelles cordes ?

On écoute le son produit par des cordes élastiques tendues à leur extrémités.

Cordes pincées (guitare, mandoline, banjo, clavecin, etc.),  
cordes frappées (piano).

# Quelles cordes ?

On écoute le son produit par des cordes élastiques tendues à leur extrémités.

Cordes pincées (guitare, mandoline, banjo, clavecin, etc.),  
cordes frappées (piano).

Film



# Explications

Ces mouvements compliqués peuvent être **décomposés** en une collection de mouvements simples,

# Explications

Ces mouvements compliqués peuvent être **décomposés** en une collection de mouvements simples, les **modes propres**.

# Les modes propres

Fondamentale

1<sup>ère</sup> harmonique

2<sup>ème</sup> harmonique

etc...



# Les fréquences propres

A chaque mode propre correspond une fréquence propre, “fréquence pure”.

# Les fréquences propres

220 Hz (LA2)

440 Hz (LA3)

660 Hz (MI4)

1 100 Hz (DO#5)



# Exemples

# Exemples

## La guitare

Cordes pincées : voir un spectre de guitare

# Exemples

## La guitare

Cordes pincées : voir un spectre de guitare

## Le piano

Cordes frappées : voir un spectre de piano

# Fréquences propres d'une corde

# Fréquences propres d'une corde

## Les fréquences propres

# Fréquences propres d'une corde

## Les fréquences propres

Elles sont toutes **multiples** d'une fréquence **fondamentale**, déterminée par la corde.

# Fréquences propres d'une corde

## Les fréquences propres

Elles sont toutes **multiples** d'une fréquence **fondamentale**, déterminée par la corde.

Plus la corde est longue, plus la fréquence est basse.

# Fréquences propres d'une corde

## Les fréquences propres

Elles sont toutes **multiples** d'une fréquence **fondamentale**, déterminée par la corde.

Plus la corde est longue, plus la fréquence est basse.

# Fréquences propres d'une corde

## Les fréquences propres

Elles sont toutes **multiples** d'une fréquence **fondamentale**, déterminée par la corde.  
Plus la corde est longue, plus la fréquence est basse.



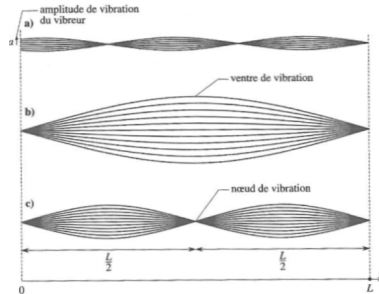
# Les modes propres d'une corde

## Les modes propres

# Les modes propres d'une corde

## Les modes propres

Ce sont les **sinusoïdes**.



# Les fréquences propres

# Les fréquences propres

Elles sont aussi appelées **fréquences de résonance**.

# Les fréquences propres

Elles sont aussi appelées **fréquences de résonance**.  
Si on envoie des vibrations sur l'objet à sa fréquence de résonance : phénomènes d'**amplification**...

# Les fréquences propres

Elles sont aussi appelées **fréquences de résonance**.  
Si on envoie des vibrations sur l'objet à sa fréquence de résonance : phénomènes d'**amplification**...

Film



# Les résonances

# Les résonances

Elles sont parfois à rechercher (IRM, four micro-ondes),

# Les résonances

Elles sont parfois à rechercher (IRM, four micro-ondes), parfois à éviter :

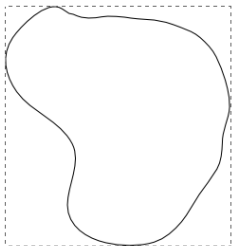
Film

### 3. De la corde à la membrane

# Les membranes vibrantes

## Un tambour

On considère une membrane fixée le long de son bord.  
Supposée homogène, parfaitement élastique.



Qu'est-ce qu'un son ?  
Les cordes vibrantes  
De la corde à la membrane

En dimension 2...  
Entendre la forme d'un tambour ?

# Les surfaces planes



# Les surfaces planes

Contrairement à la corde pour laquelle toutes les fréquences propres sont **multiples d'une fréquence fondamentale** :

$$f_n = n \times f_{\text{fond}} ,$$

# Les surfaces planes

Contrairement à la corde pour laquelle toutes les fréquences propres sont **multiples d'une fréquence fondamentale** :

$$f_n = n \times f_{\text{fond}} ,$$

pour les tambours de forme quelconque, **il n'existe pas de formule** donnant les fréquences propres !

# Les surfaces planes

Contrairement à la corde pour laquelle toutes les fréquences propres sont **multiples d'une fréquence fondamentale** :

$$f_n = n \times f_{\text{fond}} ,$$

pour les tambours de forme quelconque, **il n'existe pas de formule** donnant les fréquences propres ! Sauf dans des cas très particuliers :

# Les surfaces planes

Contrairement à la corde pour laquelle toutes les fréquences propres sont **multiples d'une fréquence fondamentale** :

$$f_n = n \times f_{\text{fond}},$$

pour les tambours de forme quelconque, **il n'existe pas de formule** donnant les fréquences propres ! Sauf dans des cas très particuliers :

- les disques (tambours circulaires)

# Les surfaces planes

Contrairement à la corde pour laquelle toutes les fréquences propres sont **multiples d'une fréquence fondamentale** :

$$f_n = n \times f_{\text{fond}} ,$$

pour les tambours de forme quelconque, **il n'existe pas de formule** donnant les fréquences propres ! Sauf dans des cas très particuliers :

- les disques (tambours circulaires)
- rectangles

# Les surfaces planes

Contrairement à la corde pour laquelle toutes les fréquences propres sont **multiples d'une fréquence fondamentale** :

$$f_n = n \times f_{\text{fond}} ,$$

pour les tambours de forme quelconque, **il n'existe pas de formule** donnant les fréquences propres ! Sauf dans des cas très particuliers :

- les disques (tambours circulaires)
- rectangles
- triangle isocèle

# Les membranophones

Modes propres pour les tambours circulaires :

# Une idée de la complexité : le tambour carré

Tous ces modes ont la **même fréquence propre**...



# Des maths fondamentales

Question de Marc Kac

“**Entendre** la forme”

# Des maths fondamentales

## Question de Marc Kac

“Entendre la forme” = A partir de la **liste des fréquences propres**,

# Des maths fondamentales

## Question de Marc Kac

“Entendre la forme” = A partir de la **liste des fréquences propres**, déterminer la **forme** de la membrane vibrante.

# Des maths fondamentales

## Question de Marc Kac

“**Entendre** la forme” = A partir de la **liste des fréquences propres**, déterminer la **forme** de la membrane vibrante.

## Autres questions

Connaissant le tambour, que peut-on dire sur ses fréquences propres, ses modes propres ?

# Des maths fondamentales

## Question de Marc Kac

“Entendre la forme” = A partir de la **liste des fréquences propres**, déterminer la **forme** de la membrane vibrante.

## Autres questions

Connaissant le tambour, que peut-on dire sur ses fréquences propres, ses modes propres ?

Si on connaît une partie des fréquences propres et des modes propres, que peut-on dire du tambour ?

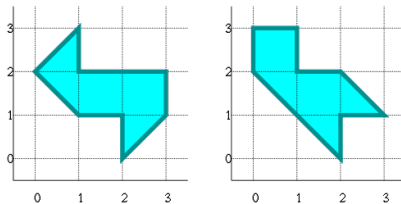
# La réponse à M. Kac

# La réponse à M. Kac

Non ! C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont montré en 1992 que la liste des fréquences propres n'est pas caractéristique du tambour.

# La réponse à M. Kac

Non ! C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont montré en 1992 que la liste des fréquences propres n'est pas caractéristique du tambour. Ces 2 tambours ont les mêmes fréquences propres



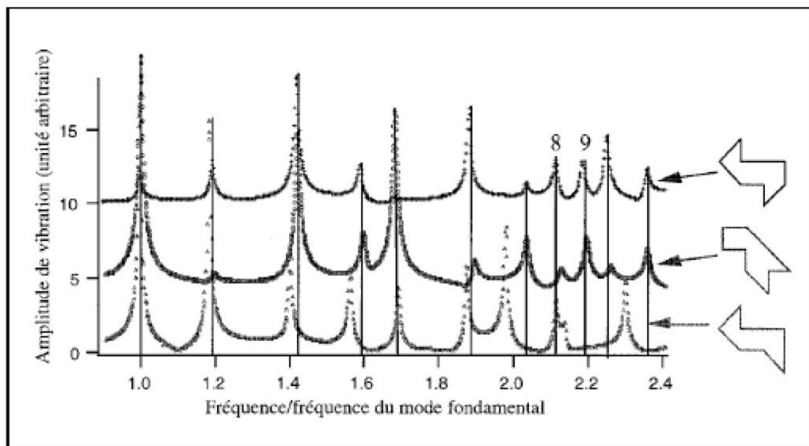
Qu'est-ce qu'un son ?  
Les cordes vibrantes  
De la corde à la membrane

En dimension 2...  
Entendre la forme d'un tambour ?

# Vérification expérimentale



## Vérification expérimentale



**Figure 3** - Trois séries de pics d'amplitude de vibration, correspondant respectivement aux cadres « cocotte », « flèche » et « cocotte déformée ». En abscisse, on a porté la fréquence de vibration du film, normalisée par celle du mode fondamental de ce film. En effet, les fréquences auxquelles le film vibre dé-

ratoire de  
émétiques



Qu'est-ce qu'un son ?  
Les cordes vibrantes  
De la corde à la membrane

En dimension 2...  
Entendre la forme d'un tambour ?

# D'autres réponses



# D'autres réponses

Hillairet 2005

Si on sait que le tambour est **triangulaire**,

# D'autres réponses

Hillairet 2005

Si on sait que le tambour est **triangulaire**, on peut "entendre" les longueurs de ses côtés.

## D'autres réponses

Hillairet 2005

Si on sait que le tambour est **triangulaire**, on peut “entendre” les longueurs de ses côtés.

Attention !

Pour avoir ces informations il faut connaître un très grand nombre de fréquences propres (une infinité pour avoir l'information exacte).

## D'autres réponses

Hillairet 2005

Si on sait que le tambour est **triangulaire**, on peut "entendre" les longueurs de ses côtés.

Attention !

Pour avoir ces informations il faut connaître un très grand nombre de fréquences propres (une infinité pour avoir l'information exacte). Il faut une oreille (appareil) très fine !

## D'autres réponses

Weyl, 1910

La connaissance de toutes les fréquences propres permet de déterminer l'aire du tambour.

# D'autres réponses

Weyl, 1910

La connaissance de toutes les fréquences propres permet de déterminer l'aire du tambour.

Kac, 1966

Elle donne aussi le périmètre et le nombre de trous.

## D'autres réponses

Weyl, 1910

La connaissance de toutes les fréquences propres permet de déterminer l'aire du tambour.

Kac, 1966

Elle donne aussi le périmètre et le nombre de trous.

Hillairet-Judge, 2010

Pour presque tous les triangles, le spectre est simple (1 mode par fréquence)

## D'autres réponses

Weyl, 1910

La connaissance de toutes les fréquences propres permet de déterminer l'aire du tambour.

Kac, 1966

Elle donne aussi le périmètre et le nombre de trous.

Hillairet-Judge, 2010

Pour presque tous les triangles, le spectre est simple (1 mode par fréquence)

Questions ouvertes

Entendre la forme d'un tambour lisse ? convexe ?

# Coda

Merci de votre attention !