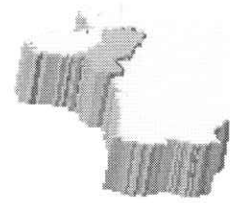


IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE



Trigonométrie algèbre linéaire optique

Daniel BLANCHARD
René SEROUX
Anne-Marie RIGOURD
Hubert CARNEC

1978

TRIGONOMETRIE
ALGEBRE LINEAIRE
OPTIQUE

par

Daniel BLANCHARD
PROFESSEUR DE PHYSIQUE
Lycée Clémenceau NANTES

et

René SEROUX
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
Lycée Jean Perrin REZE

Anne-Marie RIGOURD
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
Lycée La Colinière NANTES

Hubert CARNEC
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
Lycée Guisth'au NANTES

INTRODUCTION

Les programmes actuels de mathématique du second cycle sont conçus de façon telle qu'en classe de seconde on ne parle pas de trigonométrie et qu'un "voile pudique" est jeté sur la notion d'angle. Ce n'est qu'en fin d'année de première que cette notion est abordée après l'étude des rotations vectorielles du plan vectoriel euclidien... et alors le professeur de physique ne reconnaît plus ce "grand sinus" qui, après maintes péripéties (la surjection θ n'étant pas la moindre) se fait tout petit...

Pourtant, dans les programmes de la classe de troisième, figure une initiation à la trigonométrie qui peut, semble-t-il, permettre de faire face aux besoins fondamentaux du cours de physique.

Le présent volume qui, à notre sens, s'adresse tout autant aux professeurs de mathématique que de physique, est divisé en trois parties :

- la première partie est constituée par une approche de ce que peut être en classe de première, un cours de liaison mathématique-physique consacré à l'optique.

- la seconde partie est une information théorique en mathématique. Elle a pour but de montrer deux approches de la trigonométrie : celle pratiquée en troisième d'une part, celle pratiquée en première d'autre part.

- la troisième partie est une information théorique en optique : les systèmes centrés y sont étudiés à l'aide du calcul matriciel mais, à aucun moment, les notions utilisées ne dépassent les possibilités d'un élève de terminale C ou E.

Ce volume est le fruit du travail d'un groupe de liaison mathématique-physique qui a fonctionné à l'IREM de NANTES en 1976-1977. Ce groupe était composé de :

Daniel BLANCHARD (physique- Lycée Clémenceau - NANTES)

Jean-Paul BOUCHOUX (physique - Lycée Clémenceau - NANTES)

René DAGRADA (physique - Lycée LA ROCHE SUR YON)

Jean LEBERRE (PEGC Sciences - CET REZE)

Francis LE CAMUS (physique - Lycée CHANTONNAY)

Joëlle LE JAOUEN (mathématique - Lycée CHANTONNAY)

Suzette MOREAU (mathématique - Lycée LUCON)

Jean-Claude MOREAU (mathématique - Lycée LUCON)

Anne-Marie RIGOURD (mathématique - Lycée La Colinière NANTES)

Francis RIOU (physique - Lycée de LA BAULE)

René SEROUX (mathématique - Lycée Jean Perrin REZE)

La partie physique a été rédigée par Daniel BLANCHARD, la partie mathématiques par René SEROUX, avec la participation de H. CARNEC et A.M. RIGOURD.

Nous sommes heureux de dire ici tout le bénéfice que nous avons retiré des discussions qui ont précédé cette rédaction : nous en remercions vivement nos collègues.

Nos remerciements vont surtout à Catherine LESAULT, secrétaire à l'I.R.E.M., qui a assuré la frappe de ce document avec beaucoup de soin et qui a su, en toutes circonstances, nous accueillir avec gentillesse.

Les auteurs.

PREMIERE PARTIE :

UN COURS DE LIAISON MATHEMATIQUE-PHYSIQUE

EN CLASSE DE PREMIERE

- Cours de mathématique :
- Approximation trigonométriques
- Approximation géométriques
- Applications linéaires et matrices
- Axe de révolution d'une figure.

Cours de physique : lentilles minces

COURS DE MATHEMATIQUE

1 - APPROXIMATIONS TRIGONOMETRIQUES

Nous avons, conformément au programme, posé l'axiome suivant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Après avoir démontré la dérivabilité (donc la continuité) de la fonction sinus et de la fonction cosinus en tout x_0 réel, nous en avons déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

En physique ces trois résultats sont souvent "traduits" de la façon suivante :

"Si x est petit (en pratique inférieur à $\frac{\pi}{18}$) $\sin x \simeq x$, $\operatorname{tg} x \simeq x$,
 $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$."

Nous vous proposons ici d'obtenir de meilleures approximations de $\sin x$, $\cos x$,
 $\operatorname{tg} x$

* Considérons les deux fonctions f et g de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} définies par :

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad f(x) = \sin x - x$$

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad g(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur \mathbb{R}^+ et :

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad f'(x) = \cos x - 1$$

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad f'(x) = \sin x - x$$

Remarquons alors que : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad f'(x) \leq 0$, donc la fonction f est décroissante sur \mathbb{R}^+ . Comme $f(0) = 0$, nous en déduisons que :

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad f(x) \leq 0 \quad \text{soit :}$$

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad \sin x \leq x$$

Mais alors : $x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad g'(x) \leq 0$, donc la fonction g est décroissante sur \mathbb{R}^+ . Comme $g(0) = 0$, nous en déduisons encore que :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad g(x) \leq 0 \quad \text{soit :}$$

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$$

* Cherchons alors à définir une fonction h de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^+ , telle que $h(0) = 0$ et : $x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad x - h(x) \leq \sin x$

$$\text{Posons : } x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad \alpha(x) = x - \sin x - h(x)$$

$$\text{Alors : } x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad \alpha'(x) = 1 - \cos x - h'(x)$$

Remarquons que $\alpha(0) = 0$. Donc, si nous choisissons h' de façon que :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad \alpha'(x) \leq 0$$

$$\text{Alors : } x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad \alpha(x) \leq 0$$

$$\text{Or nous savons que : } x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} \leq 0$$

$$\text{Il suffit de poser : } x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad h'(x) = \frac{x^2}{2}$$

En raison de la condition initiale $h(0) = 0$, il en résulte que :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad h(x) = \frac{x^3}{6}$$

$$\text{Donc } x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

* On cherche maintenant à définir une fonction k de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^+ , telle que : $k(0) = 0$ et

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + k(x)$$

Posons : $x \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \quad \beta(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - k(x)$

Alors : $x \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \quad \beta'(x) = -\sin x + x - k'(x)$

Remarquons que $\beta(0) = 0$. Donc, si nous choisissons k' de façon que :

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad \beta'(x) \leq 0$$

alors : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad \beta(x) \leq 0$.

Or nous savons que : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad x - \sin x - \frac{x^3}{6} \leq 0$

Il suffit de poser : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad k'(x) = \frac{x^3}{6}$

En raison de la condition initiale $k(0) = 0$, il en résulte que :

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad k(x) = \frac{x^4}{24}$$

donc :

$$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

* Cherchons maintenant à définir une fonction l de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^+ telle que $l(0) = 0$ et $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + l(x)$

Posons : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad \gamma(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} - l(x)$

Alors : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad \gamma'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - l'(x)$

Remarquons que $\gamma(0) = 0$; donc, si nous choisissons l' de façon que :

$x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad \gamma'(x) \leq 0$ alors $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad \gamma(x) \leq 0$.

Or nous savons que : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 0$

Il suffit donc de poser : $x \in \mathbb{R}^+ , \forall x \quad l'(x) = \frac{x^4}{24}$

En raison de la condition initiale $l(0) = 0$ il en résulte que :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad l(x) = \frac{x^5}{120}$$

Donc :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Remarque : On retient plus aisément ce résultat sous la forme :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

* En itérant cette méthode, on trouverait ensuite une fonction m de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^+ , telle que $m(0) = 0$ et :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - m(x) \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad m(x) = \frac{x^6}{720} = \frac{x^6}{6!}$$

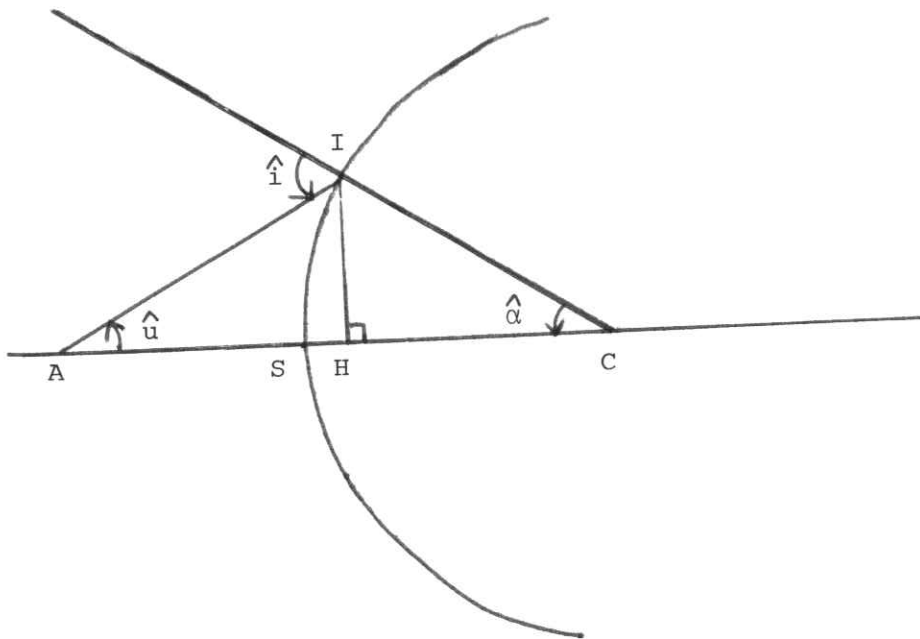
D'où le résultat :

$$x \in \mathbb{R}^+, \forall x \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

2 - APPROXIMATIONS GEOMETRIQUES

a) Relation entre mesures d'angles

Considérons la figure ci-dessous



Désignons par i, u, α les écarts angulaires des angles géométriques $\hat{i}, \hat{u}, \hat{\alpha}$

On sait que : $i = u + \alpha$,

$$\text{tg } \alpha = \frac{IH}{CH} \quad ; \quad \text{tg } u = \frac{IH}{AH}$$

Si u et α sont "petits" (inférieurs à $\frac{\pi}{18}$) on peut écrire : $u \simeq \text{tg } u$ et $\alpha \simeq \text{tg } \alpha$.

D'où $\alpha \simeq \frac{u \cdot AH}{CH}$ Posons $AH = x$; $AS = p$ et $AC = d$

Alors : $AS \leq x \leq AC$ et $CH = d - x$

(Remarquons que : $AS = x \iff u = 0$)

$$\alpha \simeq u \frac{x}{d-x} = u \frac{1}{\frac{d}{x} - 1}$$

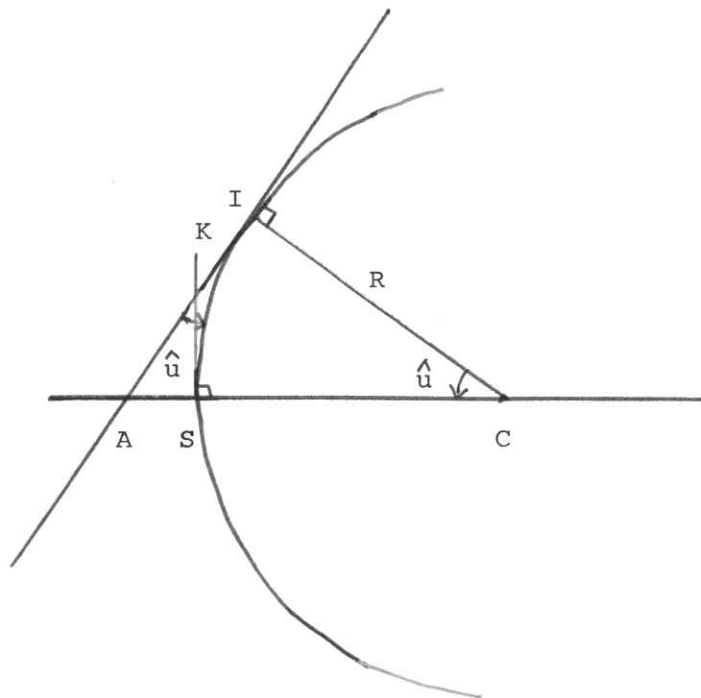
$$\alpha \simeq u \left[1 + \frac{1}{\frac{d}{x} - 1} \right]$$

Or $x \xrightarrow{u \rightarrow 0} p$ et $\frac{d}{x} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{d}{p}$

donc

$i \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$

b) Assimilation d'un arc de cercle au segment de tangente correspondant



L'arc \widehat{IS} a pour longueur l et $l = u.R$

Le segment $[IA]$ a **une** longueur IA telle que : $IA = CA.\sin u$

Si u est petit, $\sin u \simeq u$ d'où $IA \simeq CA.u$

Comme $CA \geq R$, $IA \geq l$

D'autre part

$$CA.u = R.u + SA.u = l + SA.u$$

$$SA = AK.\sin u$$

$$SA \simeq AK.u$$

$$SA \leq AI.u \quad (AK \leq AI)$$

$$CA.u \leq l + AI.u^2$$

$$IA \leq l + AI.u^2$$

$$AI \leq \frac{l}{1 - u^2} \quad \text{d'où} \quad \underline{\underline{l \leq AI \leq \frac{l}{1 - u^2}}}$$

Si on suppose $|u| \ll \frac{\pi}{2}$, u^2 est négligeable devant 1 et alors

$$\boxed{l \simeq AI}$$

3 - NOTIONS ELEMENTAIRES D'ALGEBRE LINEAIRE

(voir Nanta Iremica N° 9)

A) Application linéaire

f est une application linéaire de E vers F si, et seulement si, quels que soient les éléments \vec{u} et \vec{v} de E , quel que soit le réel α :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

Exemple

* Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui, au couple (y, u) associe le couple (y', u') tel que :

$$\begin{cases} y' = y + u \\ u' = u \end{cases}$$

Il est clair que :

• Si $f(y_1, u_1) = (y_1 + u_1, u_1)$ et $f(y_2, u_2) = (y_2 + u_2, u_2)$ alors :

$$f(y_1 + y_2, u_1 + u_2) = (y_1 + y_2 + u_1 + u_2, u_1 + u_2)$$

$$f(y_1 + y_2, u_1 + u_2) = f(y_1, u_1) + f(y_2, u_2)$$

• D'autre part :

$$f(\alpha y_1, \alpha u_1) = (\alpha y_1 + \alpha u_1, \alpha u_1)$$

$$f(\alpha y_1, \alpha u_1) = \alpha(y_1 + u_1, u_1)$$

Soit $f(\alpha y_1, \alpha u_1) = \alpha f(\vec{u}_1)$

Donc f est linéaire.

* Au lieu d'écrire
$$\begin{cases} y' = y + u \\ u' = u \end{cases}$$

On convient d'écrire :
$$\begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

Le tableau $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est appelé matrice associée à l'application linéaire f .

B) Matrices carrées d'ordre 2

Rappelons que si l'on désigne par \mathcal{M}_2 l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur lequel on a défini :

* une égalité :
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$$

* une addition notée $+$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix}$$

* une multiplication notée \times

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{bmatrix}$$

* une loi externe (application de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_2$ dans \mathcal{M}_2) notée \bullet

$$\alpha \bullet \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{bmatrix}$$

$(\mathcal{M}_2, +, \cdot)$ a une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel

$(\mathcal{M}_2, +, \times)$ a une structure d'anneau non commutatif, unitaire, non intègre.

Le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

est le réel, noté $\det A$, tel que :

$$\det A = ad - bc$$

On note aussi : $\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

On démontre que : quelles que soient les matrices A et B

$$\det(A \times B) = \det A \times \det B$$

Si l'on désigne par \mathcal{M}_2^* l'ensemble des matrices carr es d'ordre 2 à déterminant non nul :

$(\mathcal{M}_2^*, \times)$ est un groupe non commutatif

La matrice inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ est la matrice not e A^{-1} telle que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Exemple

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det A = 1$ et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Remarque

Nous aurons besoin, en optique, du résultat suivant :

Si on multiplie une matrice quelconque $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ par une matrice du type $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, le coefficient b de la matrice A est conservé.

En effet :

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a\alpha+c \\ b & b\alpha+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b\alpha & c+d\alpha \\ b & d \end{bmatrix}$$

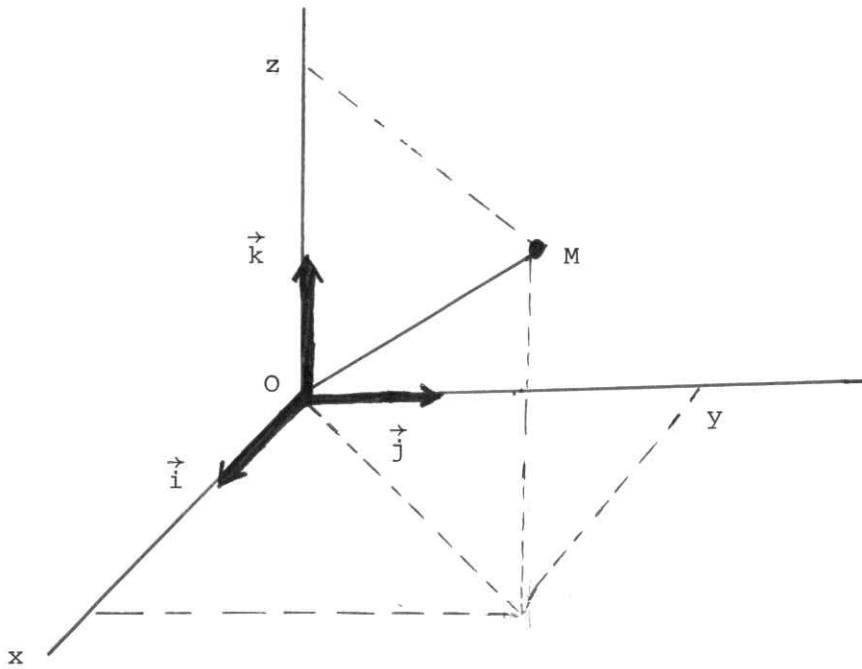
4 - REPERE D'ESPACE - AXE DE REVOLUTION D'UNE FIGURE

Soit \mathcal{A} un espace affine euclidien orienté de dimension 3 dont l'espace vectoriel est noté E .

Soit O un point de \mathcal{A} et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E .

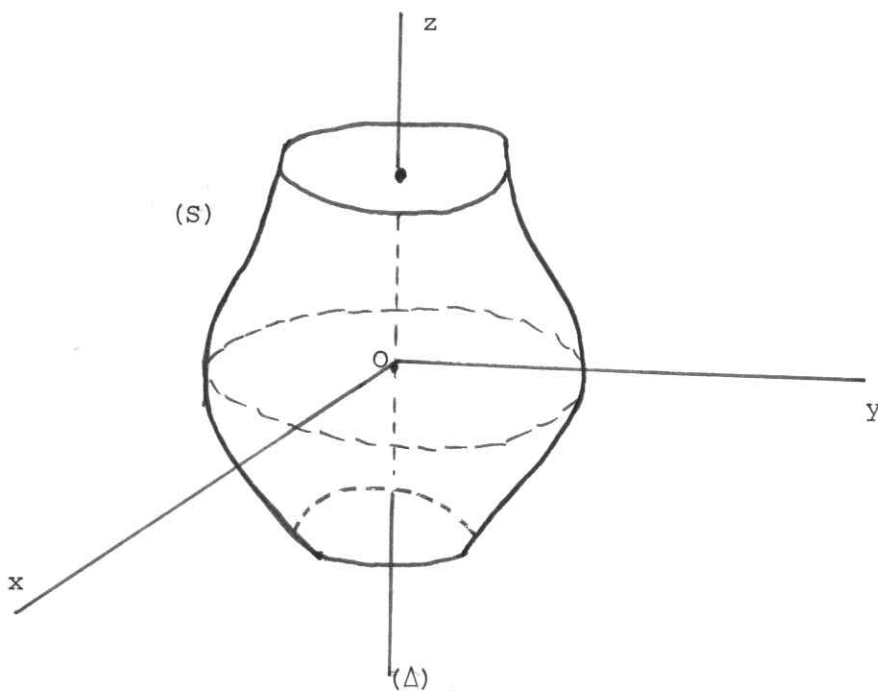
On appelle repère d'espace de \mathcal{A} , noté R_e , le couple (O, \mathcal{B}) .

Tout point M de l'espace est parfaitement déterminé par la donnée de ses coordonnées cartésiennes, notées $(x, y, z)_{R_e}$, qui sont les composants, notées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, du vecteur \vec{OM} relativement à la base \mathcal{B} .

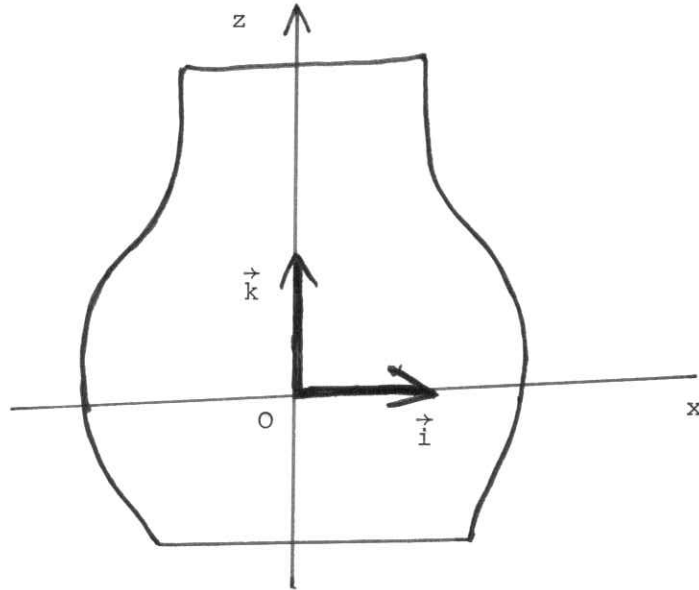


Le vecteur \vec{OM} est souvent appelé "rayon vecteur" du point M.

Si une figure (S) est engendrée par la rotation d'une courbe (C) autour d'un axe (Δ) on dit que (S) admet (Δ) pour axe de révolution ; on peut ramener son étude dans l'espace de dimension 3, à une étude dans un plan contenant cet axe de révolution.



On étudie alors une section (s) de (S) par un plan quelconque contenant (Δ) ; ici, on pourra étudier la section par le plan (xOz) , par exemple.



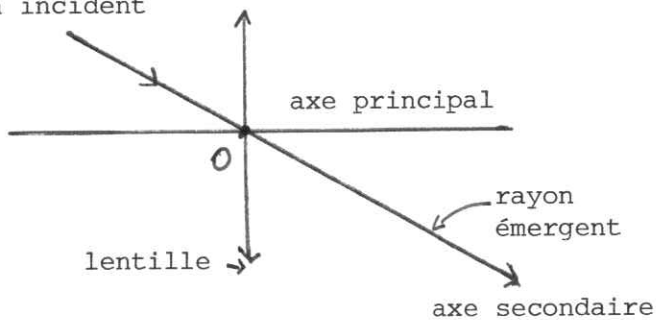
COURS D'OPTIQUE GEOMETRIQUE

Emploi "direct" des matrices en lère C : Cas d'une lentille mince

1 - PROPRIETES ADMISES D'UNE LENTILLE MINCE

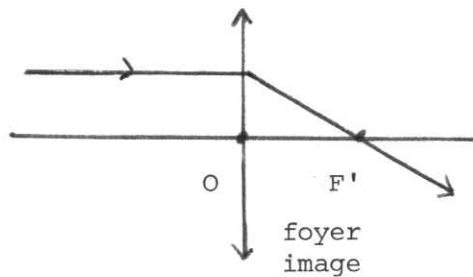
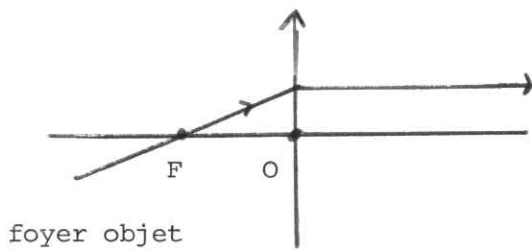
- Existence et propriété du centre optique O : Tout rayon incident passant par O (son support est dit axe optique secondaire ; l'axe optique principal est l'axe de révolution de la lentille) est transformé par la lentille en un rayon émergent de même support (il n'est pas dévié à la traversée de la lentille).

rayon incident



- Existence et propriétés des foyers

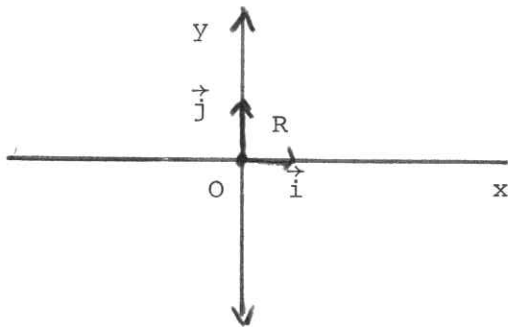
- tout rayon incident passant par le foyer objet F est transformé en un rayon parallèle à l'axe principal
- tout rayon incident parallèle à l'axe principal est transformé en un rayon émergent passant par le foyer image F'.



2 - PROBLEMES DE REPERAGE

- Repère d'espace dans un plan de section principale (plan contenant l'axe principal)

$R = (O, B)$ d'origine O et de base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée



$(\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1)$; \vec{i} est le vecteur unitaire directeur de l'axe principal, orienté dans le sens de propagation de la lumière ("de gauche à droite") ; \vec{j} est coplanaire à la lentille et dirigé vers le haut ("vertical et ascendant").

L'axe (O, \vec{i}) peut être noté Ox ; l'axe (O, \vec{j}) , Oy .

On peut ensuite passer de cet espace de dimension 2 à "l'espace" de dimension 3 par rotation autour de l'axe (O, \vec{i}) .

La rotation de (O, \vec{j}) engendre un plan, contenant la lentille, qui est un plan de front (plan orthogonal à l'axe principal),

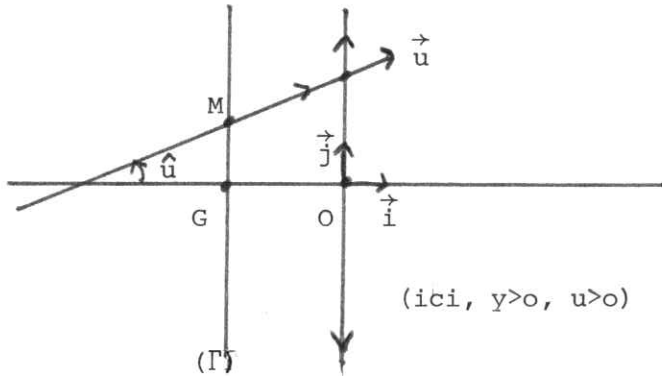
- Positions des foyers relativement à R ou, plus précisément, à l'axe (O, \vec{i})

- Foyer objet : $\overline{OF} = f =$ distance focale objet

- Foyer image : $\overline{OF'} = f' =$ distance focale image.

Nous supposons que les milieux d'entrée (à gauche de la lentille) et de sortie (à droite) ont même indice de réfraction (ce qui est, en particulier, le cas s'ils sont identiques, par exemple s'il s'agit d'air). Dans ce cas, la loi du retour inverse de la lumière montre que : $f = - f'$

- Repérage relativement à R d'un rayon incident



- Soit un plan de front (Γ) coupant l'axe principal en G ; ce plan est dit plan de référence d'entrée. Un rayon incident le coupe en M, d'ordonnée $\overline{GM} = y$. Ce rayon est supposé appartenir au plan de section principale choisi comme

plan de figure. Son vecteur unitaire directeur, ayant pour sens le sens de propagation de la lumière, est \vec{u} .

Relativement à R, deux paramètres détermineraient la position de ce rayon, si l'on se fixe \overline{OG} :

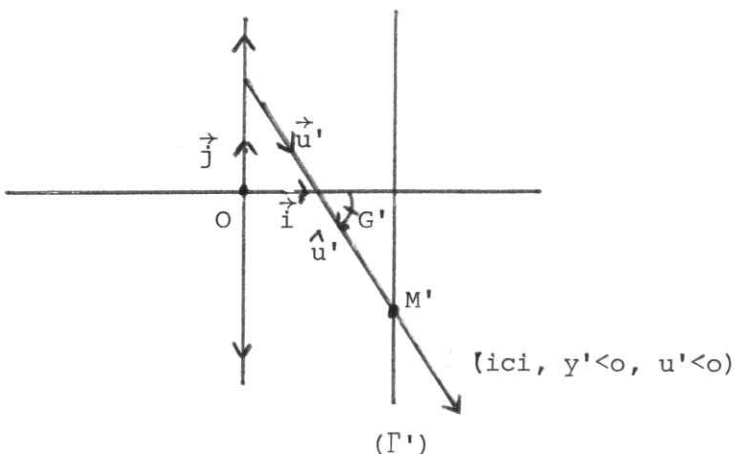
- $y \in \mathbb{R}$

- la mesure u de la détermination principale de l'angle $\hat{u} = \widehat{(\vec{i}, \vec{u})}$ appelé angle d'ouverture du rayon incident :

$$u \in [-\pi, +\pi] \text{ rad}$$

y et u sont d'espèces différentes (y a les dimensions d'une longueur, u est sans dimension). Leur ensemble ordonné est le couple : (y, u) .

- Repérage relativement à R d'un rayon émergent



- Soit un plan de front (Γ') coupant l'axe principal en G' ; (Γ') est le plan de référence de sortie.

Un rayon émergent coupe (Γ') en M', d'ordonnée $\overline{G'M'} = y'$. Ce rayon est

supposé appartenir au plan de section principale pris comme plan de figure. Son vecteur unitaire directeur est \vec{u}' .

Si l'on se fixe $\overline{OG'}$, la position de ce rayon est déterminée, relativement à R, par :

- y'

- la mesure u' de l'angle d'ouverture $\hat{u}' = (\vec{i}, \vec{u}')$.

D'où le couple : (y', u') .

3 - CONDITIONS DE GAUSS RELATIVES AUX RAYONS

Considérons un rayon incident et le rayon émergent correspondant.

Les existences du centre optique, des foyers, de formules relativement simples, nécessitent que l'on opère dans des conditions appelées conditions de Gauss (dans lesquelles, de toutes façons, l'étude n'est qu'approximative).

Pour les rayons, l'une des conditions est que ces rayons soient paraaxiaux.

Un rayon incident sera paraaxial pour :

$$\underline{|u| \ll \frac{\pi}{2} \text{ rad}}$$

On démontre que le rayon émergent correspondant sera paraaxial et on aura donc :

$$\underline{|u'| \ll \frac{\pi}{2} \text{ rad}}$$

4 - MATRICE DE TRANSFERT DE LA LENTILLE AVEC PLANS DE REFERENCE QUELCONQUES

Nous admettrons que, dans les conditions de Gauss, pour \overline{OG} et $\overline{OG'}$ fixés, la transformation par la lentille du couple (y, u) en couple (y', u') est une application linéaire, c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$y' = T_1 y + T_2 u$$

$$u' = T_3 y + T_4 u$$

Les quatre termes : T_1 , T_2 , T_3 , T_4 des deux relations sont fixés, au moins pour \overline{OG} et $\overline{OG'}$ fixés (T_1 et T_4 sont sans dimension ; T_2 a les dimensions d'une longueur, T_3 de l'inverse d'une longueur).

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

matrice colonne
à deux termes

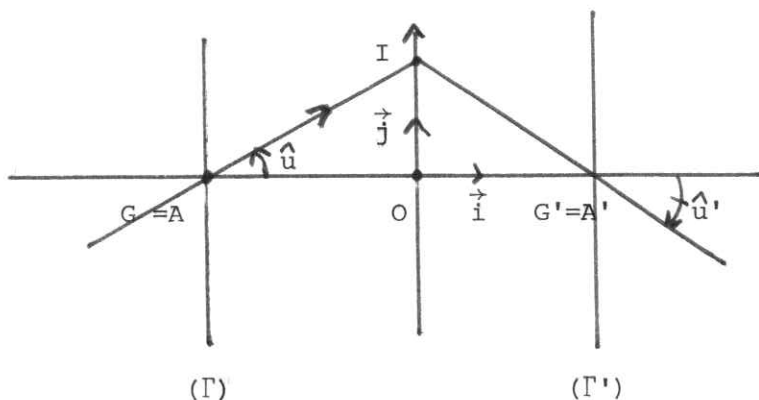
matrice carrée
d'ordre 2

matrice colonne

La matrice : $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}$ est dite matrice de transfert de la lentille avec plans de référence (Γ) et (Γ') qui sont, à priori, quelconques.

Le problème est la détermination de ses quatre coefficients, et l'attribution d'un "sens physique" à chacun d'eux.

5 - SENS PHYSIQUE DE T_2 : RELATION DE CONJUGAISON



- Admettons que, dans les conditions de Gauss, la lentille soit stigmatique pour un couple quelconque (A, A') , le point objet A et le point image A' correspondant appartenant à l'axe principal.

Nous poserons (formules de Descartes) origine unique au centre optique O :

$$\overline{OA} = p \quad \overline{OA'} = p'$$

Prenons alors le cas particulier où $G = A$, $G' = A'$.

Tout rayon incident passant par A doit être transformé en un rayon émergent passant par A'.

Donc : $\forall u \quad y = 0 \implies y' = 0$ Or : $y' = T_1 y + T_2 u$

Ce qui nécessite $T_2 = 0$ Or T_2 est une expression faisant intervenir : p, p' , et les caractéristiques de la lentille. Celles-ci se résument à une seule : f ou f' .

On choisit de préférence f' .

Donc : $T_2 = f(p, p', f')$ $T_2 = 0 \iff h_2(p, p', f') = 0$

C'est la relation de conjugaison (De Descartes) de la lentille.

Nous expliciterons la fonction h_2 plus loin.

6 - SENS PHYSIQUE DE T_4 : GROSSISSEMENT ANGULAIRE OU RAPPORT DE CONVERGENCE

Dans le cas du 5 : $u' = T_3 y + T_4 u$

$$y = 0 \implies \frac{u'}{u} = T_4$$

Le rapport sans dimension $\frac{u'}{u}$ ($\in \mathbb{R}$) est appelé grossissement angulaire ou rapport de convergence G de la lentille pour le couple (A, A') :

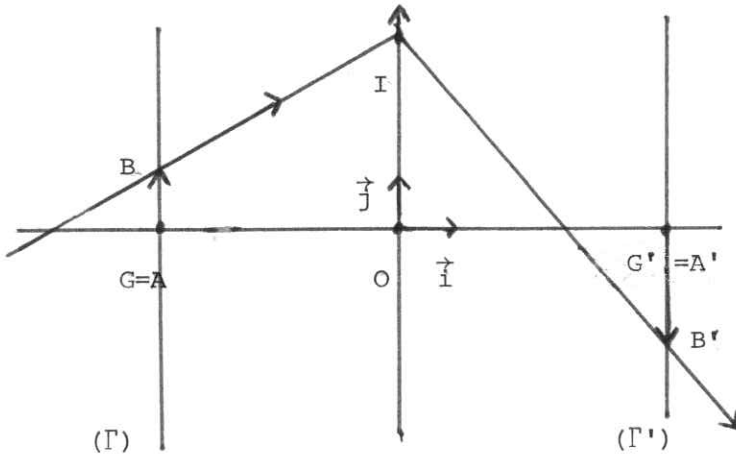
$$G = T_4 \quad \text{pour} \quad T_2 = 0$$

A priori, comme pour $T_2, G = h'_4(p, p', f')$; comme $T_2 = 0$ établit une relation liant p, p', f' , deux variables p et f' , ou p' et f' seulement sont indépendantes.

G ne doit donc être fonction, pour f' donné, que de p ou de p' . Cette grandeur a peu d'intérêt physique.

Nous expliciterons la fonction h_4 plus loin.

7 - SENS PHYSIQUE DE T_1 : GRANDISSEMENT LINEAIRE



Dans les conditions du 5, considérons un objet rectiligne AB de faible dimension devant le rayon de base de la lentille (autre condition de Gauss), orthogonal à l'axe principal.

La lentille en donne une image rectiligne A'B', dans le même plan de section principale, et également orthogonale à l'axe principal.

En particulier, l'image du point objet B est B'.

L'ordonnée de B est : $\overline{AB} = y$ du rayon incident (axe (Γ))

L'ordonnée de B' est : $\overline{A'B'} = y'$ du rayon émergent (avec (Γ')).

$y' = T_1 y + T_2 u$ Or : $T_2 = 0$, les points A et A' étant conjugués

Donc : $\frac{y'}{y} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = T_1$

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma$ est une grandeur sans dimension appelée grandissement linéaire de la lentille pour le couple (A,A') (on démontre qu'elle ne dépend que de ce couple).

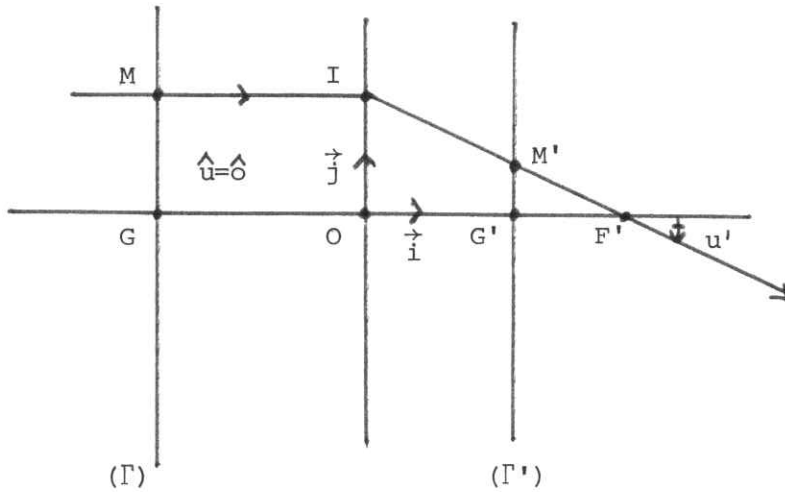
Comme G, γ s'exprimera en fonction de p et f', ou de p' et f'.

Donc, pour

$$T_2 = 0 : \quad T_1 = \gamma$$

Nous expliciterons plus loin la relation fournissant γ

8 - SENS PHYSIQUE DE T_3 : CONVERGENCE



Revenons au cas où les plans de référence (Γ) et (Γ') sont quelconques.

Soit un rayon incident parallèle à l'axe principal ; il traverse (Γ) en M et $\overline{GM} = y = \text{constante}$, quel que soit (Γ) pour un rayon donné.

Le rayon émergent correspondant passe par F' et traverse (Γ') en M' tel que : $\overline{G'M'} = y'$ (variable si (Γ') change...).

Comme $u = 0$ et $u' = T_3 y + T_4 u \Rightarrow u' = T_3 y$

Or, dans le triangle $F'OI$:

$$\text{tg } u' = - \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}} = \frac{y}{f'} \quad \text{Si } |u'| \ll \frac{\pi}{2} \text{ rad, } \text{tg } u' \approx u' :$$

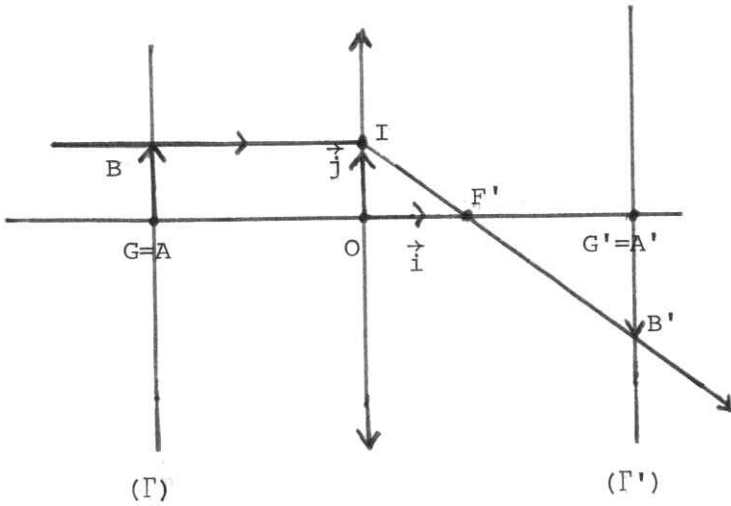
$$u' \approx - \frac{y}{f'}$$

Donc, quelq que soient les plans de référence : $T_3 = - \frac{1}{f'}$

$\frac{1}{f'}$ = C est la convergence de la lentille. La relation précédente peut donc aussi

s'écrire : $T_3 = - C$.

9 - RELATIONS FOURNISSANT γ



Revenons au cas 6 : $T_2 = 0, T_1 = \gamma$
 Soit un rayon incident passant par B et parallèle à l'axe principal ;
 il est transformé en rayon émergent passant par B' et coupant l'axe principal en F'.

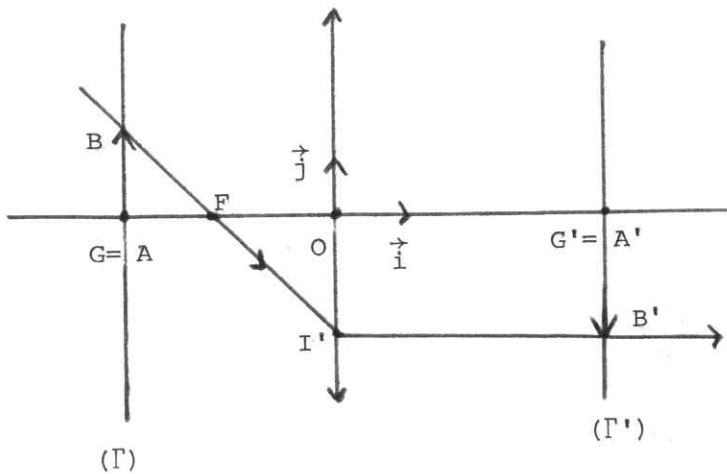
par définition : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$; or, $\overline{AB} = \overline{OI}$. Si l'on considère les triangles

homothétiques $F'A'B'$ et $F'OI$:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = - \frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}} \quad \overline{OF'} = f' \quad \text{Relation de Chasles : } \overline{F'A'} = \overline{OA'} - \overline{OF'} = p' - f'$$

$$\gamma = - \frac{p' - f'}{f'} = - \frac{p'}{f'} + 1$$

$$\boxed{\gamma = 1 - \frac{p'}{f'}}$$



On a obtenu γ en fonction de p' .
 On peut l'obtenir en fonction de p en considérant le rayon incident passant par B et F ; le rayon émergent correspondant est parallèle à l'axe principal et passe par B'.

$$\overline{A'B'} = \overline{OI'}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OI'}}{\overline{AB}} = - \frac{\overline{OF'}}{\overline{FA}} \quad (\text{triangle FOI' et FAB})$$

$$\overline{OF'} = f = - f' \quad \overline{FA} = \overline{OA} - \overline{OF'} = p - f$$

$$\gamma = - \frac{f}{p-f} = \frac{f'}{p+f'}$$

L'élimination de f' entre les deux formules conduit à l'expression plus symétrique

$$\boxed{\gamma = \frac{p'}{p}} \quad (\text{si } p \neq 0)$$

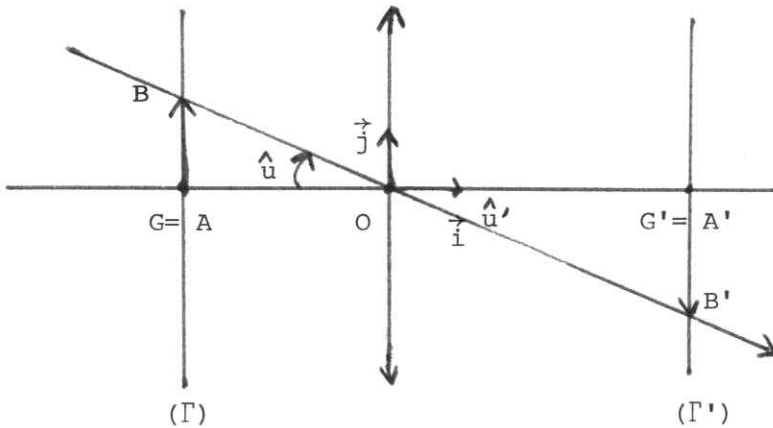
10 - RELATION DE CONJUGAISON

En égalant les deux expressions de γ (la 1ère et la 3ème) :

$$1 - \frac{p'}{f'} = \frac{p'}{p} \quad \text{pour } p \neq 0. \quad \text{Si l'on suppose aussi } p' \neq 0 \text{ en divisant par } p' :$$

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{p} \quad \text{ou :} \quad \boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}} \quad \text{: Relation de conjugaison de Descartes.}$$

Remarque : autre méthode pour obtenir γ



Soit le rayon incident passant par B et O ; il est transformé en rayon émergent passant par B' et tel que $\hat{u}' = \hat{u}$.

On obtient aisément :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$$

11 - RELATION DONNANT G

Si l'on tient à expliciter G, revenons à la figure du 5 :

$$\text{tg } u = -\frac{\overline{OI}}{\overline{OA}} \quad ; \quad \text{tg } u \approx u \quad \text{tg } u' = -\frac{\overline{OI}}{\overline{OA'}} \quad ; \quad \text{tg } u' \approx u' \quad \overline{OA} = p, \quad \overline{OA'} = p'$$

$$u \approx -\frac{\overline{OI}}{p} \quad ; \quad u' \approx -\frac{\overline{OI}}{p'} \quad ; \quad \boxed{G = \frac{u'}{u} = \frac{p}{p'}}$$

$$(p' \neq 0)$$

qui est la forme la plus symétrique des relations de Descartes.

12 - MATRICE DE TRANSFERT AVEC PLANS DE REFERENCE CONJUGUES

Elle s'écrit :

$$T = \begin{bmatrix} \frac{p'}{p} & \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} - \frac{1}{f'} = 0 \\ -\frac{1}{f'} & \frac{p}{p'} \end{bmatrix}$$

Remarques

- la matrice n'a aucun intérêt si les plans de référence ne sont pas conjugués ; le seul terme qui conserve un sens, et la même valeur, est $T_3 = -\frac{1}{f'}$, (car il ne dépend que de la lentille !).

- on aurait pu traiter :

11 avec 6

9 avec 7

mais on a besoin du résultat de 9 pour le 10 !

- le cas de l'association de deux lentilles minces est traité dans la 3ème partie de ce document.

2ème PARTIE

INFORMATION MATHEMATIQUE

En classe de troisième

1. Rapport de projection d'un axe sur un axe
2. Distance de deux points d'un plan
3. Isométries
4. Angles géométriques
5. Ecart angulaire
6. Fonctions trigonométriques
7. Relations dans le triangle rectangle

En classe de première

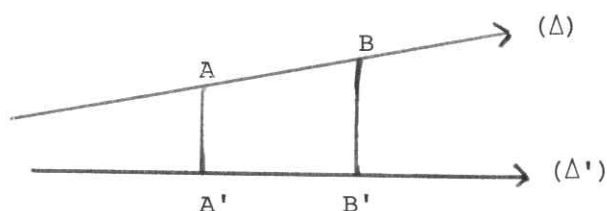
1. Produit scalaire - Orthogonalité
2. Isométries vectorielles
3. Orientation d'un plan vectoriel
4. Angle de deux vecteurs
5. Mesure des angles
6. Fonctions trigonométriques

EN CLASSE DE TROISIEME

Nous vous proposons de mettre en évidence les différentes étapes du programme de troisième qui conduisent à la notion d'angle géométrique et à celle d'écart angulaire.

1 - RAPPORTS DE PROJECTION ORTHOGONALE D'UN AXE SUR UN AXE

Soit (Δ) et (Δ') deux axes, A et B deux points de (Δ) , A' et B' leurs projections orthogonales respectives sur (Δ') . Le rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est, d'après l'axiome de THALES, indépendant des points A et B choisis sur (Δ) .

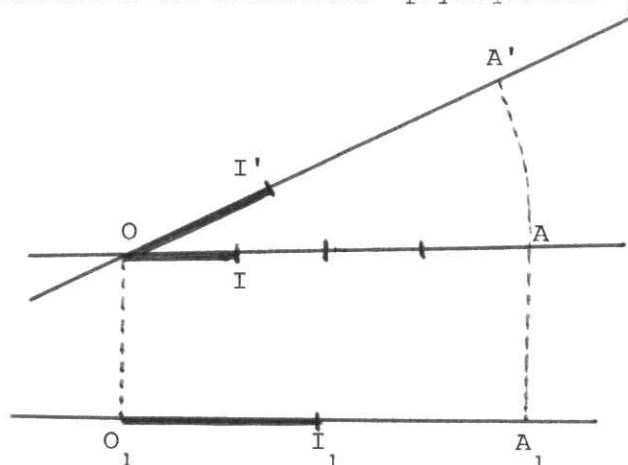


Le rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est appelé rapport de projection orthogonale de (Δ) sur (Δ') et noté $C(\Delta, \Delta')$.

2 - DISTANCE DE DEUX POINTS D'UN PLAN.

Etant donnés deux points d'un plan, il existe une droite et une seule contenant ces deux points. On pourrait imaginer de munir la droite (AB) d'une structure d'axe et de dire que la distance des points A et B dans le plan est la distance de ces deux points sur l'axe.

Cela conduirait à des situations "physiquement" aberrantes du type suivant :



$$d(O, A') = 3$$

$$d(O, A) = 2$$

$$d(O_1, A_1) = 4$$

alors que les segments $[OA]$, $[OA']$, $[O_1 A_1]$ ont même "longueur" (au sens physique) c'est-à-dire superposables.

Pour obtenir un modèle mathématique plus adéquat, on munit le plan mathématique de l'axiome dit "de symétrie du rapport de projection orthogonale" qui s'énonce :

Pour tout couple d'axes (Δ, Δ') , le rapport de projection orthogonale de Δ sur Δ' est égal au rapport de projection orthogonale de Δ' sur Δ .

Le plan mathématique muni de cet axiome est dit euclidien.

Cet axiome a pour conséquence de lier entre elles les structures euclidiennes des droites du plan. En fait ceci correspond au choix d'une droite de longueur dans le plan.

3 - ISOMETRIES

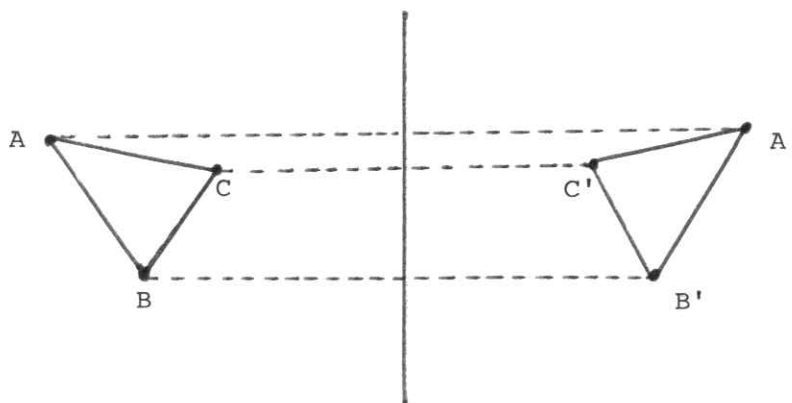
On appelle isométrie du plan euclidien P toute bijection f de P dans lui même telle que, quels que soient les points A et B d'images respectives A' et B' par f , on ait : $d(A', B') = d(A, B)$

Remarque

On dit souvent qu'une isométrie "conserve les distances".

On étudie, en troisième, les isométries suivantes :

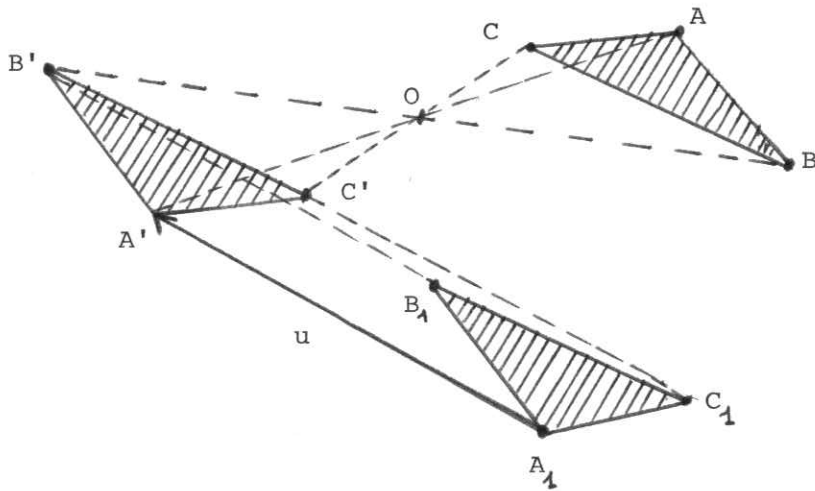
translations, symétries centrales, symétries orthogonales.



Les deux triangles (ABC) et (A'B'C') sont dits isométriques.

Remarque : Il ne faut pas dire que ces triangles sont "égaux".

Toutefois, considérons la figure suivante :



* Le triangle (A'B'C') transformé de (A_1, B_1, C_1) par la translation de vecteur \vec{u} , noté $t_{\vec{u}}$, est isométrique à (A_1, B_1, C_1)

* Le triangle (A'B'C') transformé de (A, B, C) par la symétrie de centre O , notée S_O est isométrique à (A, B, C) .

On peut alors dire que les transformés de (A, B, C) et (A_1, B_1, C_1) respectivement par S_O et $t_{\vec{u}}$ sont égaux.

4 - ANGLE GEOMETRIQUE

Dans l'ensemble des couples de demi-droites de même origine, on définit la relation suivante :

$(Ax, Ay) \mathcal{D}_V (A'x', A'y') \iff$ (il existe une isométrie transformant Ax en $A'x'$ et Ay en $A'y'$).

On démontre aisément que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

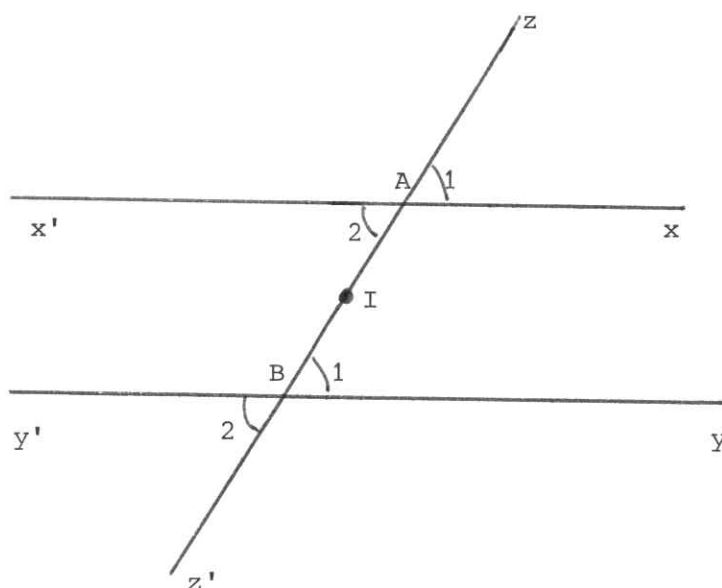
Toute classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R} est un angle géométrique.

L'angle géométrique dont (Ax, Ay) est un représentant est noté \widehat{xAy} .

Dire que $\widehat{xAy} = \widehat{uBv}$ c'est dire que les couples (Ax, Ay) et (Bu, Bv) sont isométriques.

Retour... dans le passé

Un certain nombre d'expressions qui ont nourri nos veillées de "potaches" ont disparu du langage "moderne" : que sont devenus nos "angles opposés par le sommet", nos angles "alternes-internes", "correspondants" ?... Cela ne va pas sans créer quelques soucis aux professeurs de physique. Essayons de s'y retrouver :

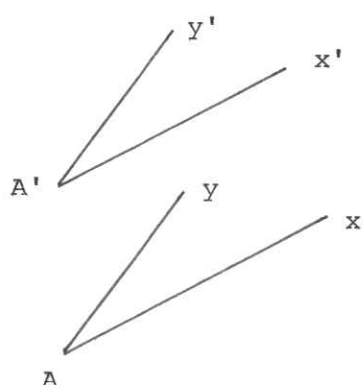


La symétrie centrale de centre A transforme $[Ax)$ en $[Ax')$ et $[Az)$ en $[Az')$. Les couples (Ax, Az) et (Ax', Az') sont isométriques et représentant le même angle, noté \widehat{A}_1 ou \widehat{A}_2 .

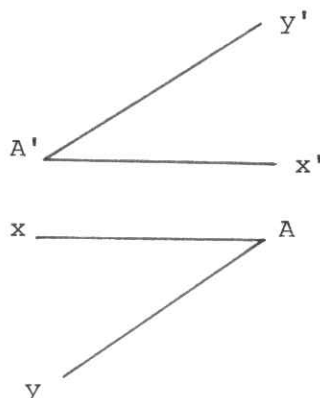
La translation de vecteur \vec{AB} transforme $[Ax)$ en $[By)$ et $[Az)$ en $[Bz)$. Les couples (Ax, Az) et (By, Bz) sont isométriques et représentant le même angle, noté \widehat{A}_1 ou \widehat{B}_1 .

La symétrie centrale de centre I transforme $[Az')$ en $[Bz)$ et $[Ax')$ en $[By)$. Les couples (Az', Ax') et (Bz, By) sont isométriques et représentant le même angle, noté \widehat{A}_2 ou \widehat{B}_1 .

Nous retrouvons une situation analogue en ce qui concerne les figures suivantes ("angles à côtés parallèles") :



(translation de vecteur $\vec{AA'}$)



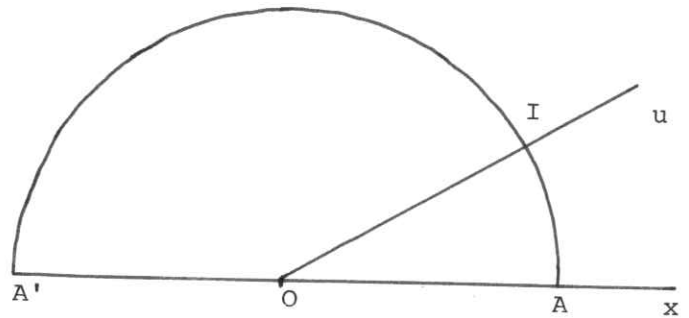
(symétrie centrale de centre I milieu de $[AA']$)

5 ECART ANGULAIRE

Soit le demi-cercle de centre O et de diamètre $[AA']$ tel que $d(O, A) = 1$.

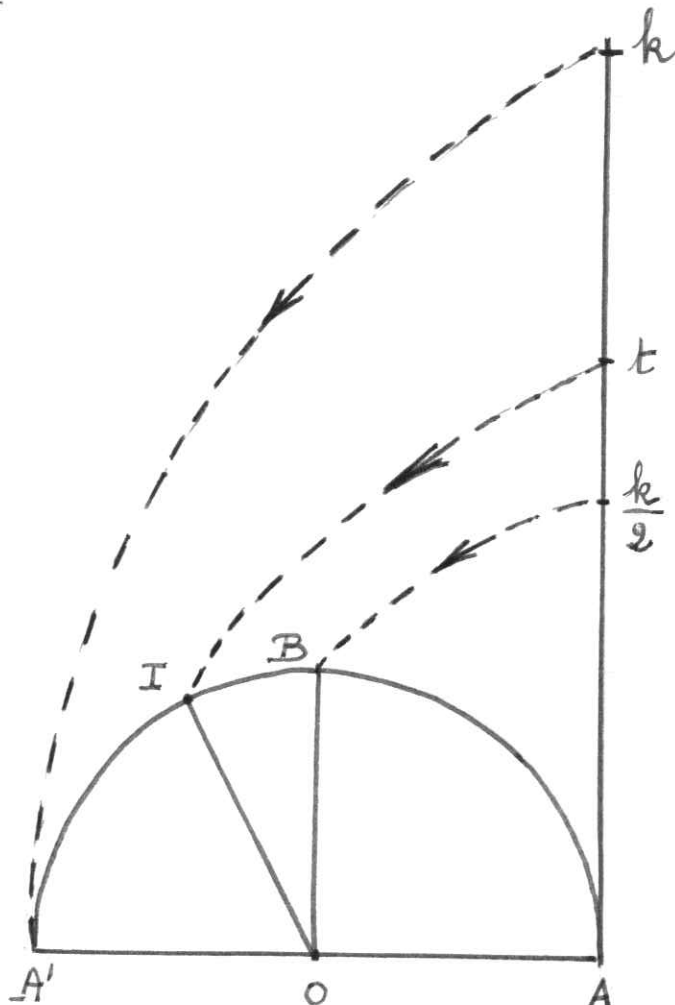
A tout point I de ce demi-cercle, on associe l'angle géométrique \widehat{AOI} dont un représentant est (Ox, Ou) .

Réciproquement, pour tout angle géométrique \widehat{xOu} , on construit son représentant dont un côté est la demi droite $[OA)$ et dont l'autre côté coupe le demi-cercle en I .



On construit ainsi une bijection entre l'ensemble \mathcal{A} des angles géométriques et le demi-cercle de centre O et de rayon 1 .

Si ce demi-cercle est matérialisé par le bord d'un demi-disque cartonné et que nous enroulions un fil sur celui-ci en partant de A nous mettons en évidence l'existence d'une bijection entre l'ensemble des points du demi-cercle et l'intervalle $[0, k]$ de \mathbb{R}^+



La composée des deux bijections précédentes est une bijection, notée E_k , de \mathcal{A} vers $[0, k]$ qui, à l'angle géométrique \widehat{AOI} associe le réel t appelé "écart angulaire" de l'angle \widehat{AOI} .

On note : $E_k(\widehat{AOI}) = t$

Si $k = 180$ on dit que l'écart angulaire est exprimé en degrés.

Si $k = 200$ il est exprimé en grades

Si $k = \pi$ il est exprimé en radians.

On admet alors que :

$$E_k(\widehat{xOy}) = E_k(\widehat{xOu}) + E_k(\widehat{uOy})$$

et l'on définit "angle aigu" et "angle obtus" :

$\widehat{\alpha}$ est aigu si, et seulement si $0 < E_k(\widehat{\alpha}) < \frac{k}{2}$

$\widehat{\beta}$ est obtus si, et seulement si $\frac{k}{2} < E_k(\widehat{\beta}) < k$

On peut aussi définir la notion "d'angles complémentaires" et "d'angles supplémentaires" :

"Deux angles α et β sont complémentaires si, et seulement si :

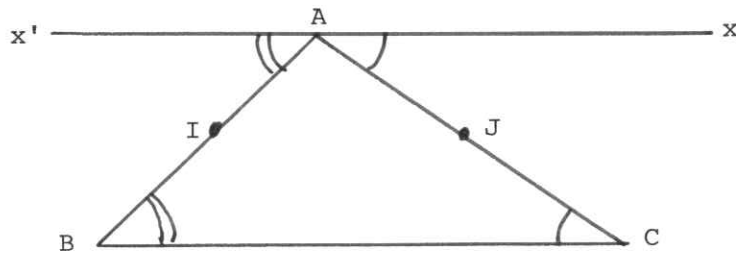
$$E_k(\widehat{\alpha}) + E_k(\widehat{\beta}) = \frac{k}{2}$$

Ils sont supplémentaires si, et seulement si :

$$E_k(\widehat{\alpha}) + E_k(\widehat{\beta}) = k "$$

Enfin on démontre que "la somme des écarts angulaires des angles géométriques d'un triangle est égale à k ".

A titre d'exemple donnons la démonstration de ce théorème.



Désignons par S_I la symétrie de centre I milieu de $[AB]$ et par S_J la symétrie de centre J milieu de $[AC]$. Il vient :

$$S_I [(BA, BC)] = (Ax', AB)$$

$$S_J [(CA, CB)] = (Ax, AC)$$

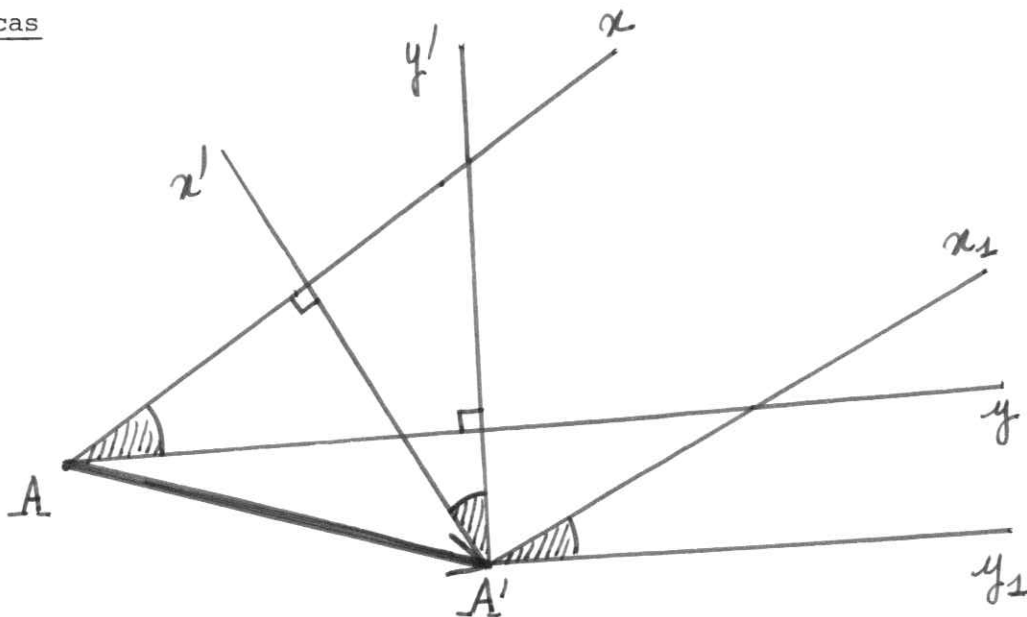
Mais : $E_k(\widehat{x'AB}) + E_k(\widehat{BAC}) + E_k(\widehat{CAx}) = k$

d'où $E_k(\widehat{ABC}) + E_k(\widehat{BAC}) + E_k(\widehat{ACB}) = k$

* Angles à côtés perpendiculaires

Une notion utile en physique et qui a disparu des actuels programmes du 1er cycle était jadis connue sous le nom d'"angles à côtés perpendiculaires".

1er cas

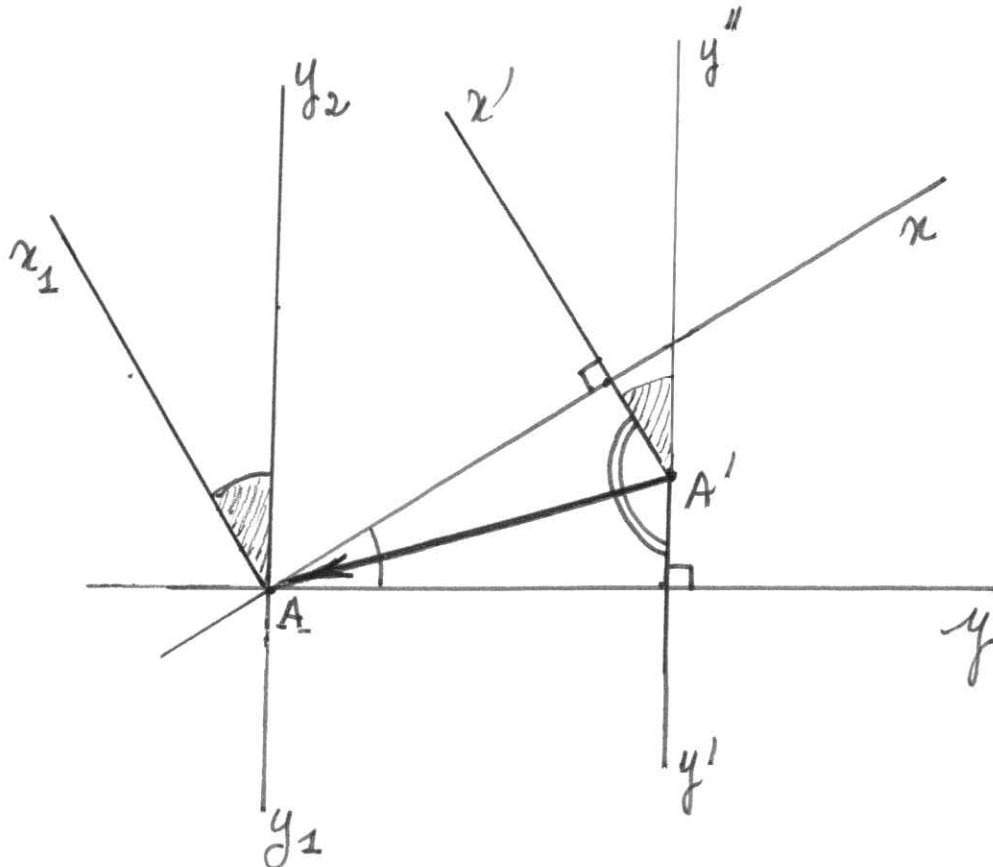


Nous nous proposons de comparer les angles \widehat{xAy} et $\widehat{x'A'y'}$. La translation de vecteur $\vec{AA'}$ transforme le couple de demi-droites (Ax, Ay) en le couple isométrique $(A'x_1, A'y_1)$ tel que : $(A'x_1) \parallel (Ax)$ et $(A'y_1) \parallel (Ay)$, donc $\widehat{x'A'x_1}$ et $\widehat{y'A'y_1}$ sont droits.

Les angles $\widehat{x'A'y}$ et $\widehat{x_1A'y_1}$ ayant même complément $\widehat{x_1A'y'}$ sont égaux et par suite : $\widehat{x'A'y'} = \widehat{xAy}$.

Si (Ax, Ay) et $(A'x', A'y')$ sont des représentants de deux angles aigus tels que : $(Ax) \perp (A'x')$ et $(Ay) \perp (A'y')$, alors $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$.

2ème cas



Nous nous proposons de comparer les angles \widehat{xAy} et $\widehat{x'A'y'}$. La translation de vecteur $\vec{A'A}$ transforme les demi-droites $[A'x')$, $[A'y')$, $[A'y'')$ respectivement en $[Ax_1)$, $[Ay_1)$, $[Ay_2)$.

Les angles $\widehat{x'A'y'}$ et $\widehat{x_1Ay_1}$ sont égaux ; les angles $\widehat{x'A'y''}$ et $\widehat{x_1Ay_2}$ sont égaux.

De plus d'après le 1er cas, \widehat{xAy} et $\widehat{x_1Ay_2}$ sont égaux.

Il en résulte que :

$$E(\widehat{xAy}) + E(\widehat{x'A'y'}) = E(\widehat{x'Ay''}) + E(\widehat{x'A'y'}) = \pi$$

Si (Ax, Ay) et $(A'x, A'y')$ sont respectivement des représentants d'un angle aigu et d'un angle obtus tels que

$(Ax) \perp (Ax')$ et $(Ay) \perp (A'y')$ alors :

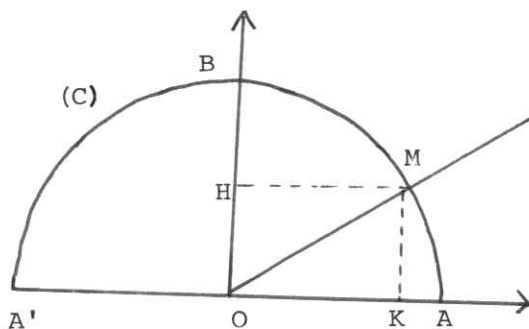
$$E(\widehat{xAy}) + E(\widehat{x'A'y'}) = \pi$$

6 TRIGONOMETRIE

Soit (C) le demi-cercle de centre O et de rayon 1 : (O, \vec{OA}, \vec{OB}) est un repère orthonormé du plan.

Soit M un point de (C), H et K les projetés orthogonaux de M sur (OA) et (OB).

Posons : $E_{\pi}(\widehat{AOM}) = x$



a) L'application de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} qui, au réel x, associe le réel \overline{OH} (ordonnée de M dans le repère (O, \vec{OA}, \vec{OB})) est appelée "application sinus" ; on note :

$$\overline{OH} = \sin x$$

b) L'application de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} qui, au réel x, associe le réel \overline{OK} (abscisse de M dans le repère (O, \vec{OA}, \vec{OB})) est appelée "application cosinus" ; on note :

$$\overline{OK} = \cos x$$

c) Si $x \neq \frac{\pi}{2}$ on appelle "application tangente" l'application de $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ vers \mathbb{R} qui, à x, associe le réel $\frac{\sin x}{\cos x}$

on note : $tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Le théorème de Pythagore permet alors de démontrer la relation : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et d'étudier les cas particuliers où x prend les valeurs $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

De la même façon si, $E_{180}(\widehat{AOM}) = u$ on définit les réels notés $\sin_{180} u$ et $\cos_{180} u$ et les relations trigonométriques dans un triangle rectangle.

EN CLASSE DE PREMIERE

Nous allons donner ici les idées directrices qui conduisent aux notions d'angle et de mesure des angles dans les actuels programmes de première des lycées. Nous ne donnons aucune démonstration ; les lecteurs intéressés par le détail de cet exposé peuvent se reporter au volume n° 9 de la Collection Nanta-Iremica intitulé "Algèbre linéaire et géométrie vectorielle".

1 - PRODUIT SCALAIRE - ORTHOGONALITE

1-1 Produit scalaire

Etant donné un espace vectoriel réel E , on appelle "produit scalaire" sur E , toute application φ de $E \times E$ vers \mathbb{R} satisfaisant aux axiomes suivants :

$$\textcircled{A}_1 \quad \forall \vec{u}, \forall \vec{v}, \forall \vec{w} \quad \varphi(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{u}, \vec{w})$$

$$\textcircled{A}_2 \quad \forall \alpha, \forall \vec{u}, \forall \vec{v} \quad \varphi(\vec{u}, \alpha \vec{v}) = \alpha \varphi(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\textcircled{A}_3 \quad \forall \vec{u}, \forall \vec{v} \quad \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$$

$$\textcircled{A}_4 \quad \vec{u} \in E - \{\vec{0}\}, \forall \vec{u} \quad \varphi(\vec{u}, \vec{u}) > 0$$

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit "espace vectoriel euclidien". Dans la suite nous noterons : $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

La norme d'un vecteur \vec{u} est le réel noté $\|\vec{u}\|$ tel que $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{u}}$

Un vecteur est dit unitaire (ou normé) si et seulement si sa norme est égale à 1.

1-2 Orthogonalité

On définit alors la notion d'orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul.

Ainsi que la notion de sous-espaces vectoriels orthogonaux :

Deux sous-espaces vectoriels F et F' de E sont orthogonaux si, et seulement si tout vecteur \vec{u} de F est orthogonal à tout vecteur \vec{u}' de F' .

Le procédé d'orthogonalisation de SCHMIDT permet de construire des bases orthogonales puis orthonormées.

Relativement à une base orthonormée, par exemple $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace vectoriel de dimension 3, le produit scalaire des vecteurs

$$\vec{U} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{U}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$$

est

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = XX' + YY' + ZZ'$$

2 - ISOMETRIES VECTORIELLES

2-1 Définition

On appelle isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien réel E toute application f de E dans lui même telle que :

$$\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \quad f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

On dit souvent que f "conserve le produit scalaire".

A partir de cette définition on démontre deux propriétés caractéristiques d'une isométrie vectorielle :

- f est linéaire et f "conserve les normes"

$$\forall \vec{u} \quad \vec{u} \in E \quad \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$$

- f est linéaire et transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée de E.

2-2 Propriétés d'une isométrie vectorielle d'un plan vectoriel euclidien

a) Ces définitions générales étant posées, on s'intéresse aux isométries vectorielles d'un plan euclidien. Elles constituent un groupe non commutatif appelé groupe orthogonal du plan vectoriel euclidien

b) Les isométries vectorielles d'un plan vectoriel euclidien sont de deux types :

- les "rotations vectorielles" dont la matrice relativement à une base orthonormée est de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

- les "symétries vectorielles" dont la matrice relativement à une base orthonormée est $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

c) L'ensemble \mathcal{O} des rotations vectorielles d'un plan vectoriel constitue un groupe commutatif.

3 - ORIENTATION D'UN PLAN VECTORIEL

3-1 Introduction-définition

a) Dans l'ensemble des bases orthonormées d'un plan vectoriel on définit la relation suivante \mathcal{P} :

$(\vec{u}, \vec{v}) \mathcal{P} (\vec{u}', \vec{v}')$ si, et seulement si, il existe une rotation r telle que
 $u' = r(\vec{u})$ et $v' = r(\vec{v})$.

c) Définition

ORIENTER le plan vectoriel euclidien c'est PRIVILEGIER L'UNE DES CLASSES d'équivalence.

3-2 Propriété

La matrice d'une rotation vectorielle est indépendante de la base orthonormée directe choisie.

Par conséquent une rotation r est caractérisée par les coefficients a et b de sa matrice

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

On posera

$$\begin{cases} \text{Cos } r = a \\ \text{Sin } r = b \end{cases}$$

Remarque

Si une rotation r' est caractérisée par

$$\begin{cases} a' = \text{Cos } r' \\ b' = \text{Sin } r' \end{cases}$$

on obtient $\text{Cos}(r \circ r')$ et $\text{Sin}(r \circ r')$ en effectuant le produit des matrices respectives de r et de r' .

4 - ANGLE DE DEUX VECTEURS

4-1 Angle de deux vecteurs unitaires

a) Soit \mathcal{U} l'ensemble des vecteurs unitaires. Considérons dans $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ la relation binaire φ définie par :

$$(\vec{u}, \vec{u}') \varphi (\vec{v}, \vec{v}') \text{ si, et seulement si, il existe une rotation } r$$

telle que

$$\begin{cases} \vec{u}' = r(\vec{u}) \\ \vec{v}' = r(\vec{v}) \end{cases}$$

Cette relation φ est une relation d'équivalence.

Chaque classe d'équivalence est appelé angle. Si (\vec{u}, \vec{u}') est un représentant d'une classe, cette classe sera notée $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$ et appelée angle du couple de vecteurs unitaires (\vec{u}, \vec{u}') .

b) Remarque : A chaque rotation r est associé un angle et un seul. Par conséquent nous pouvons noter cet angle r .

Ainsi $\hat{r} = \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} \iff \vec{u}' = r(\vec{u})$

4-2 Groupe additif $(\mathcal{A}, +)$ des angles

Soit \mathcal{A} l'ensemble des angles. Nous savons que (\mathcal{R}, o) est un groupe commutatif et d'après la remarque ci-dessus (4-1 b) il existe une bijection entre \mathcal{R} et \mathcal{A} . Le schéma suivant montre comment on peut munir \mathcal{A} d'une loi interne appelée addition et notée $+$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R} & \longleftrightarrow & \mathcal{A} \\
 r & \longleftrightarrow & \hat{r} \\
 r' & \longleftrightarrow & \hat{r}' \\
 \downarrow \text{loi } o & & \downarrow \text{loi } + \\
 r \circ r' = r' \circ r & \longleftrightarrow & \hat{r} + \hat{r}' = \hat{r}' + \hat{r}
 \end{array}$$

(\mathcal{R}, o) étant un groupe commutatif, il résulte de l'isomorphisme ainsi défini que $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif.

4-3 Angle de deux vecteurs quelconques

Etant donné deux vecteurs \vec{v} et \vec{v}' non nuls, les vecteurs $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ et $\frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$

sont unitaires.

Par définition

$$\widehat{(\vec{v}, \vec{v}')} = \left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|} \right)$$

4-4 Relation de Chasles

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et soit $\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$ $\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}$$

posons $\hat{r} = \widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}$ $\hat{r}' = \widehat{(\vec{u}_2, \vec{u}_3)}$ et soit r et r' les rotations respectivement associées à \hat{r} et \hat{r}' . Nous avons :

$$r(\vec{u}_1) = \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad r'(\vec{u}_2) = \vec{u}_3 \quad \text{d'où} \quad \vec{u}_3 = r'or(\vec{u}_1)$$

Ainsi $\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_3)} = \hat{r} + \hat{r}'$

D'où $\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)} + \widehat{(\vec{u}_2, \vec{u}_3)} = \widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_3)}$ et par conséquent

$$\widehat{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)} + \widehat{(\vec{v}_2, \vec{v}_3)} = \widehat{(\vec{v}_1, \vec{v}_3)}$$

4-5 Cosinus et Sinus de l'angle de deux vecteurs

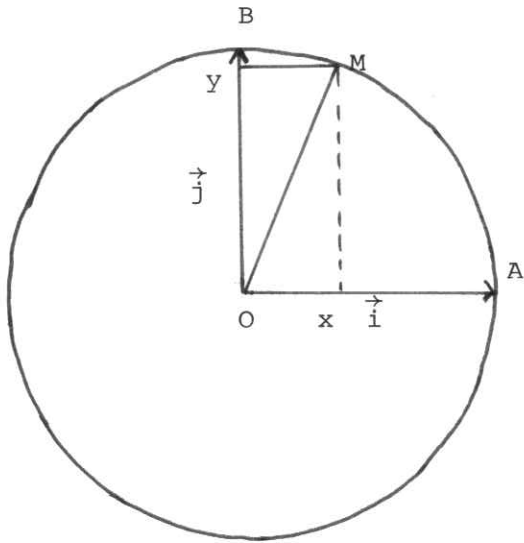
Les Sinus et Cosinus de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ de deux vecteurs, sont donnés par les formules suivantes :

$$\cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \sin \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

5 - MESURE DES ANGLES

5-1 Cercle trigonométrique

a) Définition :



On appelle cercle trigonométrique du plan affine P tout couple (C, A) où C est un cercle de rayon 1 inclus dans P et A un point de C.

- * O est le centre du cercle
- * (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé direct du plan P.

b) Remarque 1 : Pour tout angle \hat{r} associé à la rotation r du plan vectoriel E il existe un point M unique tel que $r(\vec{OA}) = \vec{OM}$.

En conséquence $\|\vec{OM}\| = \|\vec{OA}\| = 1$, ce qui entraîne que M est élément de C.

Réciproquement pour tout point M de C le couple de vecteurs unitaires (\vec{OA}, \vec{OM}) détermine un angle unique r.

L'application suivante :

$$f : Q \longrightarrow C \quad \text{est donc une } \underline{\text{bijection}}$$

$$r \longmapsto M$$

c) Remarque 2 :

$$\text{Si } \hat{r} = \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})}$$

alors $\text{Cos } \hat{r} = x \quad \text{et} \quad \text{Sin } \hat{r} = y$

5-2 Surjection de \mathbb{R} vers \mathcal{A}

5-2-1 Axiomes de définition

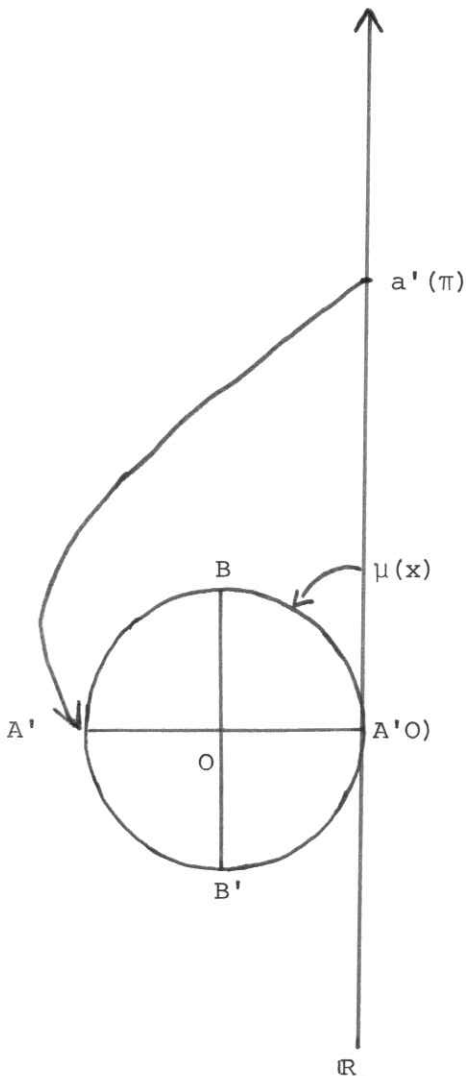
Axiome 1 : Il existe une application θ de \mathbb{R} vers \mathcal{A} telle que :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad \theta(x+x') = \theta(x) + \theta(x')$$

Axiome 2 : Il existe un réel positif, noté π , tel que $\theta(\pi) = \hat{p}$ (angle plat).

La restriction de θ à $] -\pi, +\pi[$ est une bijection de $] -\pi, \pi[$ sur \mathcal{A} .

5-2-2 Interprétation intuitive



On peut "assimiler" θ à l'enroulement d'un fil autour d'un cylindre

$$x \longmapsto \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} = \hat{r} = \theta(x)$$

$$\pi \longmapsto \widehat{(\vec{OA}, \vec{OA}')} = \hat{p} = \theta(\pi)$$

5-2-3 Conséquences

Les propriétés de θ (additivité (axiome 1)) et de π nous conduisent aux résultats suivants :

$$\theta(0) = \hat{0} \quad (\forall x) (x \in \mathbb{R}) \quad \theta(-x) = -\theta(x)$$

$$(x \in \mathbb{R}) (k \in \mathbb{Z}) \quad (\forall x) (\forall k) \quad \theta(kx) = k\theta(x)$$

$$\theta(2\pi) = \hat{0}$$

$$(x \in \mathbb{R}) (k \in \mathbb{Z}) \quad (\forall x) (\forall k) \quad \theta(x + 2k\pi) = \theta(x)$$

<p>Si $x - x' = k(2\pi)$ alors $\theta(x) = \theta(x')$</p> <p> $\left\{ \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{R} \\ x' \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ </p>

5-2 Groupe additif $(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}, +)$

a) La relation binaire définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$x \sim x' \iff (\exists k) (k \in \mathbb{Z}) \quad x - x' = k(2\pi)$$

est une relation d'équivalence

b) L'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation est noté $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ et on l'appelle ensemble des réels modulo 2π .

c) Remarque

Toute classe d'équivalence a un représentant et un seul dans $]-\pi, +\pi]$. On pourra donc identifier un élément \dot{x} de $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ à son représentant, noté x , dans $]-\pi, \pi]$.

d) On munit $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ de la loi de composition interne notée $+$ et définie par :

$$\dot{x} \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}, \dot{y} \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}, (\forall \dot{x}) (\forall \dot{y}) \quad \dot{x} + \dot{y} = \widehat{x+y}$$

$(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}, +)$ a une structure de groupe commutatif

5-4 Mesure d'un angle

a) Nous connaissons les bijections suivantes :

$$f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow]-\pi, +\pi] \text{ d'après la remarque 5-3 c}$$

$$\dot{x} \longmapsto x$$

et $\theta/I :]-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathcal{A}$

$$x \longmapsto \hat{r}$$

Nous en déduisons que $\theta \circ f$ est une bijection de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ vers \mathcal{A}

b) De plus $\theta \circ f$ "transporte" la loi d'addition de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans \mathcal{A} et par conséquent pour (\dot{x}, \dot{y}) quelconque de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$\theta \circ f(\dot{x} + \dot{y}) = \theta \circ f(\dot{x}) + \theta \circ f(\dot{y})$$

Ce qui nous conduit au théorème suivant :

$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathcal{A}, +)$ sont des groupes isomorphes.

c) Mesure d'un angle :

L'élément unique de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ associé à un angle \hat{r} est appelé mesure de cet angle.

d) Remarques

- La mesure d'un angle \hat{r} est donc un "réel modulo 2π "
- Tout représentant de la mesure de \hat{r} est appelé détermination de \hat{r} et le représentant appartenant à $]-\pi, +\pi]$ est appelé détermination principale.

Exemples : $\text{mes } \hat{\pi} = \dot{\pi} = \{x / x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{mes } \hat{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right) = \{x / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

- Par abus de langage on confond souvent détermination et mesure d'un angle.

e) Unité d'angles

On appelle radian l'angle $\theta(1)$ image du réel 1 par θ .

f) Autres systèmes d'unités

L'existence de θ étant admise on peut définir de \mathbb{R} vers \mathcal{A} d'autres applications possédant des propriétés analogues à celles de θ soit par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & \alpha(x) = \theta(\lambda x) \quad \text{où } \lambda \text{ est un } \underline{\text{réel fixé}} \end{array}$$

Pour chaque valeur de λ on définit ainsi un nouveau système de mesure.

Par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\lambda = \frac{\pi}{180}} & \alpha_{180} = \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{A} \\ & x & \longmapsto \theta\left(\frac{\pi}{180} x\right) \end{array}$$

l'unité d'angle est alors le degré soit l'angle $\alpha_{180}(1)$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\lambda = \frac{\pi}{200}} & \alpha_{200} = \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{A} \\ & x & \longmapsto \theta\left(\frac{\pi}{200} x\right) \end{array}$$

l'unité d'angle est alors le grade , soit l'angle $\alpha_{200}(1)$

Remarque

$$p = \theta(\pi) = \alpha_{180}(180) = \alpha_{200}(200)$$

L'angle plat \hat{p} a donc pour détermination principale :

π (en radians)

180 (en degrés)

200 (en grades)

6 - TRIGONOMETRIE

La surjection θ étant définie de \mathbb{R} vers \mathcal{A} nous connaissons le Sinus et le Cosinus de tout angle $\theta(x)$ où x est un réel.

6-1 Fonction sinus et fonction cosinus

On appelle fonction sinus (respectivement fonction cosinus) l'application définie de \mathbb{R} vers $[-1, +1]$ pour tout réel x par :

$$\sin x = \text{Sin } [\theta(x)]$$

(respectivement)

$$\cos x = \text{Cos } [\theta(x)]$$

6-2 Fonction tangente - fonction cotangente

La fonction tangente est définie pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) par :

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction cotangente est définie pour tout réel x différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) par :

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

3ème PARTIE :
OPTIQUE GEOMETRIQUE MATRICIELLE

Rappel des lois générales

Généralités sur les systèmes centrés

Dioptre sphérique

Dioptre plan

Miroir plan

Lentilles minces

OPTIQUE GEOMETRIQUE MATRICIELLE

1. LE BUT de cet exposé est la résolution de problèmes simples d'optique géométrique traditionnelle (niveau 1ère C ou D) pour des systèmes centrés (l'étude du prisme, par exemple, est donc exclue) en éliminant au maximum la géométrie plane traditionnelle, qui n'est plus enseignée aux élèves, et en la remplaçant par des opérations sur les matrices carrées d'ordre 2, abordées en première.

De plus, la notion de repère d'espace, presque jamais abordée dans ce domaine (elle est indispensable dans toute la physique, mais surtout en Mécanique) sera précisée.

2. RAPPEL DE LOIS GENERALES

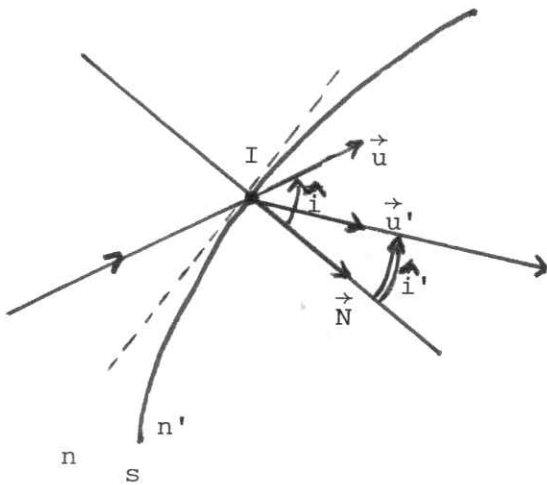
Au niveau de la 1ère, les lois générales seront admises sans démonstration (elles seront plus tard démontrées à partir du Principe de Fermat). Elles sont au nombre de quatre et s'énoncent après avoir défini l'indice absolu n d'un milieu homogène transparent (et bien sûr isotrope !) comme $n = \frac{c}{v}$ où c est la norme de la vitesse de la lumière dans le vide et v la norme de la vitesse de la lumière dans le milieu considéré:

$$n \in [1 ; 2,4] \quad n = 1 \text{ correspond au vide}$$
$$n = 2,4 \text{ au diamant}$$

n est sans dimension et sans unité.

- Loi de la propagation rectiligne de la lumière dans un seul milieu.
- Loi (et non Principe) du retour inverse de la lumière (assez mal compris des élèves).
- Je ne rappellerai que les deux dernières lois -dites de Descartes- (ou de Snell-Descartes)

2-1 LOIS DE LA REFRACTION



Deux milieux homogènes transparents, d'indices absolus n et n' , sont limités l'un par rapport à l'autre par une surface dite dioptrique s .

Un rayon incident traverse le premier milieu et frappe s en I , dit point d'incidence. Soit \vec{u} le vecteur unitaire directeur du rayon et dont le sens est

celui de propagation de la lumière. Soit la droite orthogonale en I à s , \vec{N} le vecteur unitaire directeur de celle-ci, orienté du premier vers le second milieu. \vec{N} est dit vecteur unitaire orthogonal ou "normal"

L'ensemble (I, \vec{u}, \vec{N}) définit un plan affine, appelé plan d'incidence. La figure est faite dans ce plan, par anticipation de la 1ère partie de la loi.

L'angle orienté dans le sens trigonométrique $\hat{i} = \widehat{(\vec{N}, \vec{u})}$ dont la mesure, lorsqu'il est exprimé en radians, est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, est appelé "angle d'incidence"

Soit \vec{u}' , le vecteur unitaire du rayon réfracté, orienté aussi dans le sens de propagation de la lumière.

L'angle orienté $\hat{i}' = \widehat{(\vec{N}, \vec{u}')}$ avec $i' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ (rad) est l'angle de réfraction.

LOI

- * Première partie : le rayon réfracté appartient au plan d'incidence (d'où figure plane) ou $(I, \vec{u}') \subset (I, \vec{u}, \vec{N})$
- * Deuxième partie : $n \sin i = n' \sin i'$

Conclusion : i' n'est pas lié linéairement à i .

Cas particulier : Loi de Képler

Si $|i|$ est faible devant $\frac{\pi}{2}$ rad (et non : si i est faible, comme on lit souvent) alors :

$$\sin i \approx i \quad (\text{en réalité, une meilleure approximation est donnée par :})$$
$$\sin i \approx i - \frac{i^3}{6} = i \left(1 - \frac{i^2}{6}\right)$$

D'autre part : n et n' sont deux réels, supérieurs à 1, n'exédant pas 2,4. Il en résulte que $\frac{n}{n'}$ est au plus égal à 2,4 et :

$$|i| \text{ faible devant } \frac{\pi}{2} \iff |\sin i| \text{ faible devant } 1$$

$$|\sin i| \text{ faible devant } 1 \iff |\sin i'| \text{ faible devant } 1$$

$$|\sin i'| \text{ faible devant } 1 \iff |i'| \text{ faible devant } \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$\sin i' \approx i'$$

D'où la loi de Képler : $n i \approx n' i'$ alors que, dans les formules approchées précédentes, i et i' devaient être exprimés en rad, dans cette loi, l'unité d'angle est quelconque.

Cette formule est acceptable, avec une précision qui, en physique, est au moins égale à 1 %, si :

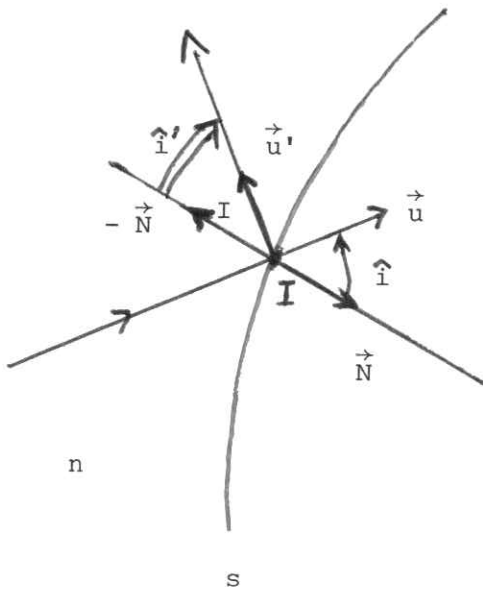
$$\left| \frac{i - \sin i}{i} \right| \leq \frac{1}{100} \quad \text{En prenant : } \sin i \approx i \left(1 - \frac{i^2}{6}\right)$$

$$\text{alors } \frac{i^2}{6} \leq \frac{1}{100} \quad \text{et } |i|_{\text{rad}} \leq \sqrt{\frac{6}{100}} \quad \text{soit } |i|_{\text{deg}} = \sqrt{\frac{6}{100}} \times \frac{180}{\pi} = 14^\circ$$

L'intérêt de la loi de Képler -par rapport à la deuxième partie, de la loi de Descartes- bien qu'elle ne soit pas rigoureuse, est que i' est lié à i par une relation linéaire.

2-2 LOI DE LA REFLEXION

Dans le cas précédent, en plus du rayon réfracté, il existe un rayon réfléchi dans le premier milieu. Ce rayon existe toujours tandis que le rayon réfracté disparaît si le deuxième milieu devient opaque. Donc, la nature du 2ème milieu n'influe pas sur la réflexion. s constitue une surface réfléchissante ou catoptrique.



Les définitions relatives au rayon incident sont inchangées par rapport au 2-1. Par contre, le rayon réfléchi correspondant à de la lumière se propageant du 2ème milieu vers le premier, le vecteur unitaire orthogonal qui lui est relatif est $-\vec{N}$ et l'angle de réflexion :

$$\hat{i}' = \widehat{(-\vec{N}, \vec{u}')} , \text{ avec } i' \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \text{ (rad)}$$

LOI

- * Première partie : analogue à la première partie de la loi de la réfraction : le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.
- * Deuxième partie : $i' = -i$

Il est avantageux sur un plan mathématique (plus que physique) d'essayer de ramener les lois de la réfraction et de la réflexion à une seule loi. La première partie est la même. La deuxième est plus compliquée pour la réfraction : il faut faire en sorte que la réflexion soit un cas particulier de la réfraction. Or :

$$i' = -i \implies -\sin i' = \sin i. \text{ En multipliant par } n : -n \sin i' = n \sin i.$$

$$\text{Posons : } -n = n' \implies n' \sin i' = n \sin i$$

"Tout se passe comme si" le rayon réfléchi se propageait dans un milieu fictif, d'indice négatif $-n$.

En particulier, pour $|i| < \frac{\pi}{2}$ rad, la loi de Képler est applicable à la réflexion comme à la réfraction, et elle est évidemment vigoureuse dans le premier cas.

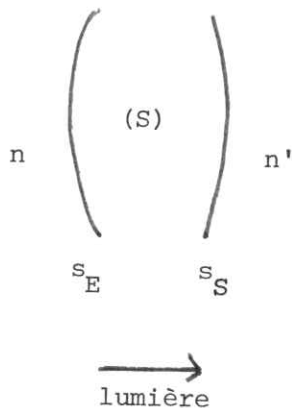
Remarque. Dans tous les cas : $i = 0 \implies i' = 0$: le rayon réfracté ou réfléchi a alors même support que le rayon incident.

3. GENERALITES SUR LES SYSTEMES CENTRES

3-1. DEFINITIONS

- Un système optique (S) est un ensemble de milieux homogènes transparents, séparés entre eux par des surfaces dioptriques que nous supposerons sans point singulier, le dernier milieu pouvant être limité par une surface catoptrique. Nous supposerons (S) unique dans l'espace.

Soit s_E et s_S les faces d'entrée et de sortie de (S), la lumière se propageant depuis s_E vers s_S . Nous supposerons que la seule surface pouvant être catoptrique est la plus à droite. Il est possible que s_E et s_S soient confondues. On ne schématisera que ces faces et on supposera (S) indéformable.

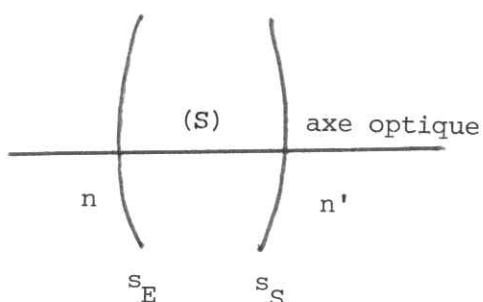


- Avant s_E se trouve un milieu homogène transparent d'indice absolu n , dit milieu d'entrée ; après s_S se trouve un milieu homogène transparent d'indice absolu n' dit milieu de sortie. Si la dernière ligne est catoptrique, le milieu qui est à droite de celle-ci est en fait quelconque et on la symbolisera par :



Les milieux d'entrée et de sortie sont alors confondus à gauche de s_E , qui est confondue avec s_S .

Cas particulier. (S) est dit système centré si, et seulement si, il possède au moins un axe de révolution, c'est-à-dire si toutes les surfaces dioptriques ou catoptriques ont en commun au moins un axe de révolution. Celui-ci est dit axe optique du système.



Par la suite, nous n'étudierons que les systèmes centrés.

Tout rayon incident, dans le milieu d'indice n , est transformé par (S) en un rayon émergent dans le milieu d'indice n' .

Si un rayon incident a pour support l'axe optique, lorsqu'il frappera chacune des surfaces s , son angle d'incidence \hat{i} sera nul puisque ces surfaces n'ont pas de point singulier : finalement, le rayon émergent correspondant aura même support, qui est l'axe optique.

Pratiquement, les diverses surfaces s composant (S) sont uniquement des portions de plans et de sphères.

Les plans sont évidemment orthogonaux à l'axe optique.

Les sphères sont centrées sur l'axe optique.

Ici aussi, il est commode de ne considérer qu'un seul cas : un plan est la limite d'une sphère lorsque le rayon R de celle-ci tend vers $+\infty$.

Nous étudierons les cas particuliers suivants :

- s_S est dioptrique et confondue avec $s_E =$ dioptrique sphérique, puis plan.
- s_S est catoptrique et confondue avec s_E : miroir sphérique (hors-programme) puis plan. Ce cas est un cas particulier du précédent, en prenant $n' = -n$.
- s_S est dioptrique et n'est plus confondue avec s_E ; le milieu entre s_E et s_S est unique : lentilles.
- plusieurs lentilles de même axe optique sont associées (pour deux, on forme un doublet, ...).

3-2 REPERES D'ESPACE

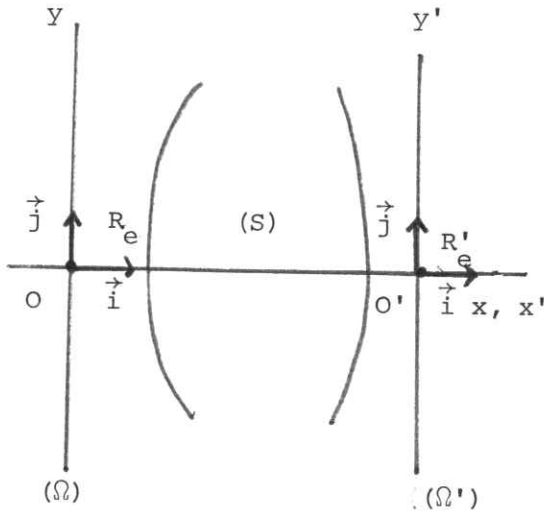
(S) étant indéformable et placé dans un espace affine euclidien de dimension 3, un repère d'espace R_e de dimension 3 peut lui être attaché (le temps n'intervenant pas en optique "statique", on n'a pas besoin de repère de temps R_t , donc de référentiel $R = \{R_e, R_t\}$

A cause de la symétrie de révolution de (S) autour de son axe optique, tous les plans contenant cet axe, dits plans de section principale sont équivalents entre eux. Si un rayon incident coupe l'axe optique, il appartient à l'un d'eux.

Le rayon émergent correspondant coupe également l'axe optique et appartient au même plan de section principale à cause de la première partie des deux lois de Descartes et parce que les "normales" aux surfaces de révolution, soit coupent l'axe (sphères) soit lui sont parallèles (plans).

Donc, à condition de ne considérer que des rayons coupant l'axe optique, le problème se ramène à un problème dans un espace de dimension 2, puis on passe à un espace de dimension 3 par rotation autour de l'axe optique.

Dans un plan de section principale, soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ la base définie comme suit :



- * \vec{i} est le vecteur unitaire directeur de l'axe optique et orienté dans le sens de propagation de la lumière incidente. \vec{i} est inchangé par la rotation précédente dans un espace de dimension 3.
- * \vec{j} est le vecteur unitaire directement orthogonal à \vec{i} ($(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$ rad). \vec{j} est changé par rotation.

R_e doit être muni d'une origine, toujours choisie sur l'axe optique, et de position

invariable par rapport à (S), qui est indéformable. A part cela, cette origine O est quelconque. D'où : $R_e = (O, B)$

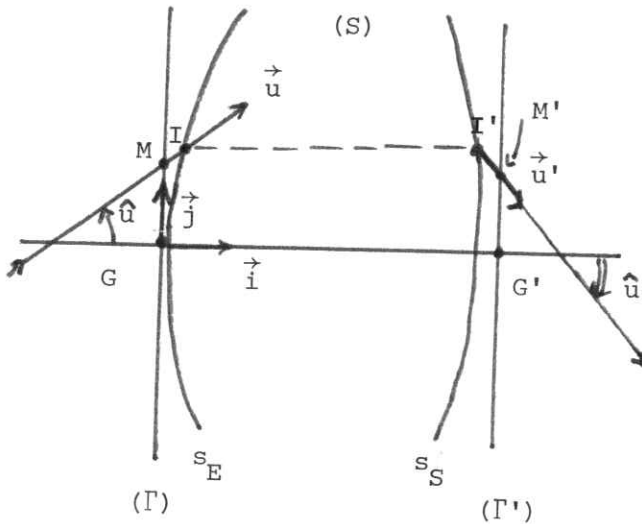
En réalité, on choisit deux repères R_e et R'_e , de même base, et ne différant que par leurs origines O et O' :

$$R_e = (O, B) \quad R'_e = (O', B)$$

R_e sera relatif aux rayons incidents, R'_e aux rayons émergents. L'ensemble (O, \vec{i}) est l'axe Ox ; (O, \vec{j}) l'axe Oy ; (O', \vec{i}) l'axe O'x' ; (O', \vec{j}) l'axe O'y' ; avec quelles que soient les origines choisies sur l'axe optique : $y' = y$

Les plans orthogonaux à l'axe optique en O et O' seront notés (Ω) et (Ω'). Ce sont des plans origine d'entrée et de sortie.

3-3 DETERMINATION DES RAYONS INCIDENTS ET EMERGENTS



Soit un rayon incident dans un plan de section principale et le rayon émergent correspondant. A l'intérieur de (S), on ne détaille pas la "marche" réelle du rayon et on note un segment en pointillé entre les points d'incidence I et d'émergence I'.

Tout rayon appartenant à un plan connu (de figure), est déterminé par deux paramètres :

* Le premier est appelé angle d'ouverture. Soit \vec{u} et \vec{u}' les vecteurs unitaires directeurs respectifs des rayons incident et émergent et orientés selon le sens de propagation de la lumière.

- l'angle d'ouverture du rayon incident est l'angle orienté :

$$\hat{u} = \widehat{(\vec{i}, \vec{u})}, \text{ avec, en radians } u \in]-\pi, \pi]$$

- l'angle d'ouverture du rayon émergent est :

$$\hat{u}' = \widehat{(\vec{i}, \vec{u}')}, \text{ avec, } u' \in]-\pi, \pi]$$

Le rapport (sans dimension) $\mathcal{G} = \frac{u'}{u}$ est un réel appelé grossissement angulaire ou rapport de convergence.

* Le second est l'ordonnée du point de concours du rayon avec un axe connu de vecteur unitaire \vec{j} . On pourrait prendre Oy pour le rayon incident, O'y' pour le rayon émergent.

Pour des raisons qui seront vues plus loin, (obtention de la relation conjugaison), on choisit les axes quelconques : Gy et G'y'. G et G' sont les points de références d'entrée et de sortie. Le plan orthogonal à l'axe optique en G noté (Gamma), s'appelle

plan de référence d'entrée. Le plan (Γ') orthogonal à l'axe en G' est le plan de référence de sortie.

Le rayon incident traverse le plan (Γ) en M . Soit $y = \overline{GM}$

Le rayon émergent traverse le plan (Γ') en M' . Soit $y' = \overline{G'M'}$

Les couples : (y, u) et (y', u') déterminent parfaitement les rayons incident et émergent.

Pour un couple d'entrée (y, u) donné, les lois de l'optique géométrique (déterminisme !) permettent de calculer le couple (y', u') . Dans le cas général, l'application qui à (y, u) associe (y', u') n'est pas simple, et, en particulier, n'est pas linéaire. Seule une approximation linéaire permettra l'emploi de matrices carrées d'ordre 2.

Remarques : y est l'ordonnée du point de concours du rayon incident avec le plan (Γ) , et non celle du point de concours de ce rayon avec le plan (Ω) .

- G n'est pas fixe par rapport à O . L'ensemble (G, B) ne constitue pas un repère d'espace.

- Le problème du changement de plans de référence de même nature est traité au 3-10, qui peut être lu dès maintenant.

3-4 STIGMATISME

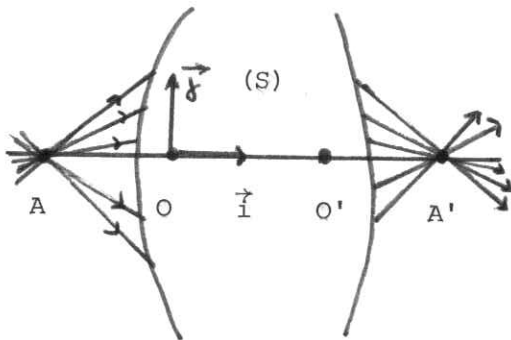
Les rayons incident et émergent coupent l'axe optique respectivement en A et A' . Considérons un faisceau de rayons incidents concourants en A ou isogènes. A est alors dit objet ponctuel ou point objet. Un point objet est dit réel s'il appartient au milieu d'entrée, virtuel dans les autres cas. Le faisceau allant de A à (S) est divergent si l'objet est réel, convergent s'il est virtuel.

Si, et seulement si, un faisceau incident isogène en A est transformé en un faisceau émergent isogène en A' , A' est l'image ponctuelle ou point-image de A .

A et A' forment alors un couple (A, A') de points conjugués et le système (S) est dit stigmatique pour ce couple.

A' est réelle si elle appartient au milieu de sortie, virtuelle dans les autres cas. Le faisceau allant de (S) à A' est convergent si A' est réelle, divergent si elle est virtuelle.

Par la suite, nous n'étudierons que des systèmes qui, sous certaines conditions, sont stigmatiques au moins approximativement pour des couples (A, A') quelconques (le stigmatisme est dit approché si au point A correspond une tâche lumineuse centrée sur A', de dimensions au plus égales à celle des "grains" constituant le récepteur optique : rétine, plaque photographique...)



Soit alors $x = \overline{OA}$ l'abscisse de A relativement à R_e $x' = \overline{O'A'}$ l'abscisse de A' relativement à R'_e .

A cause de l'unicité (ou déterminisme) des lois physiques, pour tout x donné correspond un seul x', s'il existe (stigmatisme). Donc :

(A et A' sont réels tous deux. sur cette figure)

$x' = f(x)$ pour (S) donné, ce qu'on écrit plutôt sous la forme implicite : $f(x, x') = 0$ (une loi telle que $-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$ est exprimée sous forme implicite).

Cette relation est dite relation de conjugaison.

3-5 FOYERS

- Supposons que $-x$ devienne infiniment grand (A s'éloigne à gauche sur l'axe). Si, et seulement si, x' ne devient pas infiniment grand, (x' reste fini), alors

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

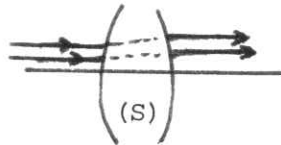
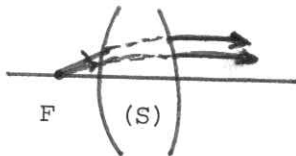
... ..
... ..

le point limite de A' est dit foyer image et noté F' .

- Supposons que, lorsque x' devient infiniment grand, x reste fini. Alors, le point limite de A est dit foyer objet et noté F .

On démontre que : ou un système possède deux foyers, et il est dit focal ou n'en possède aucun et il est dit afocal (alors $|x|$ et $|x'|$ deviennent simultanément infiniment grands).

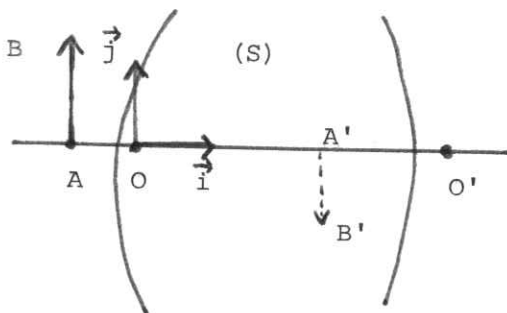
En effet, supposons que (S) possède seulement un foyer-objet F . Tout faisceau incident issu de F est transformé en un faisceau cylindrique de génératrices parallèles à l'axe optique. Si (S) n'a pas de foyer-image F' , un faisceau cylindrique incident de génératrices parallèles à l'axe est transformé en un faisceau cylindrique de génératrices parallèles à l'axe. Ceci est contradictoire avec l'existence de F , car seul un faisceau issu de F permet d'obtenir un tel faisceau émergent.



3-6 APLANÉTISME

Tout plan orthogonal à l'axe optique est dit plan de front.

Supposons le système stigmatique, au moins approximativement, par le couple (A, A') . Considérons, à l'intersection d'un plan de section principale et du plan de front passant par A , divers points-objets, évidemment alignés, dont l'ensemble constitue un objet rectiligne $[AB]$



$[AB]$ réelle, $[A'B']$ virtuelle et renversée par rapport à $[AB] \Rightarrow \gamma < 0$

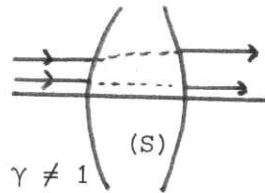
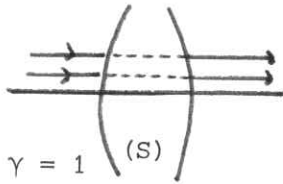
Si tout point appartenant à $[AB]$ a une image conjuguée et si celle-ci se situe à l'intersection du plan de section principale contenant $[AB]$ et du plan de front passant par A' ,

$C = \frac{n'}{f'}$ appelée convergence du système (on montrera qu'elle est égale aussi à $-\frac{n}{f}$).

- Soit (H, H') n'existe pas, soit une infinité de couples répond à la question: $\gamma = 1$. Nous allons démontrer qu'alors le système est afocal, ce qui revient à :

$$\left[|f| \text{ et } |f'| \text{ infiniment grands} \right] \Leftrightarrow C = 0$$

En effet, tout faisceau cylindrique incident est transformé en faisceau cylindrique émergent. Si le premier a ses génératrices parallèles à l'axe optique, il en est de même pour le second. Donc, $\gamma = \text{constante}$. D'où les deux possibilités :



3-8 CHOIX DES ORIGINES

Si un système est focal, on peut choisir deux double-origines.

- Soit aux points-principaux : $H = O, H' = O'$. On notera alors : $\overline{HA} = p, \overline{H'A'} = p'$; les formules obtenues sont dites de Descartes.

- Soit aux foyers : $F = O, F' = O'$. On notera alors : $\overline{FA} = \sigma, \overline{F'A'} = \sigma'$; les formules obtenues sont dites de Newton. Bien moins utilisées que celles de Descartes, nous ne les étudierons pas.

Si un système est afocal et s'il possède une infinité de couples (H, H') , il est commode de privilégier l'un d'eux et de choisir, par exemple H à l'intersection de s_E avec l'axe optique. On obtient alors des formules du type Descartes.

3-9 MATRICE DE TRANSFERT

Nous montrerons que, sous certaines conditions, dites de Gauss, les systèmes centrés

approximativement stigmatiques et aplanétiques, et que l'application qui, à (y, u) fait correspondre (y', u') est approximativement linéaire. On pourra donc écrire :

$$\begin{pmatrix} y' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$$

La matrice carrée d'ordre 2 : $(T) = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ est dite matrice de transfert (T) ,

(ou de transformation) du système (S) avec plans origines (Ω) et (Ω') et plans de référence (Γ) et (Γ') car une partie des termes qui la composent dépend de O et O' , de G et G' .

En pratique, on se fixe les origines O et O' une fois pour toutes ; par contre, on fait varier les positions de G et G' relativement à O et O' .

Donc, (T) dépend à priori seulement des plans de référence.

Les quatre termes : T_1, T_2, T_3, T_4 n'ont évidemment pas les mêmes dimensions, puisque y a les dimensions d'une longueur, tandis que u , mesure d'un angle, est sans dimension.

Etudions le sens physique de chacun des termes de la matrice (T)

. Si, et seulement si, G et G' sont conjugués, ce que nous noterons :

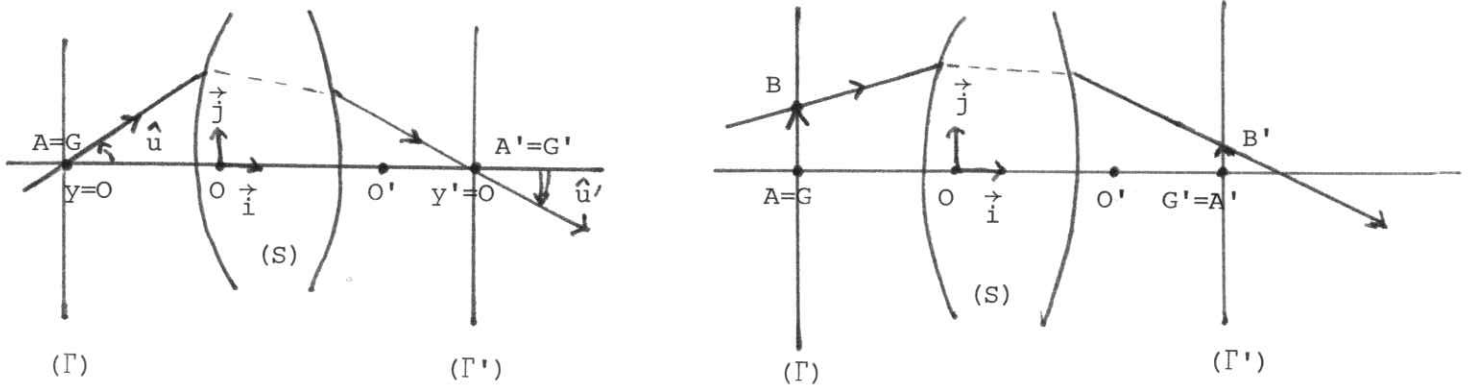
$$G = A \quad G' = A' \quad \overline{OG} = \overline{OA} = x, \quad \overline{O'G'} = \overline{O'A'} = x'$$

$$\forall u : y = 0 \text{ et } y' = 0 \quad \text{Or : } y' = T_1 y + T_2 u$$

$$\forall u : T_2 u = 0 \iff \boxed{T_2 = 0} \quad \text{Or, } T_2 \text{ est une relation entre } x \text{ et } x' :$$

$T_2 = f(x, x') = 0$ donne la relation de conjugaison.

Donc, le seul fait que y' soit fonction linéaire de (y, u) entraîne que le système est stigmatique pour un couple (A, A') quelconque.



Toujours dans le cas où $G = A$ et $G' = A'$, supposons le système aplanétique. Les abscisses de B et de B' , égales respectivement à celles de A et A' , obéissent à la relation de conjugaison. Donc, pour le couple (B, B') , $T_2 = 0$.

$$\text{Or : } y' = T_1 y \quad y = \overline{AB} \quad y' = \overline{A'B'}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma \quad \text{Donc, dans ce cas : } \boxed{T_1 = \gamma}$$

Revenons au couple (A, A') . Pour lui :

$$u' = T_3 y + T_4 u$$

$$\text{Or, } y = 0 \Rightarrow u' = T_4 u \quad \frac{u'}{u} = T_4 \quad \text{Or : } \frac{u'}{u} = \mathcal{G}$$

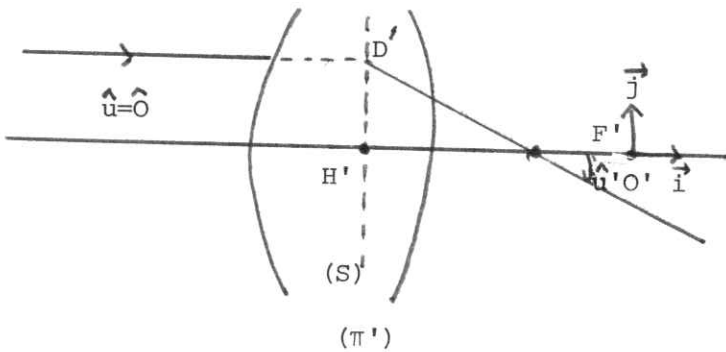
$$\text{Donc, dans ce cas : } \boxed{T_4 = \mathcal{G}}$$

En résumé : si, et seulement si, deux points sont conjugués:

$$T_1 = \gamma \quad T_2 = 0 \quad T_4 = \mathcal{G}$$

. Supposons maintenant G et G' quelconques. Deux cas sont possibles :

- Soit le système est focal. Il possède alors, entre autres, un point principal image H' , un plan principal image (π') et un foyer image F' .



(ici, H' et (π') sont virtuels,
 F' est réel).

Tout rayon incident parallèle à l'axe optique émerge en passant par le foyer image F' . Par définition des plans principaux (points conjugués de grandissement $\gamma = 1$) les rayons incident et émergent (ou leurs prolongements) concourent en un point D' appartenant à (π') .

Quel que soit (Γ) , y est constant.

$$\text{tg } u' = - \frac{\overline{H'D'}}{\overline{H'F'}} \quad \text{Si } |u'| < \frac{\pi}{2} \text{ rad: } \text{tg } u' \approx u'$$

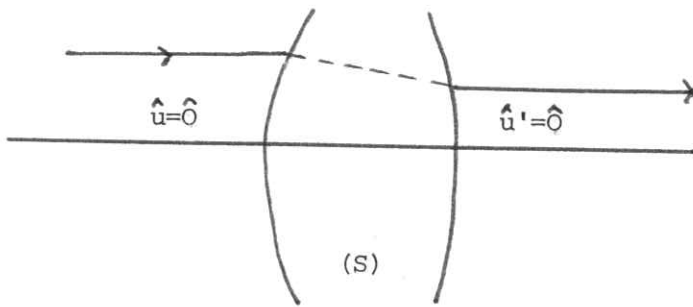
$$\overline{H'D'} = y \quad \overline{H'F'} = f'$$

$$u' = - \frac{y}{f'}, \quad \text{Or } u = 0 \quad \text{et } u' = T_3 y + T_4 u \quad u' = T_3 y$$

$$T_3 = - \frac{1}{f'}$$

Ceci étant vrai quels que soient G et G' , le terme T_3 est invariant. Il doit, en particulier, se conserver lorsqu'on multiplie la matrice de transfert par une ou plusieurs matrices d'espace.

- Soit le système est afocal. Alors $u = 0 \iff u' = 0$ quels que



Or : $u' = T_3 y + T_4 u \Rightarrow u' = T_3 y = 0$

Ceci doit être vrai quel que soit

y .

Donc $T_3 = 0$ (invariant ici aussi)

Remarque : Un système afocal est la limite d'un système focal lorsque $|f'| \rightarrow +\infty$
 $(\lim_{+\infty} T_3 = 0)$

L'intérêt physique de ce calcul matriciel est (contrairement à ce qui est souvent dit) que les quatre termes de la matrice (T) ont tous un sens physique, et sont tous différents.

Remarque d'ordre pédagogique

Nous avons énoncé, et démontré en partie, des propriétés très générales relatives aux systèmes les plus généraux rencontrés en Optique élémentaire : les systèmes centrés. Cette présentation peut paraître trop générale et trop abstraite pour des élèves de 1ère. Elle conduit ensuite à l'étude de systèmes particuliers simples : dioptries, miroirs...

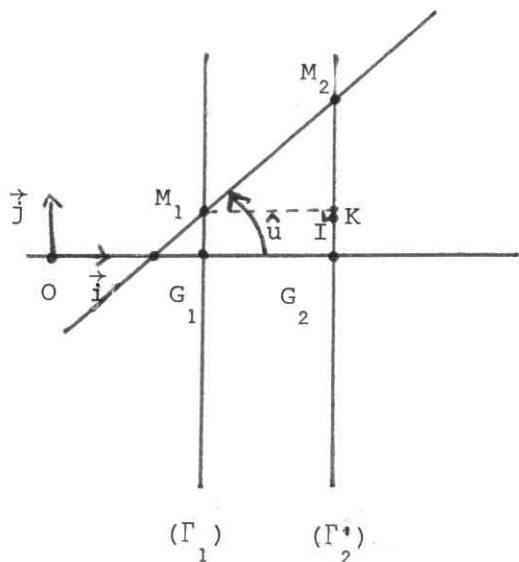
On peut adopter la présentation inverse : démontrer d'abord les propriétés des systèmes les plus simples puis généraliser les résultats obtenus aux systèmes centrés. Au niveau de la 1ère, cette deuxième présentation est sans doute plus pédagogique.

3-10 MATRICE D'ESPACE

Une matrice d'espace (E) (mot mal choisi : il s'agit plutôt d'une matrice de passage) permet de passer d'un plan de référence de nature donnée, par exemple (Γ_1) d'entrée, à un autre plan d'entrée (Γ_2) .

Remarquons donc que les plans origines sont fixes, les plans de référence "mobiles"

(c'est-à-dire mobiles par rapport aux plans origines).



(Γ_1) et (Γ_2) coupent l'axe optique en G_1 et G_2 . Un rayon incident couple ces plans en M_1 et M_2 , avec :

$$y_1 = \overline{G_1 M_1} \quad y_2 = \overline{G_2 M_2}$$

$$V(\Gamma) : u_1 = u_2 = u$$

Soit K le projecté orthogonal

de M_1 sur (Γ_2)

$$\overline{G_2 M_2} = \overline{G_2 K} + \overline{K M_2} \quad (\text{Chasles})$$

$$\overline{G_1 M_1} = \overline{G_1 K} \quad \overline{K M_2} = \overline{G_1 G_2} \operatorname{tg} u$$

Si $|u| \ll \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \operatorname{tg} u \approx u$ le rayon dit paraaxial. D'où : $y_2 \approx y_1 + \overline{G_1 G_2} u$

(relation encore plus approchée que pour le sinus, car $\operatorname{tg} u = u + \frac{u^3}{3}$ en prenant deux termes au lieu de $u - \frac{u^3}{6}$ pour $\sin u$).

$$\text{D'où} \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{G_1 G_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

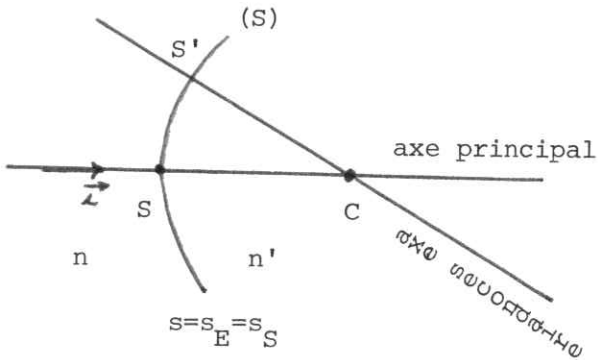
$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{G_1 G_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On démontrerait de même que la matrice d'espace permettant de passer du plan de sortie (Γ'_1) au plan de sortie (Γ'_2) , plans coupant l'axe optique respectivement aux points G'_1 et G'_2 est :

$$(E') = \begin{pmatrix} 1 & \overline{G'_1 G'_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 DIOPTRE SPHERIQUE

4-1 DEFINITION



Un dioptre sphérique est la surface dioptrique s , sphérique, de séparation de deux milieux homogènes transparents, d'indices absolus n et n' . Soit R le rayon de la sphère. On supposera évidemment : $n' \neq n$.

Si C est le centre de la sphère, toute droite passant par C , c'est-à-dire ayant pour support un rayon de la sphère, est axe de révolution du dioptre, donc est axe optique : un dioptre sphérique est un système centré possédant une infinité d'axes optiques concourants en C .

En pratique, s n'est pas une sphère entière, mais une calotte sphérique dont la base est un cercle.

On réserve alors le nom d'axe principal à l'axe optique axe de révolution de la calotte, et d'axe secondaire à toute autre droite passant par C .

Le point S de rencontre de l'axe principal avec s est le sommet principal ; le point S' de rencontre d'un axe secondaire avec s est un sommet secondaire.

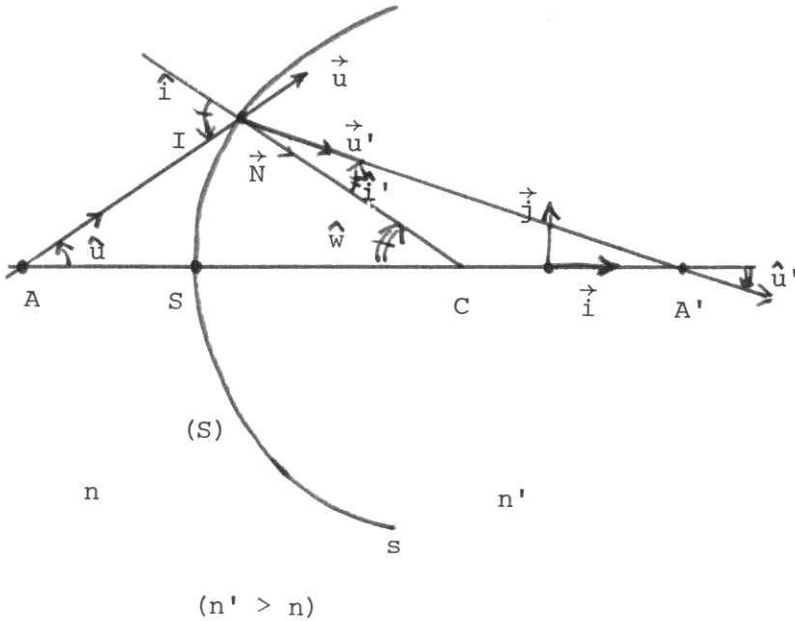
s_E et s_S sont confondues avec s et avec (S) .

Il est commode de mesurer algébriquement R , en posant :

$$R = \overline{SC} \quad (\text{figure : } R > 0) \quad (\text{avec } \vec{i})$$

4-2 ETUDE DANS DES CONDITIONS QUELCONQUES

Ce sous-paragraphe peut être directement supprimé pour une étude directement matricielle.



Soit A un point-objet sur l'axe principal et un rayon incident passant par A et frappant au point d' incidence I. Son angle d'ouverture \hat{u} est quelconque.

\vec{N} en I est directeur du rayon de la sphère, CI, et dirigé de I vers C.

L'angle d'incidence est \hat{i} , l'angle de réfraction \hat{i}' (si

$$n' > n \Leftrightarrow |\sin i'| < |\sin i| \quad \text{et} \quad |i'| < |i| \quad \text{dans l'intervalle : } \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right).$$

Le rayon émergent ou réfracté coupe l'axe principal en A'. A' est l'image de A si, et seulement si :

$\overline{CA} = \text{constante}, \quad \forall \hat{u} \Leftrightarrow \overline{CA'} = \text{constante}$ (provisoirement : double-origine confondue en C). La première partie de la loi de Descartes relative à la réfraction montre que le rayon émergent appartient au même plan de section principale (également plan d'incidence) que le rayon incident.

La deuxième partie permet d'écrire : $n \sin i = n' \sin i'$

Posons : $\hat{w} = \widehat{(\vec{CS}, \vec{CI})}$ angle orienté avec $w \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (on se limite à une demi-sphère au maximum).

Dans le triangle CAI : $\hat{i} = \hat{u} - \hat{w}$ (figure : i et $u > 0$, $w < 0$)

$$\text{et} \quad \frac{\sin i}{-\overline{CA}} = \frac{\sin u}{R}$$

Dans le triangle CA'I : $\hat{i}' = \hat{u}' - \hat{w}$ (figure : $i' > 0$, w et $u' < 0$)

$$\text{et } \frac{\sin i'}{\overline{CA'}} = - \frac{\sin u'}{R}$$

$$\text{D'où : } \overline{CA'} = \overline{CA} \cdot \frac{\sin i'}{\sin i} \cdot \frac{\sin u}{\sin u'} = \overline{CA} \cdot \frac{n}{n'} \cdot \frac{\sin(i+w)}{\sin(i'+w)}$$

Pour \overline{CA} donné, $\overline{CA'}$ serait constant $\forall \hat{i}$ (et \hat{i}' , et \hat{w}) si :

$$\frac{\sin(i+w)}{\sin(i'+w)} = \text{constante. Or } \frac{\sin i}{\sin i'} = \text{constante} = \frac{n'}{n}$$

$$\hat{w} \neq \hat{0} \quad \forall \hat{w} \quad \frac{\sin(i+w)}{\sin(i'+w)} \neq \text{constante}$$

Donc, pour \hat{u} quelconque, le dioptré sphérique n'est pas stigmatique.

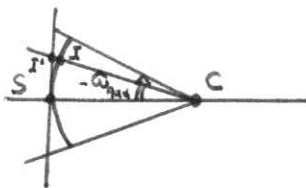
4-3 CONDITIONS DE GAUSS

- Supposons : $|u| \ll \frac{\pi}{2}$ rad et le rayon de base $r = |R| \sin w_{\text{Maximal}}$ de la calotte $\ll |R|$ ou $\sin w_{\text{Max}} \ll 1$ ou $w_{\text{Max}} \ll \frac{\pi}{2}$ rad

- Cette première condition permettra d'effectuer les approximations, u étant exprimé en rad.

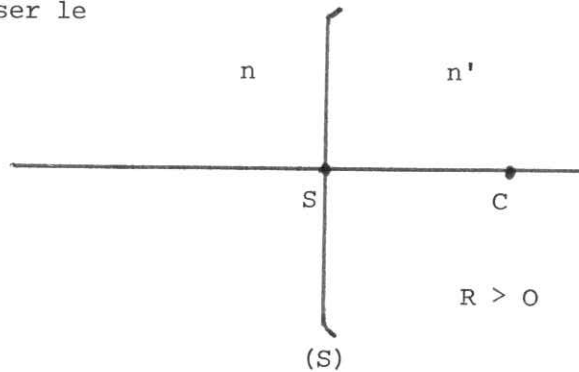
$$\sin u \approx \text{tg } u \approx u$$

- La deuxième condition permet de confondre approximativement la calotte sphérique s avec une portion de son plan tangent en S , plus précisément avec la partie de ce plan qui est "vue" de C sous le même angle (solide).



Cette approximation permet de confondre les coordonnées de I avec celle de I', relativement à R_e , mais il ne faut évidemment pas confondre en I les "normales" à s et au plan en question ! (ce qui reviendrait à "rejeter" C à l'infini).

Cela permet de schématiser le dioptre sphérique :



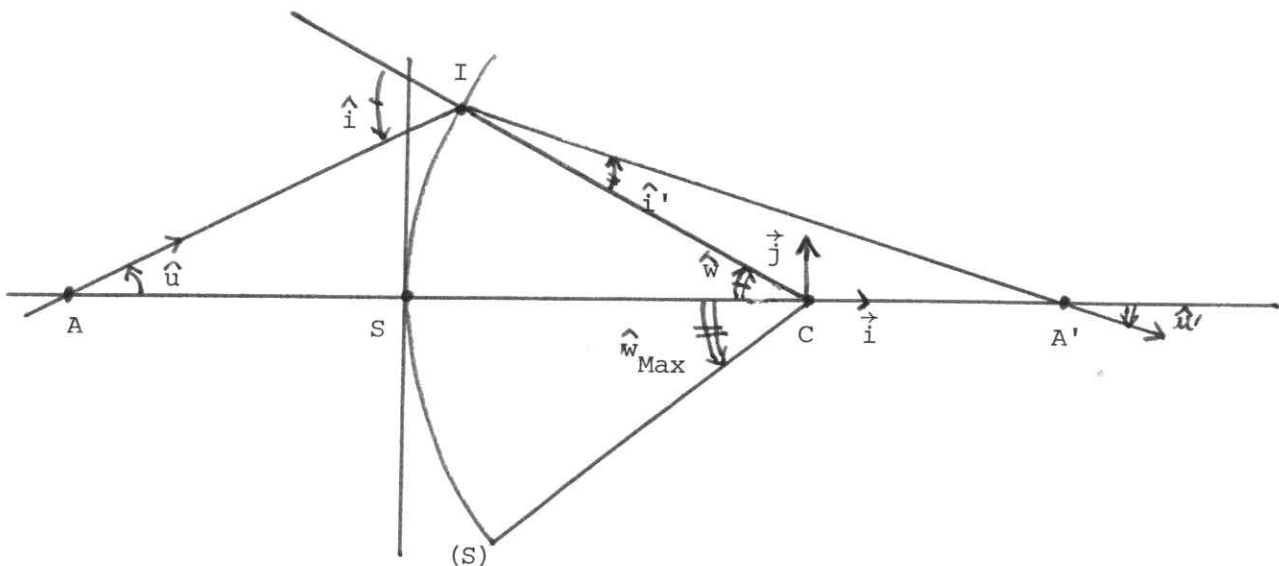
Ces deux conditions expriment les deux premières conditions de Gauss. Nous verrons qu'elles sont nécessaires et suffisantes pour le stigmatisme approché, mais seulement nécessaires pour l'aplanétisme approché. Elles expriment que tout rayon incident est "proche" de l'axe optique ou paraaxial.

Il en faut une troisième pour l'aplanétisme approché :

$|\overline{AB}| \ll |R|$ autrement dit : objet rectiligne, orthogonal à l'axe principal, de faible dimension devant le rayon du dioptre, pris en valeur absolue.

4-4 STIGMATISME APPROCHE

Ce sous-paragraphe peut aussi être éliminé pour une étude purement matricielle.



La relation $\hat{i} = \hat{u} - \hat{w}$, jointe aux deux premières conditions de Gauss :

$|u| \ll \frac{\pi}{2}$, $|w| \ll \frac{\pi}{2}$ entraîne $|i| \ll \frac{\pi}{2}$: la loi de Képler est donc applicable.

$$ni \approx n'i' \quad \text{Donc} \quad |i'| \ll \frac{\pi}{2}$$

Or $\hat{i}' = \hat{u}' - \hat{w}$ $\hat{u}' = \hat{i}' + \hat{w}$ $|u'| \ll \frac{\pi}{2}$: le rayon émergent est également paraaxial

$$\text{Or : } -\frac{\sin i}{\overline{CA}} = \frac{\sin u}{R} = \frac{\sin(i+w)}{R} \quad \text{et} \quad -\frac{\sin i'}{\overline{CA}'} = \frac{\sin u'}{R} = \frac{\sin(i'+w)}{R}$$

$\sin i \approx i$, $\sin(i+w) \approx i+w$, $\sin i' \approx i'$, $\sin(i'+w) \approx i'+w$ donc les relations

$$-\frac{i}{\overline{CA}} \approx \frac{i+w}{R} \quad , \quad -\frac{i'}{\overline{CA}'} \approx \frac{i'+w}{R} \quad \text{impliquent} \quad -\frac{w}{R} \approx i \left(\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{R} \right) \approx i' \left(\frac{1}{\overline{CA}'} + \frac{1}{R} \right)$$

En divisant membre à membre par $ni \approx n'i'$:

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{R} \right) \approx \frac{1}{n'} \left(\frac{1}{\overline{CA}'} + \frac{1}{R} \right) \quad \text{Relation indépendante de } u, \text{ et à fortiori de :}$$

i, i', u', w . Quel que soit u , \overline{CA}' est fixé si, et seulement si, \overline{CA} fixé (définition du stigmatisme approché).

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$-\frac{1}{n\overline{CA}} + \frac{1}{n'R} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \frac{1}{R} : \text{ce n'est autre que la relation de conjugaison avec}$$

double-origine confondue en C ($O = O' = C$). Elle est peu utilisée.

4-5 FOYERS

Ce sous-paragraphe peut être supprimé lors d'une étude purement matricielle.

- Foyer-image

$$\text{Si } \overline{CA} \text{ tend vers } -\infty \quad \frac{1}{\overline{CA}} \text{ tend vers } 0, \text{ et } \frac{1}{n' \overline{CA}'} \text{ tend vers } \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \frac{1}{R}$$

ou $\overline{CA'}$ tend vers $R \frac{n}{n'-n}$, grandeur finie ($n' \neq n$, et R ne tend pas vers l'infini).

Le dioptré sphérique possède donc un foyer image F' limite du point A'

$$\lim_{\overline{CA} \rightarrow \infty} \overline{CA'} = \overline{CF'} = R \frac{n}{n'-n} \quad \text{C'est donc un système focal.}$$

- Foyer-objet

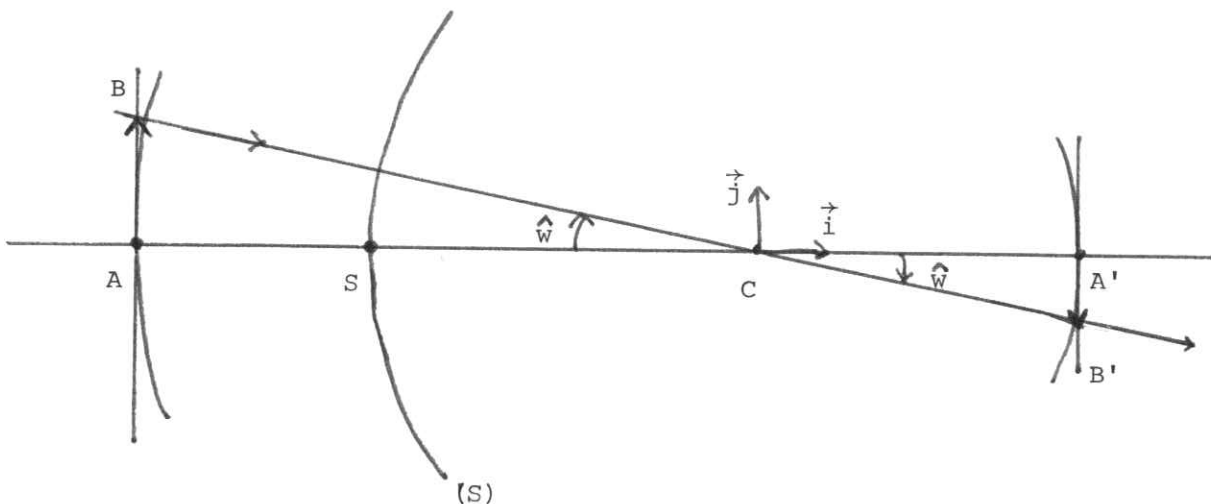
$$\overline{CA'} \text{ tend vers } +\infty \text{ lorsque : } -\frac{1}{n \overline{CA}} \text{ tend vers } \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) \frac{1}{R}$$

ou \overline{CA} tend vers $-R \frac{n'}{n-n'}$ qui est fini.

Le foyer-objet F existe (évidemment puisque F' existe) et sa position, qui est la limite de celle de A' , est donnée par : $\overline{CF} = -R \frac{n'}{n-n'}$

On aurait pu obtenir \overline{CF} à partir de $\overline{CF'}$ par application de la loi du retour inverse de la lumière en permutant les indices n et n' .

4-6 APLANETISME APPROCHE



Supposons qu'un point-objet ne déplace sur un arc de cercle de centre C , de rayon $|\overline{CA}|$. Toute droite passant par C , autre que l'axe principal, et aussi axe optique, dit axe secondaire. Le stigmatisme étant approché pour tout couple (A, A') dans les deux premières conditions de Gauss, tout point de cet arc de cercle a son image sur le rayon passant par ce point, à l'intersection avec l'arc de cercle de centre C et de rayon $|\overline{CA'}|$.

Si l'angle \hat{w} de la figure est tel que $|w| \ll \frac{\pi}{2}$, et si l'arc intercepté par \hat{w} a une mesure prise en valeur absolue, faible devant $|R|$ (3ème condition de Gauss), on peut confondre les calottes sphériques passant par A et A' avec leurs plans tangents en A et A' .

Alors l'image d'un point-objet tel que B est approximativement B' : le dioptré plan est approximativement aplanétique.

Le grandissement vaut, par définition :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad \text{Il ne doit dépendre que du couple } (A, A')$$

Or, les triangles rectangles CAB et $CA'B'$, ayant l'angle \hat{w} commun, sont homothétiques. Donc :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \quad \forall \overline{AB} : \text{ ce rapport ne dépend bien que du couple } (A, A')$$

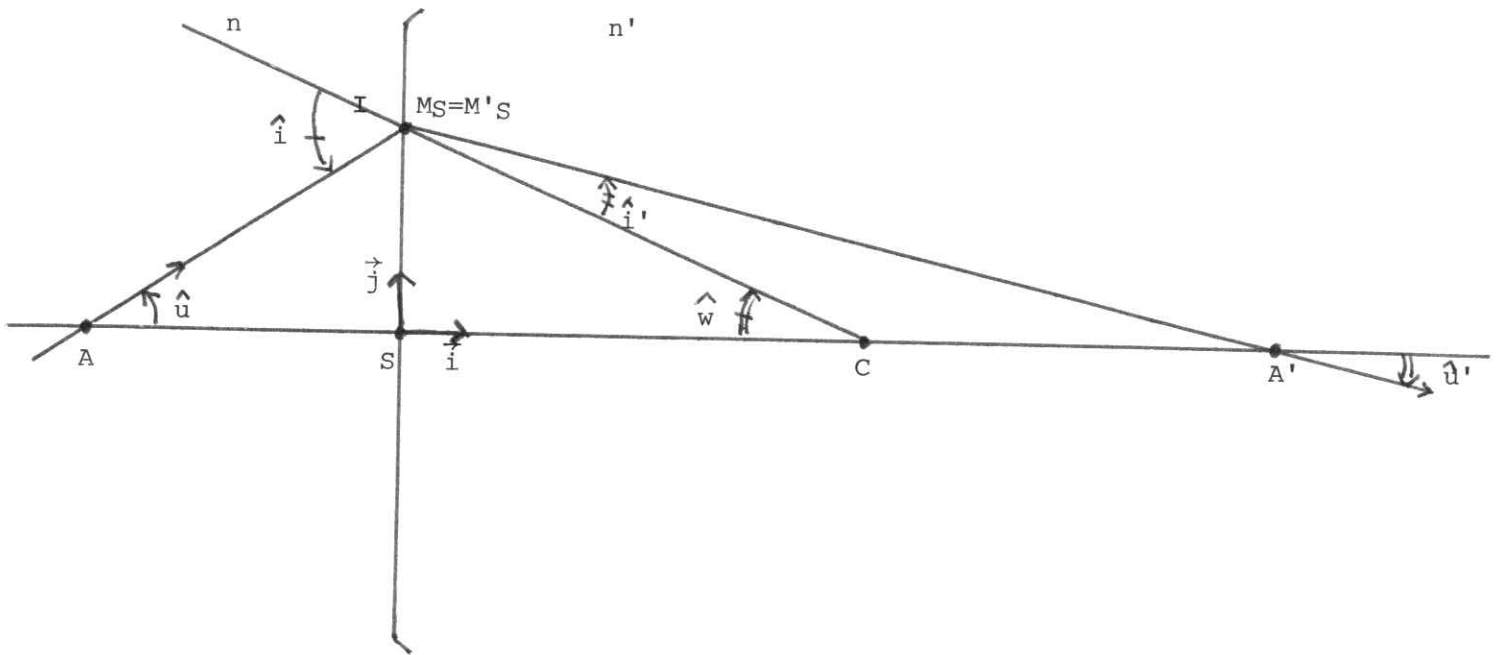
Remarque : Pour une étude purement matricielle, on peut supprimer 4-2, 4-4 et 4-5, et placer 4-6 (en supprimant l'étude du grandissement) avec 4-10.

4-7 MATRICE DE TRANSFERT (T_S) AVEC PLANS DE REFERENCE (S)

Nous avons montré, par la méthode classique, qu'un dioptré sphérique était approximativement stigmatique et aplanétique pour un couple (A, A') quelconque dans les conditions de Gauss.

On peut abandonner ici la méthode classique pour introduire à la place la méthode matricielle (qui ne peut être utilisée au départ, tout au moins pour l'aplanétisme, en 1ère).

Nous confondrons d'abord G et G' avec S, c'est-à-dire les plans de référence d'entrée (Γ) et de sortie (Γ') avec le plan (S) et allons démontrer que les paramètres (y', u') d'un rayon émergent sont liés linéairement aux paramètres (y, u) du rayon incident correspondant dans les deux premières conditions de Gauss. Nous prendrons provisoirement une double-origine confondue en S : $O = O' = S$)



Le point d'incidence est $I = M_S = M'_S$ d'ordonnée : $y_S = y'_S$

$$(S) = (\Gamma) = (\Gamma') \quad \hat{i} = \hat{u} - \hat{w} \quad \hat{i}' = \hat{u}' - \hat{w}$$

$$w \approx - \frac{y_S}{R} \quad u' = \frac{n}{n'} i - \frac{y_S}{R} = \frac{n}{n'} \left(u + \frac{y_S}{R} \right) - \frac{y_S}{R}$$

$$u' = - \frac{n'-n}{n'R} y_S + \frac{n}{n'} u$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} y'_S \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ - \frac{n'-n}{n'R} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_S \\ u \end{pmatrix}$$

$$(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n'-n}{n'R} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \quad \text{Notons que : } \det (TS) = \frac{n}{n'}$$

4-8 MATRICE DE TRANSFERT (T) AVEC PLANS DE REFERENCE QUELCONQUES

G et G' sont maintenant quelconques, de positions relativement à S définies par : \overline{SG} et \overline{SG}' .

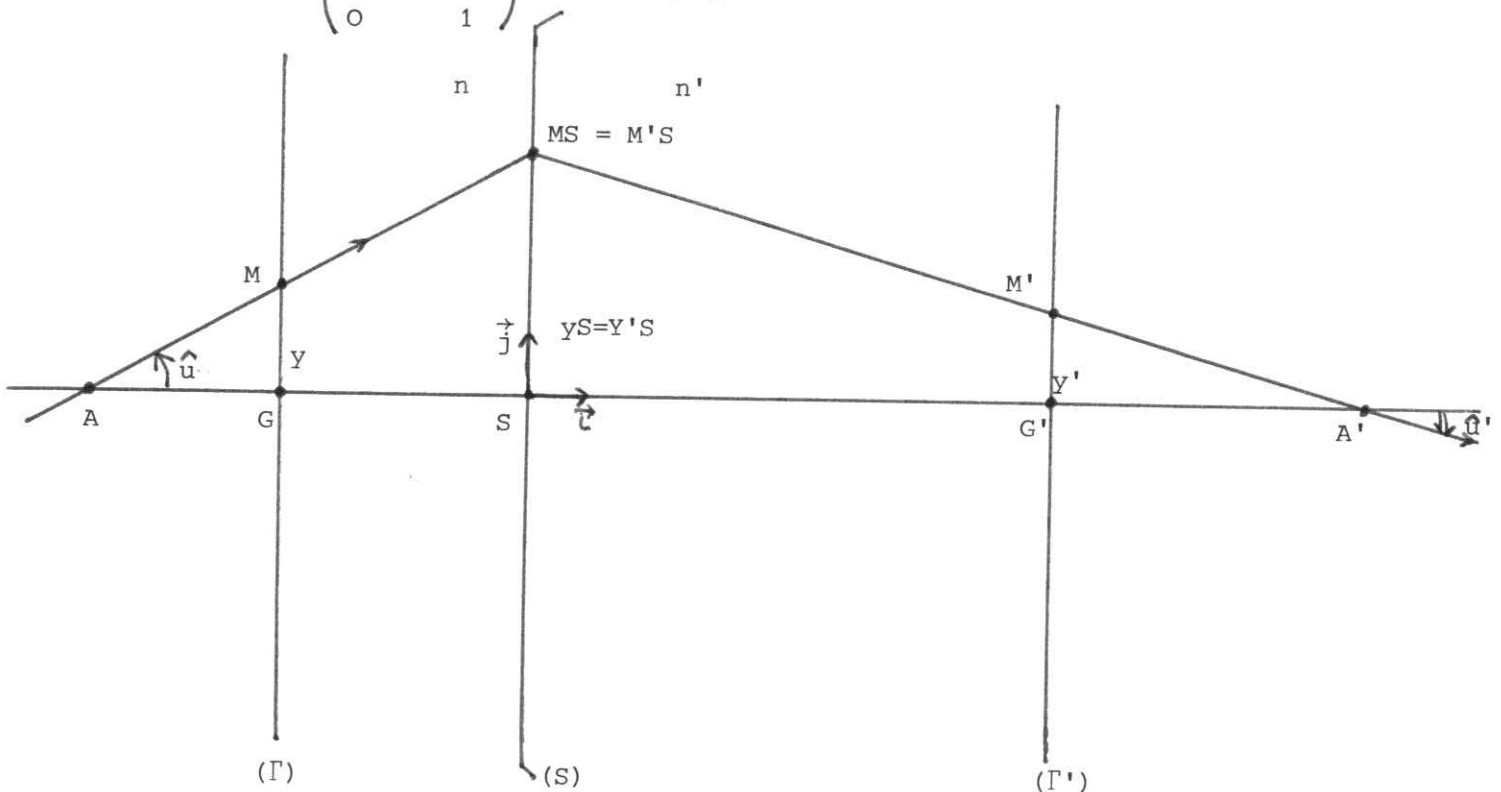
On passe de (Γ) plan d'entrée à (S) plan d'entrée par la matrice d'espace (E^{-1}) inverse de (E) ((E) permet de passer de (S) à (Γ) avec, dans la formule précédemment établie, $S = G_1, G = G_2$)

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{SG} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (E^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{SG} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec : } \det(E) = \det(E^{-1}) = 1$$

On passe de (S) plan d'entrée à (S) plan de sortie par (TS)

On passe de (S) plan de sortie à (Γ') plan de sortie par la matrice d'espace (E') (formule établie avec $S = G'_1, G' = G'_2$) :

$$(E') = \begin{pmatrix} 1 & \overline{SG}' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(E') = 1$$



Avec les plans de références (Γ) et (Γ') , la matrice de transfert est :

$$(T) = (E') \cdot (TS) \cdot (E^{-1})$$

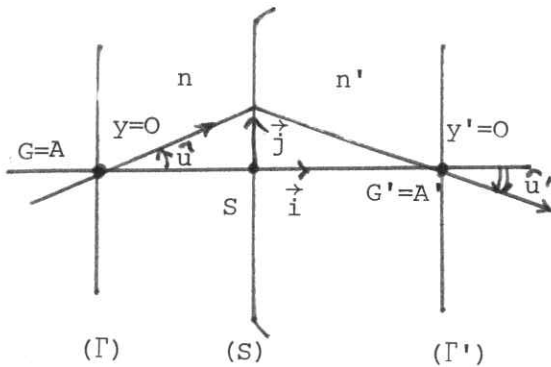
$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{SG'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n'-n}{n'R} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{SG} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n'-n}{n'} \frac{\overline{SG'}}{R} & -\overline{SG} + \frac{n'-n}{n'R} \overline{SG} \cdot \overline{SG'} + \frac{n}{n'} \overline{SG'} \\ -\frac{n'-n}{n'R} & \frac{n'-n}{n'} \frac{\overline{SG}}{R} + \frac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

Avec $\det (T) = 1 \times \frac{n}{n'} \times 1 = \frac{n}{n'}$ ($\det (T) = \det(E') \times \det(T) \times \det(E^{-1})$)

4-9 STIGMATISME APPROCHE. RELATION DE CONJUGAISON.

Dans les conditions de Gauss, l'existence de (T) ou, plus précisément de sa première ligne, constitue la preuve du stigmatisme pour un couple (A, A') quelconque.



Supposons qu'en G se trouve le point-objet A. Pour tout rayon incident passant par A, on a alors

$$y = 0$$

Le dioptre sphérique est stigmatique (au moins approximativement)

s'il existe une position de G' , notée A' , par laquelle passe le rayon émergent correspondant au rayon incident, fixe relativement à R_e quel que soit l'angle d'ouverture \hat{u} du rayon incident (dans les conditions de Gauss).

Si A' existe, $y' = 0$

Or en général, $y' = T_1 y + T_2 u$

$$\forall u : y = 0 \implies y' = 0 \quad \boxed{\text{Donc } T_2 = 0}$$

Remarque : Nous avons démontré ce résultat dans le cas général, au 3-9. Nous le redémontrons pour ceux qui préféreraient étudier le dioptre avant les systèmes centrés.

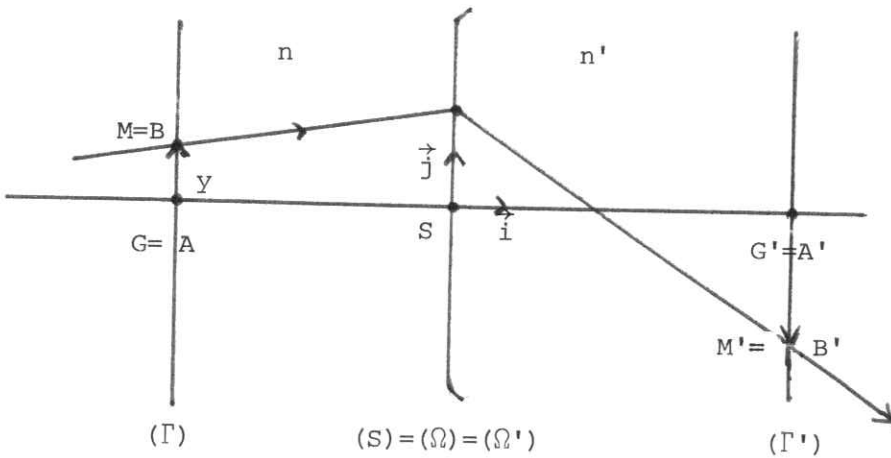
$$\text{Or } T_2 = -\overline{SA} + \frac{n'-n}{n'} \frac{\overline{SA} \cdot \overline{SA'}}{R} + \frac{n}{n'} \overline{SA'}$$

L'annulation de T_2 montre que \overline{SA} fixé entraîne $\overline{SA'}$ fixé, quel que soit \hat{u} .

Le dioptre sphérique est donc approximativement stigmatique. L'annulation de T_2 fournit une relation de conjugaison, que nous transformerons en la multipliant par

$$\frac{n'}{\overline{SA} \cdot \overline{SA'}} : -\frac{n}{\overline{SA}} + \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n'-n}{R} \quad \text{avec } O = O' = S$$

4-10 APLANÉTISME APROCHE. GRANDISSEMENT



Alors que le stigmatisme approché peut être ainsi montré par le traitement matriciel aussi bien que par le traitement classique, nous ne pourrions qu'admettre l'aplanétisme approché, qui fait appel dans le

traitement matriciel à la relation de Lagrange-Helmoltz : $nyu = n'y'u'$, dérivée de la condition générale d'Abbe : $ny \sin u = n'y' \sin u'$, et qui est hors-programme en 1ère C.

G et G' sont conjugués, et notés pour cela A et A'. Les plans de référence, également plans de front (Γ) et (Γ') sont alors conjugués.

Le dioptre sphérique étant supposé approximativement aplanétique pour tout couple (A, A'), à l'objet rectiligne [AB] contenu dans le plan (Γ) correspond l'image rectiligne [A'B'] contenue dans le plan (Γ') et dans le même plan de section principale que [AB]. M n'est donc autre que B, M' n'est autre que B', et : $\overline{AB} = \overline{GM} = y$
 $\overline{A'B'} = \overline{G'M'} = y'$

La relation de conjugaison vraie pour (A, A') l'est également pour les abscisses de (B, B').

Le grandissement est : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{y'}{y}$. Il doit être indépendant de \hat{u} , et ne doit dépendre que du couple (A, A'). Plus précisément, comme la relation de conjugaison lie les positions de A et A', γ ne doit être fonction que de l'une d'elles :

$$y' = \gamma_{(A \text{ ou } A')} y$$

Or : $y' = T_1 y + T_2 u$. Donc $T_2 = 0$ est retrouvé et $\boxed{T_1 = \gamma}$

Relation démontrée dans le cas général au 3-9.

Ici : $\gamma = 1 - \frac{n'-n}{n'} \frac{\overline{SA'}}{R}$ qui ne dépend bien que de la position de A',
 avec $O = O' = S$ relativement à R_e .

4-11 PLANS PRINCIPAUX

Les plans principaux, s'ils existent, sont tels que $\gamma = 1$.

Or : $\gamma = 1 \iff \overline{SA'} = 0$; H' = A' est en S

La relation de conjugaison : $-\frac{n}{SA} + \frac{n'}{SA'} = \frac{n'-n}{R}$

montre que : $\overline{SA} = 0 \iff \overline{SA'} = 0$ H = A est aussi en S (ce qui montre aussi la loi du retour inverse).

Donc : H, H' et S sont confondus, (π), (π') et (S) sont confondus, H et H', (π) et (π') sont uniques.

On emploiera uniquement la double-origine en $S : O = O' = S$, donc les formules de Descartes (et $(\pi) = (\pi') = (S)$).

En posant : $\overline{SA} = p$ $\overline{SA'} = p'$

Formule de conjugaison :

$$-\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = \frac{n'-n}{R}$$

Formule de grandissement : $\gamma = 1 - \frac{n'-n}{n'} \frac{p'}{R}$

4-12 FOYERS-CONVERGENCE

Foyer-image F' Si $\overline{SA} \rightarrow -\infty$ ou $p \rightarrow -\infty$, $p' \rightarrow R \frac{n'}{n'-n}$, qui est fini. La distance-focale image est :

$$f' = R \frac{n'}{n'-n}$$

Foyer-objet F Obtenu par la loi du retour inverse ou par :

$$\overline{SA'} \rightarrow +\infty \text{ ou } p' \rightarrow +\infty \quad p \rightarrow -R \frac{n}{n'-n}$$

La distance focale objet est :

$$f = R \frac{n}{n'-n}$$

- Relation entre distances focales. Convergence

$$C = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

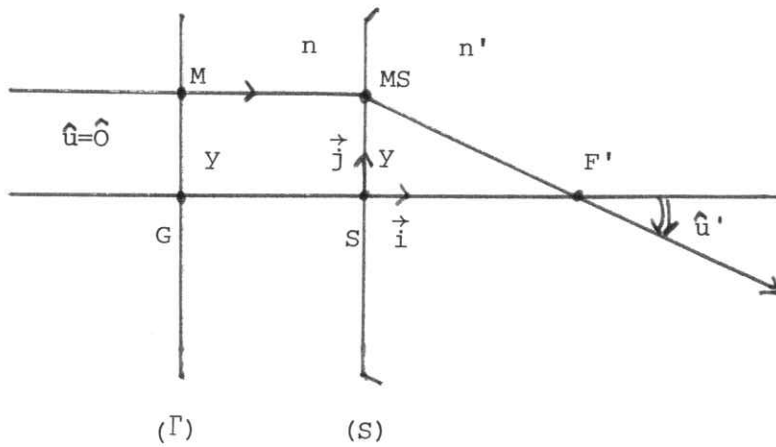
$$\left(= \frac{n'-n}{R} \right)$$

($C \neq 0$ exprime que le dioptre sphérique est focal).

Autre obtention de C :

Si $\overline{SA} \rightarrow -\infty$ ($p \rightarrow -\infty$), $u \rightarrow 0$ Or : $u' = T_3y + T_4u \Rightarrow u' = T_3y$

Tous les rayons incidents passant par A sont parallèles à l'axe principal (ils constituent un faisceau cylindrique). Le faisceau émergent converge au foyer image F' .



Quel que soit le plan d'entrée
(Γ) choisi, (même si (Γ) ne
coïncide pas avec (S)), Y
est le même pour le rayon
incident.

$$\text{Or : } \text{tgu}' = - \frac{Y}{SF'} = - \frac{Y}{f'}$$

Dans les conditions de Gauss,

$$\text{tgu}' \approx u' \quad \text{et} \quad u' \approx - \frac{Y}{f'}$$

Donc, quel que soit (Γ) :

$$T_3 = - \frac{1}{f'} = - \frac{C}{n'}$$

Le terme T_3 est le même pour toutes les matrices de transfert. On le vérifie pour

(T) et (TS) où :

$$T_3 = - \frac{n'-n}{n'} \frac{1}{R} = - \frac{C}{n'}$$

L'expression et les propriétés de T_3 ont été démontrées en général au 3-9.

Remarques importantes

Seul le terme T_3 est invariant lorsque (Γ) et (Γ') varient. T_1 , T_2 , et T_4 changent.

Or, pour (TS) :

$$(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{C}{n'} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \quad T_2 = 0 \quad \text{donc le plan (S) est conjugué de lui-même.}$$

$$\gamma = T_1 = 1 \Rightarrow (S) = (\pi) = (\pi')$$

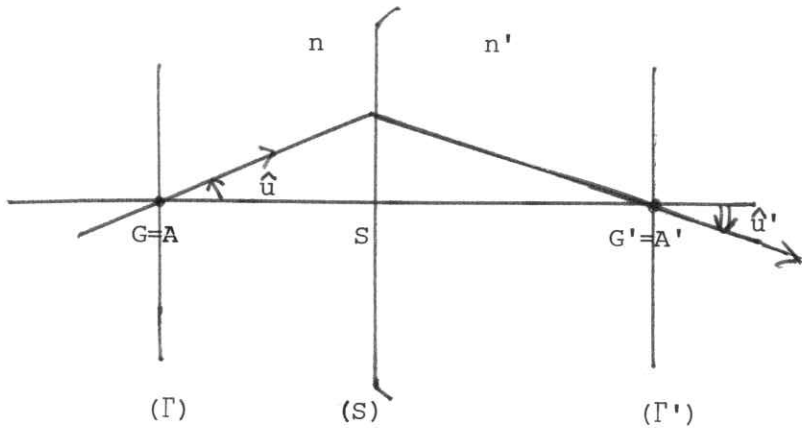
Lorsque $T_2 \neq 0$, les termes T_1 , T_2 et T_4 n'ont aucune signification physique.

f' est plus souvent utilisée que f (n et n' étant connus, il suffit de connaître soit f , soit f'). Les formules de Descartes, en introduisant f' , deviennent :

- conjugaison $\boxed{- \frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = \frac{n'}{f'}} \quad (= - \frac{n}{f})$

- grandissement $\boxed{\gamma = 1 - \frac{p'}{f'}} \quad (= \frac{n}{p} \cdot \frac{p'}{n'})$

4-13 GROSSISSEMENT ANGULAIRE



Si $G=A, G'=A'$, (A, A') étant conjugués, $y = y' = 0$ et :

$$u' = T_3 y + T_4 u = T_4 u$$

Or : $\mathcal{G} = \frac{u'}{u} =$ grossissement angulaire.

Donc, si $T_2 = 0$:

$$\boxed{\mathcal{G} = T_4}$$

Relation démontrée en général au 3-9.

Dans le cas général (T) :

$$\boxed{\mathcal{G} = \frac{n'-n}{n'} \frac{p}{R} + \frac{n}{n'} = \frac{p}{f'} + \frac{n}{n'}}$$

Pour (TS) comme $p = 0$, on retrouve : $\mathcal{G} = \frac{n}{n'}$

Remarques (T'), pour $T_2 = 0$, s'écrit :

$$(T) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -\frac{C}{n'} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \quad \det(T) = \gamma \mathcal{G} \quad \text{Or : } \det(T) = \frac{n}{n'}$$

Donc : $\gamma \mathcal{G} = \frac{n}{n'}$ ou $\frac{y'}{y} \frac{u'}{u} = \frac{n}{n'}$ $nyu = n'y'u'$: Relation de Lagrange-Helmoltz.

La notion de grossissement angulaire peut être passée sous silence en 1ère C, ayant un intérêt bien moindre que les trois autres relations. Cependant, elle permet de vérifier deux résultats :

- Tout rayon incident passant par C (ou dont le prolongement passe par C) ayant pour support un axe secondaire, n'est pas dévié.

Donc, C est conjugué de lui-même et $u' = u$. Ceci est rigoureux (de même que S est

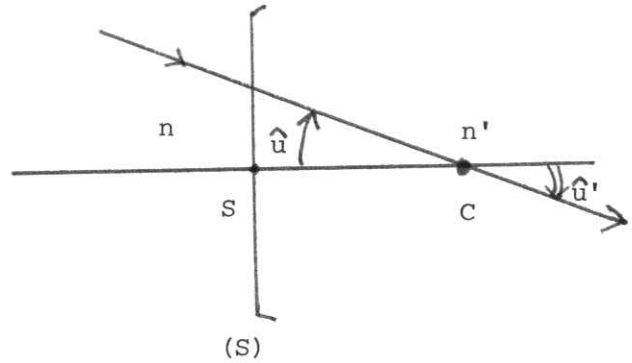
conjugué de lui-même).

- Le premier résultat peut être vérifié avec la relation de conjugaison :

$$p = R \implies p' = R$$

- Le second s'exprime : $\mathcal{G} = \frac{u'}{u} = 1$ Or : $\mathcal{G} = T_4 = \frac{p}{f'} + \frac{n}{n'}$

$$\mathcal{G} = \frac{n'-n}{n'} \frac{R}{R} + \frac{n}{n'} = 1$$



- Troisième méthode pour calculer les distances focales

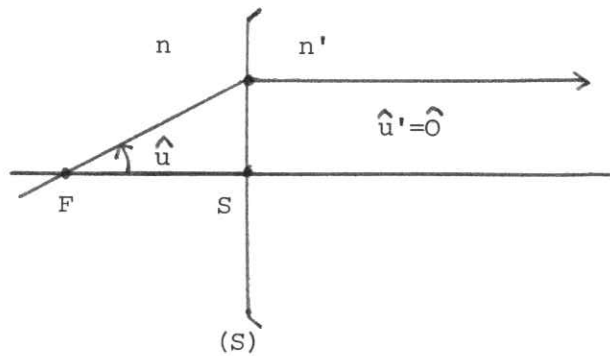
Distance focale-objet f à partir de \mathcal{G} :

$$\forall u, u' = 0 \text{ si } A = F$$

$$\text{Donc : } \mathcal{G} = \frac{u'}{u} = 0$$

$$\text{Or : } \mathcal{G} = \frac{n'-n}{n'} \frac{f}{R} + \frac{n}{n'} = 0$$

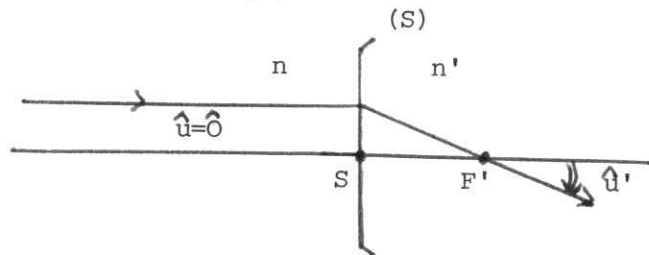
$$\implies f = -R \frac{n}{n'-n}$$



Distance focale image f'

à partir de \mathcal{G} , Si $p \rightarrow -\infty$

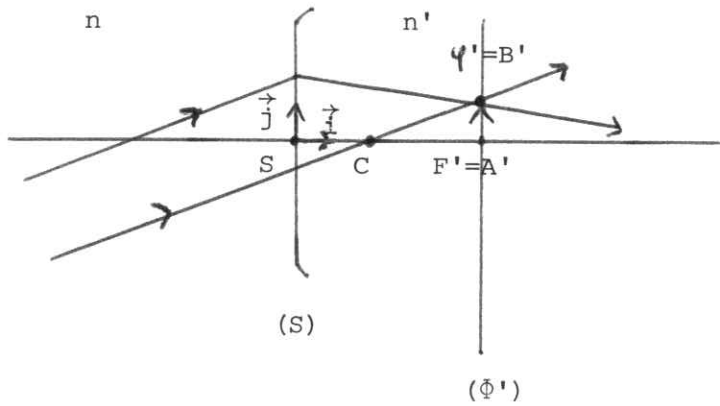
$u \rightarrow 0$ $|\mathcal{G}| \rightarrow +\infty$ d'où f'



Autre remarque : Calcul des distances focales à partir de γ . Calcul de f'

Si $[AB]$ est tel que $p \rightarrow -\infty$, pour que $\overline{A'B'} \neq 0$, il faut que $|\overline{AB}| \gg |\overline{A'B'}|$ ou $\gamma = 0$

($A' = F'$, B' se situe en un foyer-image secondaire φ')



$$\text{Or : } \gamma = 1 - \frac{n'-n}{n'} \frac{p'}{R}$$

$$\text{Si } p' = f' , \quad \gamma = 0$$

$$f' = R \frac{n'}{n'-n}$$

Calcul de f

$$\text{Si } p \rightarrow f, \quad |\gamma| \rightarrow +\infty \quad \text{d'où } f.$$

- Les constructions géométriques :

- rayon émergent correspondant à un rayon incident donné
- image[A'B'] d'un objet[AB]

restent traditionnelles et utilisent les propriétés de : C, F, F' (avec toujours une relation de plus que ce qui est nécessaire pour la construction).

Exercice : Etablir la matrice de transfert (Tc) avec $G = G' = C$. Montrer que $T_2 = 0$ (conjugué de lui-même), $T_4 = 1$ ($G = 1$), T_3 inchangé.

5 DIOPTRE PLAN

5-1 DEFINITION

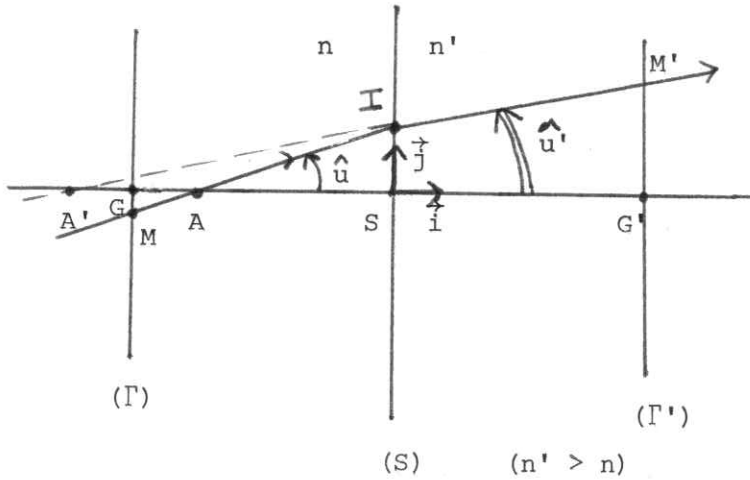
Un dioptré plan est une surface plane (S) de séparation de deux milieux homogènes transparents d'indices absolus n et n' .

Pour traiter les problèmes relatifs à ce système, on peut d'abord remarquer qu'il possède une infinité d'axes optiques : toutes les droites orthogonales à (S). Ces droites sont parallèles. Son étude peut s'effectuer de deux façons différentes :

- Etude directe, comme celle effectuée pour le dioptré sphérique à partir du 4-7. Cette étude est la plus longue, mais la plus "physique".

- Etude indirecte, en considérant qu'un dioptré plan est la limite d'un dioptré sphérique lorsque $|R| \rightarrow +\infty$. C'est la seule que nous effectuerons. Il faut remarquer que c'est un système moins "approximé" que le dioptré sphérique ((S) est bien tangent à lui-même en S ; il est rigoureusement conjugué de lui-même, avec $\gamma=1$).

5-2 MATRICE DE TRANSFERT AVEC PLANS DE REFERENCE QUELCONQUES



Pour un dioptre sphérique :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n'-n}{n'} \frac{\overline{SG'}}{R} & -\overline{SG} + \frac{n'-n}{n'} \frac{\overline{SG} \cdot \overline{SG'}}{R} + \frac{n}{n'} \overline{SG'} \\ -\frac{n'-n}{n'} \frac{1}{R} & \frac{n'-n}{n} \frac{\overline{SG}}{R} + \frac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

Si $|R| \rightarrow +\infty$:

$$(T) \rightarrow \boxed{(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{SG} + \frac{n}{n'} \overline{SG'} \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}}$$

5-3 FORMULES DE DESCARTES

* Convergence : $T_3 = -\frac{C}{n'} = 0$ D'où $C = 0$: le dioptre plan est afocal.

* Grandissement : $\gamma = T_1 = 1$ Lorsque $T_2 = 0$ (et même lorsque $T_2 \neq 0$, mais T_1 n'a alors aucun sens physique). Deux plans conjugués quelconques sont des plans principaux. Nous montrerons que (S) est conjugué de lui-même, ce qui est rigoureux. Par convention nous prendrons : $(\pi) = (\pi') = (S)$ ou $H = H' = S$

* Conjugaison : Si $\overline{SG} = \overline{SA} = p$, $\overline{SG'} = \overline{SA'} = p'$, $T_2 = 0$ ou :

$$-p + \frac{n}{n'} p' = 0$$

ou :
$$\boxed{-\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = 0}$$

On vérifie ici que $p = 0 \iff p' = 0$

+ Grossissement : $\boxed{g = T_4 = \frac{n}{n'}}$ Pour $T_2 = 0$ (vrai, en fait, pour T_2 quelconque mais n'a aucun sens physique pour $T_2 \neq 0$).

Nous remarquons que γ et G sont invariables (les mêmes dans (TS) par exemple).

Exercice : Traiter une lame à faces parallèles comme un système centré (S) d'épaisseur non nulle dans lequel (sE) et (sS) sont des dioptries plans parallèles.

Remarque : On ne peut traiter un prisme comme l'ensemble de deux dioptries plans (sE) et (sS); car, n'étant pas parallèles, (S) n'est pas centré.

6 MIROIR PLAN

6-1 DEFINITION

Un miroir plan est la surface catoptrique (S) plane limitant un milieu homogène, transparent d'indice absolu n .

Comme le dioptre plan, le miroir plan est un système d'épaisseur nulle, centré car possédant une infinité d'axes optiques : toutes les droites orthogonales à (S).

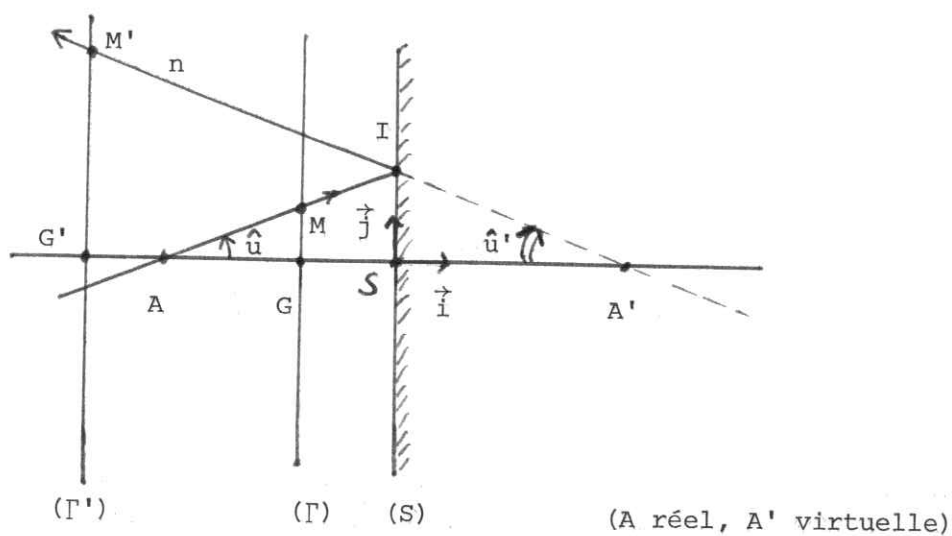
Il est à remarquer que les relations que l'on établit ne dépendent pas de conditions particulières, telles que celles de Gauss : le miroir plan est le seul système centré simple pour lequel la linéarité est rigoureuse

Pour traiter les problèmes relatifs au miroir plan, on peut :

- soit effectuer une étude directe, comme à partir du 4-7, ce qui est la meilleure méthode.
- soit effectuer une étude indirecte, en considérant qu'un miroir plan se conduit comme un dioptre plan avec $n' = -n$. C'est la seule étude que nous

effectuons.

6-2 MATRICE DE TRANSFERT AVEC PLANS DE REFERENCE QUELCONQUES



Pour le dioptre plan :

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{SG} + \frac{n}{n'} \overline{SG'} \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

Si $n' = -n$:

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{SG} - \overline{SG'} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det (T) = -1$

6-3 FORMULES DE DESCARTES

* Convergence : $T_3 = -\frac{C}{n'} = C = 0$: le miroir plan est afocal

* Grandissement : $\gamma = T_1 = 1$ Deux plans conjugués quelconques sont principaux.

Nous montrerons que (S) est conjugué de lui-même. Par convention, nous prendrons :

$(\pi) = (\pi') = (S)$, ou $H = H' = S$.

* Conjugaison : Si $\overline{SG} = \overline{SA} = p$, $\overline{SG'} = \overline{SA'} = p'$, $T_2 = 0$
 $-p - p' = 0$ ou $\boxed{p + p' = 0}$ p et p' sont de signes contraires ; objet et image sont de natures différentes

On a bien : $p = 0 \Leftrightarrow p' = 0$: (S) conjugué de lui-même.

* Grossissement : $\boxed{G = T_4 = -1}$ $u' = -u$ montre que rayons incident et réfléchis sont symétriques par rapport à (S).

Remarques : Un traitement matriciel pour un système aussi simple semble superflu. Cependant, si on l'effectue directement, et avant tout autre système, il offre l'avantage d'une facile compréhension.

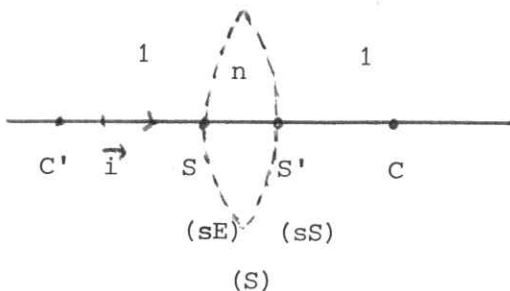
Les propriétés à démontrer par rotation du miroir peuvent se traiter par la géométrie vectorielle, la composée de deux symétries vectorielles étant une rotation vectorielle.

La notion de champ devra être établie par la géométrie traditionnelle.

7 LENTILLES MINCES

7-1 DEFINITION

Une lentille est un système centré (S) d'épaisseur non nulle constitué d'un milieu transparent homogène, d'indice absolu n , plongé, pour simplifier, dans l'air, d'indice absolu très voisin de 1, et limité par des dioptries plan ou sphérique (sE) et (sS). L'une ou moins de ces surfaces est sphériques. La lentille est dite mince si son épaisseur est très faible devant le rayon de base de la ou les deux calottes sphériques.



Dans ces conditions, on peut approximativement confondre les sommets S et S' sur l'axe optique. $S \approx S'$.

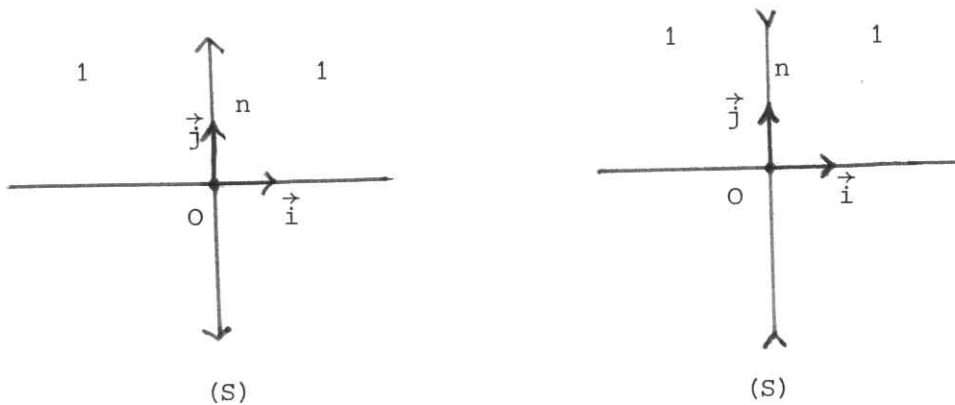
On notera O le point commun, car on montrera qu'il s'agit aussi bien du point principal objet que du point principal image : $O = O' = H = H'$ pour les formules de Descartes.

On notera toujours algébriquement les rayons :

$$\overline{SC} = \overline{OC} = R \quad \overline{S'C'} = \overline{OC'} = R' \text{ Nous supposons } R' \neq R \text{ (ou } C' \neq C),$$

sans quoi le système est afocal, et sans intérêt.

Les surfaces (sS) et (sE) seront confondues en (S) avec le plan orthogonal en O à l'axe optique. D'où les schémas traditionnels des lentilles minces :



Convergente : $C > 0$

Divergente : $C < 0$

Par la suite, pour simplifier, nous adopterons pour toutes les lentilles le schéma relatif aux lentilles convergentes:



7-2 MATRICE (TS) DE TRANSFERT AVEC PLANS DE REFERENCE (S)

(TS) est établie pour la transformation : (S) plan d'entrée \rightarrow (S) plan de sortie, ce que l'on peut décomposer de la manière suivante :

* On passe, avec le premier dioptre (indices successifs : 1, n, rayon R) de (S) plan d'entrée à (S) plan de sortie, par :

$$(TS_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{n} \frac{1}{R} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

* On passe, avec le deuxième dioptre (indices successifs : n, 1, rayon R') de (S) plan d'entrée à (S) plan de sortie par :

$${}^{(TS_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1-n) \frac{1}{R} & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \frac{1}{R'} & n \end{pmatrix}$$

D'où : $(TS) = (TS_2) \times (TS_1)$

$$(TS) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \frac{1}{R'} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{n} \frac{1}{R} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) & 1 \end{pmatrix}} = (TS)$$

7-3 PLANS PRINCIPAUX. CENTRE OPTIQUE. AXES PRINCIPAUX ET SECONDAIRES. CONVERGENCE

Dans (TS) :

* $T_2 = 0$. Donc (S) est conjugué de lui-même

* $T_1 = 1$ lorsque $T_2 = 0$. Donc, pour (S) : $\gamma = 1$.

(S) est un plan principal, conjugué de lui-même. Il est unique si $C \neq 0$. On a alors

$(\pi) = (\pi') = (S)$, $H = H' = 0$

* $T_3 \neq 0$. Or $T_3 = -\frac{C}{n'}$; $n' = 1$: $T_3 = -C$

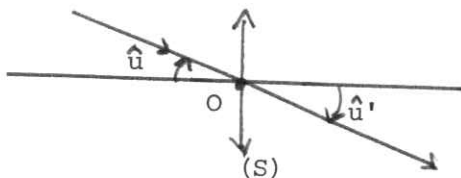
$$\boxed{C = (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)} \quad n > 1 ; R' \neq R \Rightarrow C \neq 0 : \text{une lentille est un système focal.}$$

Les plans principaux sont uniques : $(\pi) = (\pi') = (S)$

C a le signe de : $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$ $\begin{cases} > 0 : \text{lentille convergente} \\ < 0 : \text{lentille divergente} \end{cases}$

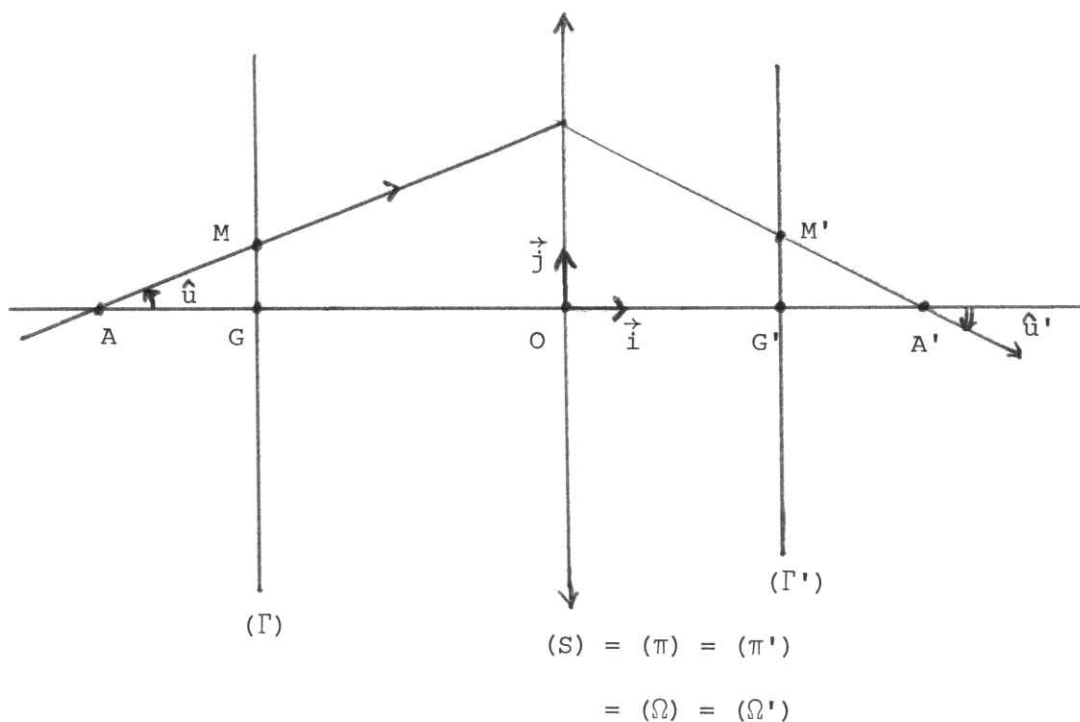
* $T_4 = g$ lorsque $T_2 = 0$. Or $T_4 = 1 \Leftrightarrow g = 1 \Leftrightarrow u' = u$.

Tout rayon incident passant par O n'est pas dévié. Donc l'axe optique défini précédemment est l'axe principal ; toute autre droite passant par O est un axe secondaire



Remarque : $\det(TS) = 1$. On retrouve bien, en général : $\det(T) = \frac{n}{n'}$, avec ici : $n = n' = 1$.

7-4 MATRICE (T) DE TRANSFERT AVEC PLANS DE REFERENCE QUELCONQUES



Comme $H = H' = O$, nous prendrons O pour double-origine (formules de Descartes).

Le plan d'entrée (Γ) a sa position définie par \overline{OG} , le plan de sortie (Γ') a sa position définie par $\overline{OG'}$

(T) est établie avec les plans de référence (Γ) et (Γ'). Or :

- on passe de (Γ) plan d'entrée à (S) plan d'entrée par la matrice d'espace :

$$(E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{OG} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- on passe de (S) plan d'entrée à (S) plan de sortie par la matrice de transfert (TS).

- on passe de (S) plan de sortie à (Γ') plan de sortie par la matrice d'espace :

$$(E') = \begin{pmatrix} 1 & \overline{OG'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où (T) = (E') × (TS) × (E'⁻¹)

$$\begin{aligned} (T) &= \begin{pmatrix} 1 & \overline{OG'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\overline{OG} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \overline{OG'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\overline{OG} \\ -(n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) & (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \overline{OG} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 - (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \overline{OG'} & -\overline{OG} + (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \overline{OG} \cdot \overline{OG' + OG'} \\ -(n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) & (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \overline{OG} + 1 \end{pmatrix}$$

Comme : det (E') = det (TS) = det (E'⁻¹) = 1 : det(T) = 1

7-5 RELATION DE CONJUGAISON

Si, et seulement si : G = A , G' = A', conjugués entre eux, T₂ = 0

Posons : $\overline{OA} = p$, $\overline{OA'} = p'$; comme : C = $\frac{n'}{f'}$, n' = 1 : C = $\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$

$$-p + \frac{p \cdot p'}{f'} + p' = 0 \quad \text{ou :} \quad \boxed{-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}} \quad \text{On a bien : } p = 0 \Leftrightarrow p' = 0$$

Remarque . Cette formule est la même que pour le dioptré sphérique en prenant :
n = n' = 1.

7-6 DISTANCE FOCALES

- Distance focale-image f', telle que : $\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$

- Distance focale objet f. A l'aide de la loi du retour inverse, qui revient simplement à permuter R et R' : $f = - f'$

On a bien : $\frac{1}{f'} = - \frac{1}{f}$, cas particulier de : $\frac{n'}{f'} = - \frac{n}{f}$, lorsque $n = n' = 1$.

Remarque : f' et f peuvent aussi être obtenues par la relation de conjugaison.

7-7 GRANDISSEMENT

Lorsque $T_2 = O$, $G' = A'$, avec $\overline{OA'} = p'$ et $T_4 = \gamma$

$\gamma = 1 - \frac{p'}{f'}$ On a bien $\gamma = 1 \iff p' = 0$

Remarques : On peut aussi obtenir f' en faisant $\gamma = 0$, et f en faisant $|\gamma| \rightarrow + \infty$

La formule donnant γ est la même que pour le dioptre sphérique

7-8 GROSSISSEMENT

Lorsque $T_2 = O$, $G = A$ $\overline{OA} = p$ et $T_4 = g$

$T_4 = g = \frac{p}{f'} + 1$

Remarques : On peut aussi obtenir f' en faisant $|g| \rightarrow + \infty$, et f en faisant $g = 0$.

La formule est la même que pour le dioptre sphérique en faisant $n = n' = 1$.

Conclusion : les formules de Descartes, exprimées avec f' (ou f) sont les mêmes pour ces deux systèmes.

7-9 GENERALISATION A UN DOUBLET

Si un système centré (S) est constitué de deux lentilles minces de même axe principal, il constitue un doublet (microscope, lunette astronomique...). Soit (L_1) et (L_2) les deux lentilles, de centre optique respectif O_1 et O_2 , si l'on connaît l'épaisseur $e = \overline{O_1 O_2} > 0$ du doublet, on peut établir sa matrice de transfert (T) pour des plans de référence quelconques en commençant par l'établir avec $(\Gamma) = (S)$, $(\Gamma') = (S_2)$, soit (TS). Selon que T_3 est nul ou non, le doublet est afocal ou non.

On montre que :

$$(TS) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{e}{f'_1} & e \\ -\frac{1}{f'_1} - \frac{1}{f'_2} + \frac{e}{f'_1 f'_2} & 1 - \frac{e}{f'_2} \end{pmatrix}$$

Si $e = 0$, on trouve la formule de Gullstrand :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \iff \boxed{C = C_1 + C_2}$$