IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

NANTA IREMICA N° 18

Nombres entiers naturels

Tome 1

éléments de réflexion pour une approche à l'école élémentaire

1978

INTRODUCTION

En 1976-1977, notre groupe "professeurs d'Ecole Normale" de l'IREM de NANTES a choisi de travailler sur le problème de l'approche du nombre entier à l'école élémentaire ; l'idée n'était pas de lancer des expérimentations dans les classes, mais plutôt de s'orienter vers une approche synthétique du problème susceptible de fournir des idées de travail dans le cadre de la formation initiale et continue des instituteurs.

Notre problématique a été la suivante : "*Qu'est-ce qu'un nombre naturel ?*
Comment se présente ce concept sur le plan mathématique ?
Quelles données psychologiques en conditionnent l'acquisition ?
Quels types d'approche pédagogiques paraissent les plus appropriés ?".

Et dans ce cadre, "*Quelles sont les différentes composantes de ce concept : aspect cardinal, aspect ordinal, numération... ?*
Quels rapports entretiennent-elles ?".

Dès le départ, une recherche sur les conditions historiques d'apparition des nombres et des systèmes de numération nous a paru pouvoir être éclairante dans le cadre de notre travail.

Peu à peu, ce point de vue historique a prévalu. C'est ainsi que les conceptions mathématiques actuelles du nombre nous ont semblé ne pouvoir se comprendre que par un retour aux sources, en particulier par l'évolution de la question depuis le XIXè siècle.

S'il est difficile de déceler une évolution historique des problèmes psychologiques liés au nombre dont l'étude reste marquée par l'imposant travail de PIAGET et son école, les conceptions pédagogiques ont sensiblement changé en un siècle. C'est pourquoi, tout en donnant un aperçu des orientations acutelles, nous nous sommes attachés à étudier l'évolution de ces conceptions.

Le présent document n'a pas pour but d'indiquer quelques "bon choix" que ce soit en matière d'approche du nombre à l'école élémentaire. Il se veut seulement outil de réflexion et de compréhension de problèmes liés à cette approche.

Tout n'est pas dit, loin s'en faut. Non seulement nous avons complètement laissé de côté tout ce qui touche aux extensions successives de la notion de nombre, mais même en matière de nombres naturels, on pourra regretter certaines lacunes ou certaines simplifications.

Le document se présente en cinq parties et quatre annexes :

- La première partie essaie de montrer comment le nombre a commencé à être utilisé dans l'histoire, comment se sont élaborés différents systèmes de numération, et comment nous en sommes arrivés à notre système actuel.

- La seconde partie met en évidence la fascination qu'ont exercé les nombres amenant des constructions d'abord mystiques puis progressivement plus scientifiques.

- La troisième partie commence au XIXè siècle, à une époque où les mathématiciens commencent à se préoccuper de la question "qu'est-ce qu'un nombre naturel ?". La lecture de ce chapitre pourra paraître parfois un peu ardue ; c'est pourquoi nous avons laissé en petits caractères certains passages qui pourront être passés en première lecture.

- Dans la quatrième partie, après avoir indiqué les principales conclusions de l'équipe de PIAGET en matière de problèmes psychologiques liés a l'apprentissage du nombre, nous donnons d'autres points de vue.

- La cinquième partie, enfin, retrace l'évolution dans l'approche du nombre au C.P. de 1887 à 1977 et indique quelques pistes en fonction des pratiques pédagogiques actuelles.

Nous avons reporté en Annexe certains développements plus techniques :

- en annexe 1, on trouve un commentaire de la méthode axiomatique de PEANO pour la construction des naturels.

- en annexe 2, figurent à l'aide d'une présentation axiomatique aussi simple que possible, quelques idées de base sur les notions de nombre entier, d'ordinal et de cardinal.

- en annexe 3, on s'efforce de montrer le lien entre les conceptions de PIAGET sur la notion de nombre et la thorie de BOURBAKI des Cardinaux.

- l'annexe 4 est une justification arithmétique des systèmes de numération à base.

Disons pour finir que le présent document n'a pas forcément pour but d'être un outil individuel pour les instituteurs. Au contraire, la difficulté relative de certains passages et la nécessité de prolonger la réflexion font que l'exploitation optimale sera sans doute obtenue à partir d'un travail collectif.

Ont participé à ce travail :

CHAUVAT Danièle	E.N.F. NANTES
COELHO Michel	Faculté des Sciences de NANTES
COROLLEUR Annick	E.N.M. ANGERS
DELIN Danièle	E.N.F. NANTES
DEMARS Suzanne	E.N.F. LE MANS
FAUCHER Alain	E.N.M. LA ROCHE SUR YON
GAUD Dominique	E.N.M. LA ROCHE SUR YON
GAUYACQ Ginette	E.N.M. LA ROCHE SUR YON
GUILLEMENT Sylvie	E.N.F. NANTES
LACOMBE Hélène	E.N.F. LE MANS
LE COUTALLER Fernande	E.N.G. SAVENAY
LE LAY Colette	E.N.G. SAVENAY
LE POCHE Gabriel	E.N.M. LAVAL
PEAULT Hervé	E.N.M. ANGERS
TOUPIN Janick	E.N.F. LE MANS

et pour les illustrations :

Monsieur FONTAINE — Ecole Publique LE PLESSIS GRAMMOIRE.

TABLES DES MATIERES

.../...

- 1ère partie -

NOMBRE NATUREL ET SYSTEMES DE NUMERATION

QUELQUES REPERES HISTORIQUES

La notion de nombre telle que nous pouvons le concevoir aujourd'hui, n'est pas une notion simple, primitive. Elle est le fruit d'une lente et longue maturation dans l'histoire de l'humanité, pour laquelle nous allons essayer de poser quelques jalons (plus logiques que chronologiques).

I - UNE CERTAINE PERCEPTION DE LA PLURALITE

Une perception
es différences

Avant de maîtriser la notion de nombre, l'homme possédait déjà la faculté de distinguer l'unité de la pluralité et aussi d'établir des distinctions limitées à l'intérieur de cette pluralité.

u'on retrouve chez
ertains
nimaux

Il semble d'ailleurs que cette faculté se retrouve chez certains animaux particulièrement les oiseaux. On cite souvent l'exemple du châtelain qui voulait se débarasser d'un corbeau installé dans la tour de son château : chaque fois qu'il cherchait à le surprendre, l'animal allait se réfugier sur un arbre voisin pour ne revenir qu'après le départ du châtelain. Celui-ci utilisa alors le stratagème suivant : il fit entrer avec lui un autre homme dans la tour ; l'oiseau s'en alla et les deux hommes sortirent l'un après l'autre à quelques instants d'intervalle ; mais le corbeau ne s'y trompa pas et ne revint qu'après le départ du second. Les jours suivants, le châtelain revint avec deux puis trois autres personnes mais sans succès, le corbeau ne revenant toujours qu'après le départ du dernier homme. Finalement le châtelain fit entrer quatre personnes avec lui et cette fois, le corbeau revenu après le départ du quatrième se laissa surprendre... (1)

Bien que ne sachant pas compter, il avait été capable de percevoir à chaque fois la différence de situation, mais sa perception était insuffisante pour distinguer un groupe de quatre d'un groupe de cinq personnes.

erception plutôt
ualitative

On peut d'ailleurs penser que chez l'homme primitif, cette perception numérique est la perception d'une qualité liée aux objets et inséparable d'eux. De la même manière qu'il pouvait distinguer un objet rouge d'un objet bleu,

sans forcément concevoir la notion abstraite de "couleur rouge" ou de "couleur bleue", il pouvait différencier un groupe de 3 objets d'un groupe de 4 objets, sans concevoir la notion abstraite de "nombre 3" ou de "nombre 4". Certains langages primitifs trahissent cette façon de concevoir le nombre non en lui-même, mais comme une qualité liée aux objets : seules des désinences faisant corps avec le nom commun des objets indiquent leur nombre. (6)

Précisons que le concept de nombre lié à des classes de groupes d'objets sera sans doute plus difficile à atteindre pour l'homme qu'un concept comme la couleur liée, lui à des classes d'objets.

Sans doute, dans la mesure où il n'avait pas besoin de différencier des collections importantes, l'homme s'est-il longtemps contenté de cette perception ; on a constaté que certaines peuplades africaines ne disposent que de trois noms de nombres correspondant à "un", "deux" et "beaucoup". Il est aussi curieux de constater la parenté évidente entre les mots latins "três" (trois) et "trans" (au-delà), de même qu'entre les mots français "trois" et "très" ; en anglais "thrice" signifie "trois fois", mais peut aussi vouloir dire "extrêmement"... (5)

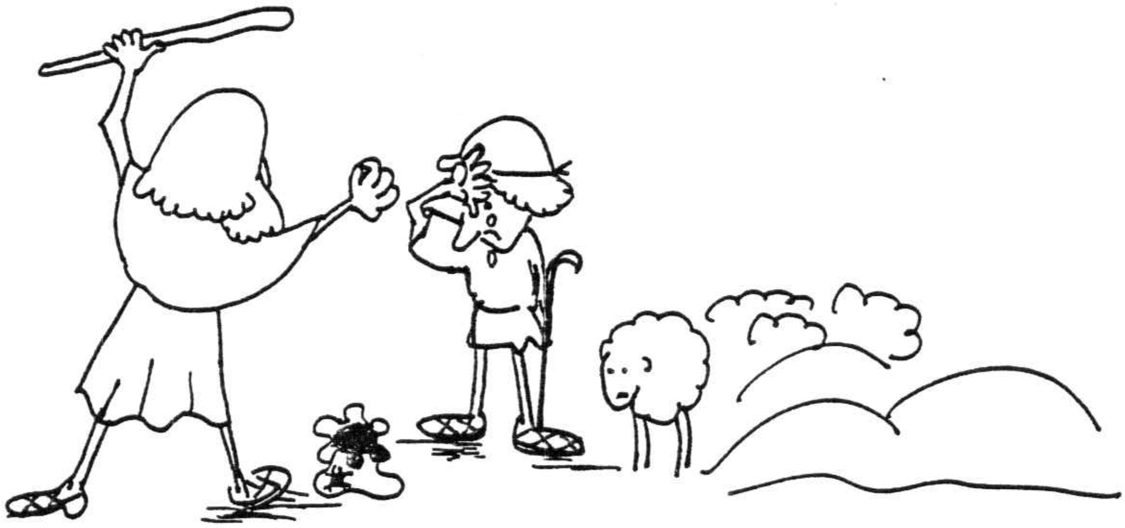
insuffisante pour pour la maîtrise du quantitatif,

Mais cette perception est limitée ; selon Dantzig, le sens direct visuel du nombre chez l'homme dépasse rarement quatre et le sens tactile est encore plus limité. D'autre part, pour aussi évoluée qu'elle soit, la perception n'est pas la conceptualisation du nombre ; elle peut conduire au souvenir et à l'évocation de l'image d'une collection d'objets, mais pas à l'idée de nombre. Et le progrès décisif n'est pas venu d'une amélioration de la perception mais d'une démarche intellectuelle de l'esprit humain qui par l'intermédiaire de techniques propres a pu, peu à peu, se rendre maître de la connaissance du nombre.

II - LA TECHNIQUE DE L'APPARIEMENT

Constatation de correspondances...

Cette technique est née de la nécessité de comparer deux groupes d'objets et consiste à apparier chaque objet d'un groupe à un objet d'un autre groupe. Prenons un exemple : des chaises sont disposées dans une salle ; entre un groupe de personnes ; y a-t-il assez de chaises pour tout le monde ? Cela peut-être difficile ou impossible à voir du premier coup d'oeil, mais si



on demande à chaque personne de s'asseoir sur l'une des chaises, on saura immédiatement s'il y a autant de chaises que de personnes, ou moins ou plus, sans qu'un "comptage" soit nécessaire.

On a retrouvé en Mésopotamie des bourses d'argile remontant à plusieurs millénaires et destinées à recevoir des cailloux symbolisant l'état d'un troupeau. Lorsqu'un berger était chargé du transfert d'un troupeau, l'intendant en présence du berger, associait un caillou à chaque mouton et plaçait tous ces cailloux dans la bourse qui était fermée et scellée. A l'arrivée, l'autre intendant effectuait, toujours en présence du berger, l'opération inverse et vérifiait ainsi qu'aucun animal n'avait disparu ; c'était aussi une garantie pour le berger à qui on ne pouvait demander plus de bêtes qu'il n'en avait au départ.

... et raisonnement sur les correspondances réalisées

Mais cet exemple a quelque chose de différent du précédent ; savoir ce qu'il y avait dans la bourse n'avait pas d'importance en soi ; ce n'était qu'un intermédiaire pour comparer l'état du troupeau au début et à la fin. Cette comparaison ne pouvait, et pour cause, se faire directement, matériellement. La certitude acquise ne venait pas seulement de la perception d'une correspondance, mais de la confiance en la validité du raisonnement intellectuel que nous pourrions expliciter ainsi : si deux groupes d'objets peuvent être appariés à un même autre groupe, alors ils peuvent être appariés entre eux.

Prenons un autre exemple : il n'y a pas si longtemps dans nos campagnes, on utilisait, pour conserver la trace du nombre de pains laissés par le boulanger, des bâtons coupés en deux dans le sens de la longueur ; chaque moitié était attribuée l'une au client, l'autre au boulanger. Chaque fois que ce dernier laissait un pain, on rapprochait les deux morceaux et on y faisait une encoche. Il y avait ainsi correspondance entre le nombre de pains vendus et le nombre d'encoches, et de plus l'appariement des encoches obtenu en rapprochant les deux morceaux de bâton permettait d'éviter toute contestation.

amènent au choix d'une collection de référence : les nombres cardinaux

Une fois reconnue la valeur de la démarche d'appariement, il suffisait alors de pouvoir se réféfer à des collections-types, chacune caractérisant toutes les collections pouvant lui être appariées ; on obtenait ce qu'on pourrait appeler aujourd'hui des "cardinaux". Des bourses contenant des billes d'argile ont pu ainsi servir de référence. Dans certains cas, l'homme a choisi pour désigner ces collections-types des objets qu'il lui était facile de retrouver dans son entourage immédiat. Ainsi la Lune ou la Terre ont pu représenter le cardinal "un", les ailes d'un oiseau le cardinal "deux", les feuilles d'un trèfle le cardinal "trois", les pattes d'un chien "quatre", les doigts de la main "cinq" etc... Et il semble qu'on puisse retrouver la preuve de cette origine des noms de nombres dans plus d'un idiome primitif. (1)

III - L'UTILISATION DE SUITES ORDONNEES

La correspondance avec des suites ordonnées,

Lorsque le berger mettait ou reprenait les petits cailloux dans la bourse, l'ordre dans lequel il les prenait n'avait aucune importance. L'essentiel pour lui était de ne pas avoir perdu sa bourse.

Mais ces bourses sont des objets encombrants et qui peuvent se perdre ; on ne pouvait en toute circonstance être sûr de retrouver dans son entourage l'une des collections-types. L'homme a été ainsi amené à établir des appariements avec des collections d'objets ne présentant pas ces inconvénients. En particulier, il a depuis longtemps utilisé son corps comme une machine destinée à retenir une information sur la pluralité. Citant le témoignage d'un observateur des insulaires du détroit de Torrès, Lévy-Bruhl raconte qu'ils avaient une manière de compter "*en commençant par le petit doigt de la main gauche, en continuant par le quatrième, celui du milieu, l'index, le pouce, le poignet, le coude, le sein gauche, le sternum, le sein droit, et en finissant par le petit doigt de la main droite*" (cité dans (2) p.22). Avec cette technique, il suffisait pour comparer deux collections, de savoir pour chacune d'entre elles à quel endroit du corps on s'était arrêté, à condition toutefois de commencer toujours par le même et de suivre à chaque fois le même ordre.

dont l'une sera bientôt privilégiée, celle des dix doigts des mains-

Des parties du corps utilisées, l'une devint bientôt prédominante : celle constituée de nos dix doigts auxquels on adjoignit parfois les dix orteils. Elle présentait en effet des avantages évidents : la "manipulation" était bien sûr toute simple et l'ordre était facile à retenir compte tenu de la dissymétrie des mains (on peut imaginer les difficultés qu'aurait à se repérer une étoile de mer qui voudrait compter sur ses branches...) C'est sans doute ce qui explique la prédominance de la base dix dans la plupart des systèmes de numération connus.

conduit à l'idée de nombre ordinal

Cette fois pour connaître une collection, il n'est pas nécessaire d'en posséder une autre qui puisse lui être appariée, il suffit, dans une suite ordonnée d'objets tous distincts, d'en reconnaître un seul, le dernier nommé, et d'être capable de retrouver cette suite toujours dans le même ordre. Cette technique permettait aussi de savoir si deux collections ont autant d'éléments -le dernier objet nommé dans la suite de référence devant être le même- et en même temps se prêtait à des désignations commodes. Ces objets de la suite correspondaient à ce que nous pourrions appeler aujourd'hui des "ordinaux".

On pourrait penser que dans l'histoire de l'humanité le nombre cardinal basé sur la comparaison seule a précédé le nombre ordinal basé sur la comparaison, mais avec un ordre sur les collections de référence.

> *"Cependant, les études les plus attentives de la culture et de la philosophie primitives ne nous ont jamais révélé cet ordre de préséance ; toutes les fois que l'on constate l'existence d'une technique du nombre, on trouve les deux aspects du nombre à la fois.*
> *Mais, dans ce cas, en même temps, on constate que l'action de compter sur les doigts a précédé ou accompagné cette technique du comptage, pour si rudimentaire qu'elle soit. Les doigts de l'homme sont comme un appareil qui lui permet de passer, sans s'en apercevoir, du nombre cardinal au nombre ordinal. Veut-il indiquer qu'un groupement d'objets en contient quatre, il lève ou replie quatre doigts <u>simultanément</u> ; veut-il compter ce même groupement, il lève ou replie ces doigts <u>successivement</u> ; dans le premier cas, il use de ses doigts comme d'un modèle cardinal ; dans le second, comme d'un système ordinal. Dans toute langue, même la plus primitive, on trouve des traces indubitables de cette origine de l'action de compter ; dans la plupart des idiomes, le nombre "cinq" est représenté par le mot "main", le nombre "dix" par le terme "deux mains" ou quelquefois par "homme". De plus, dans bien des idiomes primitifs, les noms de nombre jusqu'à "quatre" sont identiques aux appellations des quatre doigts.*
> *L'homme doit ses progrès en calcul à ce fait qu'il possède <u>dix doigts articulés</u> ; ce sont ces doigts qui lui ont appris à compter et à étendre indéfiniment la série des nombres. Sans cela, la technique humaine du nombre n'aurait pas dépassé de beaucoup le sens rudimentaire*

du nombre, et l'on peut raisonnablement conjecturer que, sans nos doigts, les progrès de la numération, et par conséquent, ceux des sciences exactes auxquels nous devons notre évolution matérielle et intellectuelle seraient restés lettre morte". ((1) P. 17-18 *)*

Comme dit G.GUITEL : *"si nous avions su autrefois ce que nous savons maintenant, peut-être aurions-nous été plus indulgents quand nous voyions nos jeunes élèves essayer de compter subrepticement sur les doigts de leurs mains".*

IV - LA CONSTRUCTION DES SYSTEMES DE NUMERATION

A quelle époque l'homme a-t-il commencé à se servir des noms de nombres, à les représenter ? C'est bien difficile à dire, mais il l'a certainement fait plusieurs milliers d'années avant l'invention de l'écriture. C'est dire l'importance qu'ont pu avoir les numérations figurées et les numérations parlées.

Numérations figurées - numérations parlées

Après les numérations figurées, se créent les numérations parlées

En même temps qu'il découvrait des techniques de comparaison, l'homme était amené à utiliser des collections-types ou des suites-types représentant les nombres. C'étaient des numérations commodes et qui furent longtemps utilisées : coquillages, cailloux, noeuds sur une corde, encoches, parties du corps... On retrouve encore de nos jours des traces de ce type primitif de numération sur les dés, les dominos ou les cartes à jouer.

Puis on s'est aperçu que les objets ou collections d'objets de référence pouvaient tout simplement être remplacés par des mots. Ainsi ont commencé les numérations parlées : une suite de mots remplaçant une suite d'objets. Mais pour éviter des efforts de mémoire trop importants, il fallait limiter le nombre de mots utilisés, et ce d'autant plus qu'on avait besoin de très grands nombres.

où apparaît l'idée de base

Une étape importante fut alors franchie lorsqu'on eut l'idée de regrouper plusieurs unités et de donner un nom au groupement obtenu. La réitération du procédé permettait ainsi de désigner de grands nombres avec une quantité limitée de mots. Sans doute le fait que les mains et les pieds soient perçus à la fois comme composés de 5 doigts et comme unités indivisibles a-t-il favorisé l'utilisation du procédé, ce qui explique la prédominance des bases cinq, dix et vingt dans presque toutes les civilisations.

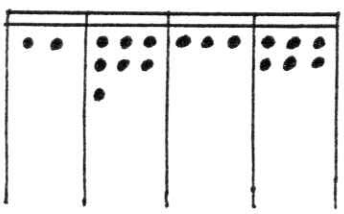
Quant au fait de prendre à chaque ordre de groupement une puissance de la base, cela n'était pas évident au départ et de nombreux exemples historiques montrent que ce ne fut pas toujours le cas.

Dès lors que la technique du groupement était retenue, il s'agissait de créer un vocabulaire pour nommer à la fois tous les nombres inférieurs à la base et toutes les puissances successives de la base : et de construire des règles d'assemblage de ces mots, c'est-à-dire une grammaire qui permette d'éviter toute ambiguité sur la signification des nombres. Tâche difficile pour laquelle la numération figurée jouera un rôle important en tant que support matériel : il faudra pouvoir passer facilement de l'expression d'un nombre en numération parlée à son image en numération figurée et inversement comme plus tard il devra y avoir correspondance entre numération parlées et numération écrite.

ette idée permet 'amélioration es numéra- ions figurées

Ainsi, parallèlement aux numérations parlées, les numérations figurées ont-elles subi des améliorations : on peut citer par exemple les "quipu", ces cordelettes à noeuds utilisées par les Incas ; les ficelles étant de différentes couleurs, chaque noeud ne représente pas forcément une unité, mais un certain groupement d'unités, suivant la couleur de la ficelle. Chez les Sumériens les petites sphères et les petits cônes d'argile, qui au début servaient à différencier les sortes de bêtes à cornes d'un troupeau, deviendront les unités successives de leur numération figurée.

Bientôt apparaîtront les "planches à compter" ; celles-ci se présentent sous forme de tableaux à plusieurs colonnes, chacune d'elles représentant les puissances successives de la base. Dans ces colonnes, on place des objets, souvent des cailloux ("calculus" en latin qui donnera notre mot français "calcul") groupés sans ordre ou de façon stéréotypée. Par exemple le nombre que nous écrivons aujourd'hui 2736 serait figuré ainsi sur la planche à compter (en base dix) :



Il y eut aussi les planches à sable (abaque vient d'un mot hébreu qui signifie sable) sur lesquelles il suffisait de dessiner des traits au lieu de mettre des cailloux. Après l'invention des numérations écrites, ce système pourra permettre dans certains cas, de remplacer les traits par les signes représentant les neuf premiers nombres.

Les bouliers sont fondés sur le même principe : cette fois, au lieu de placer des cailloux ou de tracer des traits, on se contente de déplacer des boules le long d'une tige.

qui à leur tour aident les numérations parlées à mieux s'organiser

Avec les planches à compter, le nombre devient lisible et traduisible immédiatement en numération parlée si celle-ci est bien organisée.

Une numération parlée bien organisée se présente comme un polynôme dont la variable serait la base, chaque puissance ayant un nom et étant affectée de coefficients positifs et inférieurs à la base.

Prenons l'exemple de notre numération parlée (dont nous ignorerons les irrégularités linguistiques). Elle utilise :

- d'une part neuf mots correspondant aux nombres inférieurs à la base
- d'autre part une suite de mots théoriquement sans fin correspondant aux différentes puissances de dix
- des règles d'assemblage sous forme d'un polynôme ordonné dans lequel les opérations sont seulement sous-entendues.

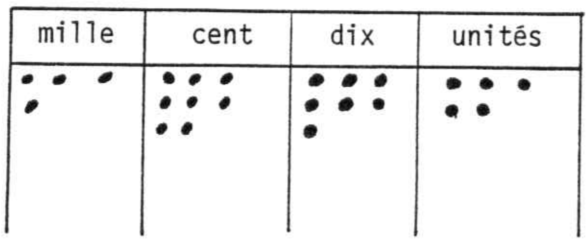
Ainsi le nombre que nous écrivons aujourd'hui 4875 s'énonce :

"quatre fois mille-plus-huit fois cent-plus-sept fois dix-plus-cinq unités"

ou plus simplement :

"quatre mille   huit cent   sept dix   cinq unités"

De cette façon, nous pouvons facilement le transcrire sur la planche à compter :



Pourquoi commencer dans l'énoncé du nombre par les plus grandes puissances de la base ? Cela peut paraître naturel dans la mesure où l'ordre de grandeur du nombre est ainsi précisé.

Après cela on utilise l'ordre des puissances décroissantes de la base, ce qui permet sans inconvénient de supprimer toute mention d'addition ou de multiplication, le choix de l'une ou l'autre étant lié à l'ordre d'énoncé. Ainsi, nous n'aurons aucune difficulté pour différencier par exemple "mille quatre" et "quatre mille".

Notons enfin que dans notre numération parlée, le coefficient "un" est lui aussi sous-entendu.

Nous reviendrons plus tard (cf § VII) sur les irrégularités et le problème des grands nombres dans notre numération parlée.

Numérations écrites

Après l'invention de l'écriture, un nouveau problème se posait : écrire le nombre à l'aide de signes conventionnels. Problème difficile qui sera résolu avec plus ou moins de bonheur suivant les civilisations.

Il est d'ailleurs frappant de constater que la plupart des peuples ont possédé une numération parlée bien organisée sans pour autant avoir construit une numération écrite d'aussi grande valeur.

Ainsi, par exemple, les Egyptiens qui avaient pourtant une très bonne numération parlée en sont-ils restés à une numération écrite assez primitive :

> *"Au moment de saisir le pinceau, le calculateur a fait une sorte de retour aux sources, il a été incapable de traduire globalement ce que lui apportait la numération parlée. Il fait penser à ces gens gauches et maladroits la plume à la main. Comme l'a si bien dit J.P. SARTRE, "cela tient à la nature du Verbe : on parle dans sa propre langue, on écrit dans une langue étrangère"." ((2) p. 57)*

Nous nous contenterons ici de passer rapidement en revue quelques-uns des principaux systèmes de numération écrite, en reprenant la classification proposée par G. GUITEL :

- les systèmes de type additif dans lesquels les signes sont entièrement libres quant à leur position et s'additionnent pour donner la valeur du nombre.

- les systèmes hybrides dans lesquels les chiffres sont partiellement libres ; mais comme dans les précédents, le nombre de chiffres nécessaires n'est pas défini : plus le nombre sera grand, plus il faudra de symboles.

- les systèmes écrits positionnels dans lesquels les chiffres sont "enchaînés" : on ne peut modifier leur place relative sans changer le nombre. Dans ces systèmes -qui nécessitent l'utilisation du zéro- si la base est n, le système comportera n chiffres à l'aide desquels on pourra écrire n'importe quel nombre.

1. Systèmes additifs

- le système égyptien hiéroglyphique

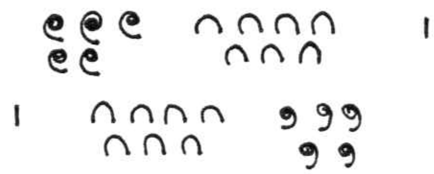
Utilisé déjà 3000 ans avant notre ère, ce système s'apparente à une numération visuelle très proche des numérations figurées. Il s'agit d'un système à base dix utilisant les symboles suivants :

un — l'unité désignée de façon simple par le trait
dix — l'anneau ouvert
cent — la spirale
mille — la fleur de lotus
dix mille — le doigt recourbé
cent mille — une sorte de têtard
million — un dieu assis, bras levés au ciel, signe qui tombera plus tard en désuétude avec l'amélioration du système.

Les unités de chaque ordre sont indiquées par répétition et disposées suivant certaines configurations. Les nombres peuvent être écrits de gauche à droite ou de droite à gauche ; dans ce cas les symboles non symétriques sont tournés dans l'autre sens.

Par exemple 571 s'écrira

ou



Mais ce n'est là qu'une commodité de lecture et la compréhension ne serait pas affectée avec une écriture du type :

En fait, il s'agit ni plus ni moins de la transcription de ce qu'on trouve sur la planche à compter, les cailloux étant remplacés par le signe de la colonne où ils se trouvent.

- le système romain

Il s'agit là d'un système sans grande qualité qui a survécu longtemps pour des raisons géographiques et politiques.

Les romains avaient pourtant une numération parlée bien organisée : neuf mots désignant les nombres inférieurs à dix, les puissances de dix étant désignées de façon commode par :

10	decem
10^2	centum
10^3	mille
10^4	decem millia
10^5	centum millia
10^6	decies centena millia
10^7	centies centena millia
10^8	milies centena millia
10^9	decies milies centena millia

Le système est donc lui aussi à base dix, utilisant les symboles suivants :

un	dix	cent	mille
I	X	C	M

et une écriture analogue à celle des égyptiens. Mais dans le souci de limiter la longueur des écritures, les romains utilisèrent la base auxiliaire cinq :

cinq	cinquante	cinq cents
V	L	D

De cette façon, 1079 par exemple s'écrira :

M L X X V I I I I

Sur la planche à compter, seules les colonnes correspondant aux puissances de dix étaient représentées. Le recours à la base auxiliaire cinq, s'il permettait effectivement de réduire les écritures bloquait en fait toute possibilité de progrès vers un système écrit plus élaboré.

Nous nous trouvons là encore devant un système de type additif dans lequel l'ordre des symboles n'importe pas. Modification de basse époque (toujours dans le souci de limiter la longueur des écritures) : une convention de type soustractif dans certains cas :

4 s'écrira IV (5-1) et 6 VI (6+1)
9 s'écrira IX (10-1) et 11 XI (10+1)
etc...

Bien entendu, le système n'en devint pas positionnel au sens où nous l'entendons ; 1079 s'écrivait M L X X I X, mais nous voyons que si l'on introduit des parenthèses M L X X (I X), il n'y aurait pas d'ambiguité à modifier la position relative des symboles.

Les Romains introduiront aussi des conventions (issues de la numération parlée) pour l'écriture des grands nombres jusqu'à cinq cent millions : le surlignage signifiant une multiplication par mille, encadrement signifiant une multiplication par cent mille.

Avec cette nouvelle convention, 123 456 748 s'écrivait par exemple :

$\boxed{\text{M C C X X X I I I I}}\ \overline{\text{L V I}}\ \text{D C C X X X X V I I I}$

ou, avec les conventions d'ordre soustractif :

$\boxed{\text{M C C X X X I V}}\ \overline{\text{L V I}}\ \text{D C C X L V I I I}$

- le système grec alphabétique

Le système ancien de numération en Grèce utilisait un principe analogue à celui que nous venons de décrire pour les romains. Au III° siècle a. c. un nouveau système utilisant toutes les lettres de l'alphabet fit son apparition ; on le trouve pour la première fois en -266 sur les monnaies de Ptolémée Philadelphe.

Les neuf premières lettres de l'alphabet désignent les nombres de 1 à 9, les neuf suivantes les dizaines de 10 à 90 et les neuf autres les centaines de 100 à 900. Comme l'alphabet grec ne comportait que 24 lettres, on introduisit 3 lettres d'origine sémitique qui n'étaient plus ou n'avaient pas été en usage chez les grecs : le "koppa", le "sampi" et le "digamma".

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rhô
2	β	bêta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ε	epsilon	50	ν	nu	500	φ	phi
6	ϛ	(digamma)	60	ξ	xi	600	χ	khi
7	ζ	zêta	70	ο	omicron	700	ψ	psi
8	η	êta	80	π	pi	800	ω	oméga
9	θ	thêta	90	ϙ	(koppa)	900	ϡ	(sampi)

Les milliers étaient représentés par les mêmes lettres que les unités avec un iota souscrit pour les différencier. Tous les nombres de 1 à 10 000 pouvaient ainsi être écrits très simplement avec au maximum quatre symboles.

Par exemple 2749 s'écrit $_{L}\beta\,\psi\,\mu\,\theta$

8030 s'écrit $_{L}\eta\,\lambda$

Pour distinguer les lettres numérales des lettres ordinaires, on pouvait les accentuer ou les surligner.

2 - Systèmes hybrides

Ce sont ceux qui fonctionnent de manière analogue à notre système de numération parlée : chaque puissance de la base est représentée par un symbole ; elle est associée à un symbole représentant un nombre inférieur à la base et ayant un rôle multiplicatif par rapport à la puissance de la base considérée.

L'écriture égyptienne hiéroglyphique évolua un peu vers un système de ce type. Lorsque par exemple on écrivait un nombre surmonté d'une fleur de lotus, cela signifiait que le nombre en question indiquait des milliers.

4000 et 1004 par exemple se différenciaient de la façon suivante :

4000 1004

Mais le procédé ne fut pas employé de façon systématique.

Par contre chez les Grecs, Apollonius (vers 170 A.C) fit du système grec alphabétique un système à base 10 000 en convenant que tout nombre suivi de la lettre M représenterait des myriades.

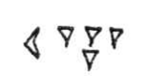
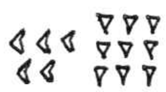
Avec ce principe, 314 159 s'écrivait $\lambda\ \alpha$ M ͵$\delta\ \rho\ \nu\ \theta$

Archimède, utilisant des groupes successifs de huit chiffres étendit le procédé à l'infini. Emerveillé par l'intérêt de cette découverte il écrivit un essai (l'Arénaire) pour prouver qu'il est possible avec ce système d'écrire un nombre supérieur au nombre de grains de sable pouvant être contenus dans une sphère plus grande que l'univers.

3 - Systèmes écrits positionnels

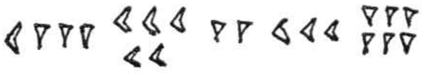
- le système babylonien

Issu du système sumérien de type additif (III° millénaire a.c.), le système babylonien fut effectivement utilisé pratiquement du II° millénaire A.C jusqu'à notre ère. C'est un système à base soixante ; mais les soixante chiffres nécessaires sont fournis par un système auxilaire à base dix de type additif. Il utilise le clou vertical  pour les unités et le chevron  pour les dizaines, disposées suivant certaines configurations qui ont varié suivant l'époque.

Ainsi 14 s'écrivait  ; 59 s'écrivait 

Avec 60 on obtenait une unité d'ordre supérieur et 60 s'écrivait comme 1 : 

On écrivait alors successivement de droite à gauche : les unités, les soixantaines, les soixantaines de soixantaines, etc...

Par exemple l'écriture suivante 

représentait le nombre $(13 \times 60^2) + (52 \times 60) + 36 = 49\ 956$ mais pouvait aussi désigner, puisque le zéro n'existait pas en fin de mot, le nombre $(13 \times 60^3) + (52 \times 60^2) + (36 \times 60) = 2\ 997\ 360$.

Le zéro intercalaire n'existait pas non plus et pour indiquer l'absence d'unités d'un certain ordre, on laissait un vide (ce qui pouvait parfois être équivoque). Plus tard, ce vide sera remplacé par un symbole particulier, deux clous inclinés : . Quant à savoir si l'écriture ci-dessus désignait le nombre 49 956 ou le nombre 2 997 360, c'était le contexte qui devait l'indiquer.

Avec seulement 2 signes, et sans être un système binaire, la numération babylonienne permettait donc d'écrire de façon très économe n'importe quel nombre. C'est sans doute, avant notre système actuel, celui qui a eu la plus grande influence sur le monde scientifique. Il survit encore maintenant dans la mesure des arcs ainsi que dans la mesure du temps.

- le système maya

Les Mayas, dont la civilisation remonte, croit-on, jusqu'au IV° siècle p.c. et fut très florissante, vécurent au Guatémala et au sud du Mexique actuels.

Leur système de numération fut très influencé par leur souci de se repérer dans le temps, souci qui les amena à utiliser plusieurs types de calendriers ; ils disposaient en effet :

- d'une année religieuse de 260 jours (13 fois 20 jours)
- d'une année vague de 365 jours
- d'une année de compte de 360 jours (liée à la numération écrite)
- d'une autre année de compte de 364 jours
- d'un cycle de 18 980 jours soit 52 années vagues permettant une correspondance avec l'année religieuse (un cycle dure 73 années religieuses)

Les Mayas utilisaient une arithmétique "qui ne connaît que le nombre entier mais qui ignore la technique de la multiplication et de la division, alors qu'elle spécule hardiment sur les multiples communs à des nombres fondamentaux pour le calendrier". (2)

Associée à une numération parlée parfaitement cohérente, la numération écrite maya est à base vingt mais se sert d'un système additif auxiliaire de base cinq :

l'unité est représentée par un point :

5 est représenté par un trait :

Les symboles sont disposés non pas horizontalement mais verticalement ; 7 s'écrit  ; 13 s'écrit 

La lecture se fait de haut en bas ; ainsi l'écriture  représente le nombre $(6 \times 20) + 12 = 132$

Les Mayas avaient même à leur disposition un symbole pour désigner le zéro (au milieu ou à la fin d'une écriture) :  (écriture qui n'était pas vraiment fixée et dont on a retrouvé plusieurs variantes).

Ce système déjà très perfectionné avait néanmoins un inconvénient important ; il avait en effet été construit en liaison étroite avec le calendrier pour lequel les Mayas utilisaient les unités suivantes :

1 kin correspondant à 1 jour

1 uinal correspondant à 20 kins, soit 20 jours

1 tun correspondant à <u>18</u> uinals, soit 360 jours

1 katun correspondant à 20 tuns soit 7200 jours

etc... en allant toujours par vingtaines pour la suite

Cette irrégularité se retrouvait dans la numération. Ainsi  ne représentait pas le nombre $(2 \times 20^2) + (6 \times 20) + 13 = 933$ mais le nombre $[2 \times (18 \times 20)] + [6 \times 20] + 13 = 853$

4 - Comparaison des différents systèmes

Les qualités essentielles d'une bonne numération écrite sont :

. l'aptitude à noter de très grands nombres, et ceci avec une quantité limitée de signes

. ses possibilités opératoires

De ce point de vue, les numérations positionnelles sont de loin les plus avantageuses. Quatre numérations de ce type seulement sont attestées historiquement (indépendamment du fait qu'elles ont pu se transmettre à d'autre civilisation) :

- la numération babylonienne de base 60 (base auxiliaire 10)
- la numération maya de base 20 (base auxiliaire 5)
- la numération chinoise (base 10)
- la numération indienne (base 10)

Parvenue à nous par l'intermédiaire des arabes, c'est cette dernière que nous employons aujourd'hui.

Pour comparer les écritures, imaginons le nombre 9 999 écrit dans différents systèmes de numération à base dix :

• <u>système additif (type égyptien)</u> :

36 symboles sont nécessaires, à partir des 4 symboles fondamentaux : unités, dizaines, centaines, milliers sont chacun représentés 9 fois, la valeur du nombre est obtenue par addition :

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{9 fois}} + \underbrace{10 + 10 + \ldots + 10}_{\text{9 fois}} + \underbrace{100 + 100 + \ldots + 100}_{\text{9 fois}} + \underbrace{1000 + \ldots + 1000}_{\text{9 fois}}$$

• <u>système additif alphabétique (type grec)</u>

4 symboles parmi les 36 servant à l'écriture des nombres de 1 à 10 000 : l'un exprimant les 9 unités, un autre les 9 dizaines, puis les 9 centaines et les 9 milliers. Là encore la valeur du nombre s'obtient par addition :

$$9\ 000 + 900 + 90 + 9$$

• <u>système hybride</u> (type notre numération parlée)

7 symboles sont nécessaires parmi les 13 (4 pour les puissancesde dix, 9 pour les nombres inférieurs à dix) qui servent à écrire les nombres de 1 à 10 000. La valeur du nombre est connue en appliquant à la fois multiplications et additions :

$$9 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 9$$

• <u>système positionnel</u>

4 symboles suffisent parmi les 10 (9 plus le zéro). C'est la position des chiffres les uns par rapport aux autres qui permet de retrouver une

signification du type ci-dessus.

9999

V - L'INVENTION DU ZERO

chiffre zéro, ymbole de umération

Les systèmes de numération positionnelle posaient un problème particulier : puisque c'était la position relative des chiffres qui renseignait sur la puissance de la base correspondante, l'absence d'unités d'un ordre donné devait pouvoir être indiquée par un signe.

Deux types de zéro sont alors apparus : le zéro placé en fin d'écriture qui a en quelque sorte un rôle d'opérateur : il multiplie le nombre par la valeur de la base ; et le zéro intercalaire à l'intérieur d'une écriture, pour indiquer l'absence d'unités d'un certain ordre.

Les Babyloniens se sont passés d'un tel signe pendant la plus grande partie de leur histoire. Ils n'emploieront un zéro que vers le II° siècle a.c. et encore seulement à l'intérieur d'une écriture ( ). Pour le zéro terminal, il n'existait pas et c'était le contexte qui devait préciser l'ordre de grandeur du nombre considéré.

On a vu que les Mayas utilisaient aussi un zéro à la fois comme zéro intercalaire et comme zéro opérateur. Mais c'est aux Hindous que revient le mérite d'avoir inventé le symbole que nous utilisons actuellement. Celui-ci était désigné par le terme "sunya" (littéralement "vide", "nul") que les Arabes lorsqu'ils adoptèrent la numération de l'Inde traduisirent par le mot "sifr" signifiant "vide". Lorsque la numération indo-arabe fut introduite en Italie, le mot se latinisa en "zephirum" qui devint "zéro". Parallèlement, en Allemagne "sifr" devient "cifra" et pendant longtemps ce mot fut employé comme signe secret puis servit à désigner n'importe quel signe numéral et donna en français les mots "déchiffrer" et "chiffre".

nombre zéro

Mais ce symbole utilisé en numération et que l'on appelle "zéro" désigne-t-il aussi un nombre ? A-t-il la fonction qu'ont les autres symboles de représenter une "certaine quantité" d'objets ? Certainement pas à l'origine où il n'apparaît que comme un moyen de représenter un vide dans une colonne de la planche à compter.

Il semble que ce soient les Hindous qui, les premiers aient utilisé le zéro comme nombre. Quoi qu'il en soit, en 628 BRAHMAGUPTA l'utilise comme tel avec ses propriétés opératoires ; ainsi traduit en notation moderne on y voit :

$a - a = 0$; $a + 0 = a$; $a - 0 = a$; $0 \times a = 0 = a \times 0$

(cf 11 p 87)

Mais le zéro a-t-il alors vraiment acquis son statut de "nombre naturel naturel" ? Comprend-on qu'il permet comme c'est le cas pour les autres naturels de dénombrer ou de compter les objets d'une certaine collection, en l'occurence une collection vide ? Très certainement non. Péano lui-même, beaucoup plus tardivement (fin du XIXè siècle) ne le considéra pas comme un élément de $\mathbb{N}$.

Ce n'est que plus tardivement, dans le cadre de la théorie des ensembles que 0 fut compris comme permettant de "dénombrer l'ensemble vide" (aspect cardinal) ou de "compter les éléments d'une suite ordonnée vide" (aspect ordinal). Et encore maintenant, ceci n'est que le résultat d'une démarche intellectuelle pratiquée par quelques initiés. L'homme de la rue ne dit-il pas spontanément "qu'il n'y a rien" de préférence à "il y a zéro objets". N'est-ce pas là encore le même concept que celui du vide dans la planche à compter ?

VI - VERS NOTRE SYSTEME ACTUEL

Le système indien pénètre lentement en Europe,

Notre système de numération nous vient de l'Inde. Seule diffère la forme des chiffres qui ne deviendra pratiquement définitive qu'avec l'invention de l'imprimerie.

Auparavant, avant le X° siècle, les Arabes comprirent la portée de ce principe dont ils avaient eu connaissance au cours de leurs conquêtes et l'adoptèrent.

Pendant ce temps, l'Occident en était encore à la numération issue des romains et au calcul sur les planches à compter. Peu à peu, au contact des musulmans (conquêtes, pèlerinages, croisades, voyages...) le système indien finit par être connu en Europe. Les chiffres furent d'ailleurs utilisés avant le système lui-même : vers le X° siècle, au lieu de mettre dans chaque colonne de la planche à compter autant de cailloux que nécessaire pour représenter un nombre, on place un jeton sur lequel est inscrit un signe. Les signes utilisés (les "apices") semblent bien dérivés des chiffres indiens ; le zéro par contre n'est pas utilisé ; puisque le nombre reste transcrit dans le système romain, il n'est pas nécessaire ; il sera réintroduit plus tard avec l'adoption du système indien pour l'écriture des nombres.

Voici, d'après (6) (P.52), l'évolution des chiffres, du II° siècle à l'époque moderne :

chiffres indiens (II° siècle)
chiffres arabes occidentaux (IX° siècle)
apices français (XII° siècle)
chiffres gothiques (XIV° siècle)
chiffres modernes

e heurte aux tra-
itions issues
es romains

Mais avant d'être adopté, le système indien dut lutter contre la routine de ceux qui, habitués à la numération romaine ne voyaient pas ses avantages. Les calculateurs professionnels préféraient d'ailleurs la complexité des anciens systèmes à la simplicité de cette nouvelle numération, simplicité qui risquait de détruire leur monopole ; (6) malgré cela son usage se répandit et à partir du XV° siècle, il était presque général.

Jusqu'au XV° siècle, les méthodes de calcul utilisées étaient extrêmement complexes. T. DANTZIG rapporte l'anecdote suivante :

"Un marchand allemand de cette époque avait un fils auquel il désirait faire donner une instruction commerciale assez développée. Il fit venir un professeur éminent pour lui demander un conseil sur l'institution qui conviendrait le mieux ; le professeur répondit que, si le bagage mathématique du jeune homme devait se borner à l'addition et la soustraction, il obtiendrait cette instruction dans une université allemande mais s'il voulait pousser jusqu'à la multiplication et à la division, l'Italie était, de l'avis du professeur, le seul pays où on pourrait les lui apprendre".

((1) P.31)

"Les calculs qu'un enfant fait, aujourd'hui aisément, exigeaient les

services d'un spécialiste, et l'opération qui ne demande maintenant que quelques minutes représentait au XII° siècle plusieurs journées de travail compliqué".

(ibid.)

On comprend pourquoi pendant très longtemps le calcul digital (calcul à l'aide des doigts) et l'utilisation des bouliers, planches à compter ou abaques eurent tant d'importance. Et du XI° au XV° siècle, ce fut la lutte entre, d'une part, les "abacistes" défenseurs des anciennes traditions issues des romains et du calcul sur abaques ou planches à compter, et, d'autre part, les "algoristes" partisans du calcul algorithmique sur les écritures que permettait le nouveau système de numération.

Avant de s'imposer définitivement

"On ne saurait indiquer avec précision la date à laquelle la victoire des algoristes fut définitive ; tout ce que nous savons, c'est qu'au début du XVI° siècle la suprématie de la numération nouvelle était incontestable. Dès lors, le progrès ne rencontre aucun obstacle ; aussi, au cours des cent ans qui suivirent, toutes les règles d'opérations sur les nombres entiers ainsi que sur les fractions ordinaires et décimales atteignirent la forme et le degré de perfectionnement sous lesquels on les enseigne aujourd'hui dans les écoles.

Avançons encore de cent ans et nous voyons que les abacistes et tout leur système sont complètement oubliés ; à tel point que diverses nations européennes commencent à considérer la numération de position comme leur oeuvre propre : ainsi par exemple, nous constatons, au début du XIX° siècle que les Allemands appellent les chiffres arabes "deutsche" afin de les distinguer des chiffres "romains" reconnus d'origine étrangère.

En ce qui concerne l'instrument "abaque", on n'en trouve aucune trace en Europe occidentale au cours du XVIII° siècle ; il réapparaît au début du XIX° dans des circonstances assez curieuses. Le mathématicien PONCELET, qui était Général sous Napoléon, fut fait prisonnier pendant la campagne de Russie et resta en pays moscovite durant plusieurs années ; en rentrant en France, il rapporta, à titre de curiosité, un boulier russe ; pendant quelques années cet objet fut considéré comme *une étrangeté d'origine barbare. Du reste, des exemples d'amnésie nationale de ce genre abondent dans l'histoire de la civilisation : combien de personnes cultivées de nos jours savent-elles que, il y a seulement quatre siècles, compter sur les doigts était le seul procédé dont disposait l'homme de culture moyenne pour calculer et que les secrets de la planche à compter étaient seulement accessibles aux calculateurs professionnels de l'époque ?"*

((1) p. 39-40)

Nous avons vu que presque partout, c'est la numération décimale qui s'est imposée. Mais sans doute le choix d'une autre base eut-il aussi bien fait l'affaire. A la fin du XVII° siècle, LEIBNIZ se fit le défenseur du système binaire dans lequel il voulait voir l'image de la Création, l'unité représentant Dieu et le zéro le néant ! Vers la fin du XVIII°, BUFFON proposa l'adoption du système duodécimal (base douze), douze ayant l'avantage d'avoir quatre diviseurs alors que dix n'en a que deux (il est d'ailleurs à noter que cette base est utilisée dans la plupart des anciens systèmes de poids et mesures et dans certains comptes commerciaux : douzaines, grosses). LAGRANGE, lui, se déclara plus favorable au choix d'un nombre premier comme base, (cf. dans (4) p. 259 sq. débat de l'Ecole Normale de l'An III, 11 pluviôse, avec LAGRANGE et LAPLACE). En 1955 même, J. ESSIG, inspecteur général des finances publia un essai intitulé "douze, notre dix futur". Mais à l'heure où la Grande Bretagne elle-même est gagné par le système métrique, on peut penser que rien ne pourra désormais modifier la base décimale de notre système de numération.

Et d'ailleurs, le choix de la base dix n'est finalement pas si mauvais ; comme dit G. GUITEL :

"L'histoire de la numération nous apprend, il convient d'y insister, que le nombre dix représente un très bon choix pour la mémoire humaine : la table de multiplication pouvait facilement être apprise par coeur. Cinq par contre était trop petit ; dans une numération écrite de position, 25 a déjà trois chiffres et 125 en possède quatre, quel encombrement ! Par contre, 20 et surtout 60 étaient trop grands ; les peuples qui ont adopté ces bases ont été amenés à introduire, soit dans leur numération parlée, soit dans leur numération écrite, des bases auxiliaires (...)"

((2) p. 25)

VII - VERS NOTRE NUMERATION PARLEE

Un système hybride sans zéro...

Notre système de numération parlée est un système hybride qui n'a pas besoin du zéro et utilise d'une part des mots pour désigner les nombres de un à neuf, d'autre part, des mots pour désigner les puissances de dix.

Logiquement, dans ce système, la suite des naturels devrait s'énoncer :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,
dix, dix-un, dix-deux, ... dix-neuf
deux dix, deux dix un, deux dix deux, ... deux dix neuf
...
neuf dix, neuf dix un, neuf dix deux, ... neuf dix neuf
cent, cent un, ... cent neuf, cent dix, ... cent neuf dix neuf
deux cents, ... deux cent neuf dix neuf
...
neuf cents, neuf cents neuf dix neuf
mille, mille un, etc... neuf mille neuf cents neuf dix neuf

puis on aurait un nouveau mot pour désigner 10^4.

...comportant beaucoup d'irrégularités...

en fait,

- il existe de nombreuses irrégularités liées à des phénomènes linguistiques : "onze", "douze", ... sont calqués sur les formes latines "undecim", "duodecim", ... qui, littéralement, ont bien le sens de "dix un", "dix deux",...

"vingt", "trente", ... sont aussi des abréviations provenant du latin et certaines dizaines (septante, octante, nonante) ne sont même pas communes à tous les francophones.

"quatre-vingts", "quinze-vingts" (ce dernier couramment utilisé autrefois sont sans doute des restes de la base vingt utilisée autrefois par les Celtes et dont on retrouve des traces dans la langue bretonne.

Il existe aussi des tolérances comme "onze cents", "douze cents", ... à la place de "mille cents", "mille deux cents"...

Et n'insistons pas sur les irrégularités orthographiques.

- ce n'est qu'à la sixième puissance de dix qu'intervient un mot nouveau "million", apparu en France vers le XIII° siècle, emprunté à l'italien "milione" (un grand mille). Notre système apparaît alors comme un système à base mille, dans lequel "dix" joue le rôle de base intermédiaire.

..ayant connu 2 erminologues our les grands ombres

C'est en 1484, que Nicolas CHUQUET conçoit à partir du million toute une terminologie nouvelle. On décompose le nombre en tranches de 6 chiffres et on obtient ainsi la tranche des unités, celle des millions, celle des byllions, puis celle des tryllions, des quadrillions, des quyllions, des sixlions, des septylions, etc...

En termes modernes, pour $N \geqslant 2$

$(10^6)^N$ se lira [N] illion, [N] désignant le préfixe d'origine latine caractérisant l'entier N

Par exemple, un octillion = $(10^6)^8 = 10^{48}$

Vers le milieu du XVII° siècle (d'après LITTRE), "*à l'instigation d'érudits qui n'étaient certainement pas mathématiciens*" (G. GUITEL) est apparue une nouvelle échelle. Visiblement adaptée de l'échelle longue de CHUQUET, elle en revient en quelque sorte à la base mille avec une écriture non plus par tranches de 6, mais de 3 chiffres.

Alors, pour $n \geqslant 3$

$(10^3)^n$ se lit $[n - 1]$ illion

C'est-à-dire que l'échelle courte emploie la même terminologie que l'échelle longue, ce qui n'est guère commode.

Dans cette échelle, un octillion = $(10^3)^9 = 10^{27}$

Le mot "milliard", apparu vers la fin du XVI°, permettait de se passer du billion dans l'échelle courte, mais l'ambiguité subsistait pour les grands nombres, d'autant que jusqu'à ces dernières années, les deux échelles étaient toutes deux utilisées simultanément suivant les pays.

galement fixé puis 1948

"*Dans les temps modernes, avec la diffusion des sciences et des faits économiques, qui entraîne l'accession aux grands nombres, la double échelle devenait intolérable. Le bureau des Longitudes a donc pris l'heureuse initiative de demander à la neuvième Conférence générale des Poids et Mesures (1948) d'étudier la question. La Conférence a conseillé* *l'emploi de l'échelle longue pour les pays européens. L'annuaire de 1952 ajoute, avec un certain humour, que les Etats-Unis d'Amérique ont conservé l'usage de l'échelle courte.*

(...)

Il faut faire un effort pour que l'échelle longue pénètre rapidement dans l'enseignement primaire. Les enfants aiment à jongler avec les grands nombres et les mots inventés par CHUQUET ont de quoi les enchanter.

Tous les pays sont d'accord sur la signification du mot milliard qu'il sera difficile d'abandonner en France, mais le mot billion doit être enseigné dans l'échelle longue (10^{12}), tout le reste en découle naturellement. On doit proscrire des dictionnaires et des arithmétiques son équivalence avec le milliard qui n'a plus aucun sens si l'on suit les recommandations de la Conférence générale des Poids et Mesures de 1948".

((2) p. 572 *)*

Si nous récapitulons (en orthographe moderne) les deux échelles nous avons :

échelle courte :	mille	million	billion	trillion	quadrillion	quintillion...
échelle longue :	mille	million		billion		trillion ...
	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}

Ainsi, suivant la conférence des Poids et Mesures de 1948, 23 700021 000005 083600 000901 000040 840 000 par exemple, se lira : "vingt trois sextilions, sept cent mille vingt et un quintillions, quatre vingt trois mille six cent quatrillions, neuf cent un trillions, quarante millions, huit cent quarante mille".

- 2ème partie -

DES "PROPRIETES" MAGIQUES AUX PROPRIETES ARITHMETIQUES

Des nombres pour quoi faire ? Pour compter, pour aider à résoudre des problèmes pratiques, certes. En même temps qu'ils étaient utilisés comme outils, les nombres devenaient aussi objet d'étude ; mais cette étude ne fut pas d'emblée d'ordre mathématique, et, en particulier dans les temps anciens, les nombres ont offert un support de choix aux élaborations symboliques.

I - LE SYMBOLISME DU NOMBRE

le nombre, clé de l'univers

Dans la mentalité traditionnelle, il n'y a pas de hasard : si, dans l'univers, des choses ou des êtres se trouvent regroupés en un certain nombre, cela doit avoir une signification. D'où l'idée qu'une connaissance sur les nombres permettrait d'accéder à une plus grande compréhension des êtres et des évènements ; car les nombres expriment non seulement des quantités mais aussi des idées et des forces qu'à travers eux on pourra chercher à comprendre et à dominer.

C'est là une conception que l'on retrouvera partout, aussi bien chez les Pythagoriciens *"toutes choses qui peuvent être connues ont un nombre, car il est impossible que quelque chose puisse être conçu ou connu sans le nombre"* (Philolaès),

que dans la philosophie chrétienne :

> *"Les nombres,* dit St MARTIN, *sont les enveloppes visibles des êtres : ils en règlent non seulement l'harmonie physique et les lois vitales, spatiales et temporelles, mais aussi les rapports avec le Principe. C'est qu'il ne s'agit pas de simples expressions arithmétiques, mais de principes coéternels à la vérité. Ce sont des idées, des qualités, non des quantités. La géométrie ne s'applique pas aux quantités spatiales, mais à l'harmonie des formes ; l'astronomie n'étudie pas seulement les distances, les poids ou les températures, mais les rythmes de l'univers. Les créatures elles-mêmes sont nombres, en tant qu'issues du Principe-UN.*

Elles retournent au Principe comme les nombres à l'unité : Dieu est en tous comme l'unité dans les nombres " ((9) t.3 p.281)

Ainsi, savoir interpréter les nombres, découvrir leur signification, cachée, apparaîtra très tôt comme l'une des clés de la connaissance, le plus haut degré selon PLATON ; et BOECE pourra affirmer que la connaissance suprême passe par les nombres.

force à maîtriser...

Mais en même temps, les nombres sont la source d'un pouvoir, dans la mesure où ils recèlent une force cachée. G. GUITEL cite l'exemple suivant :

> *"Bien des cases africaines ne possèdent qu'une ouverture ; il convient de mettre en garde le jeune homme qui rentre dans sa case pour y dormir. S'il commet l'imprudence de se coucher les pieds tournés vers l'entrée de sa case, les esprits de la nuit, qui sont condamnés à compter, ont vite fait le compte des doigts de ses pieds et le dormeur est immédiatement emporté."* ((2))

L'attitude devant les nombres sera donc faite à la fois de prudence et de recherche de connaissance. Prudence, car la force occulte des nombres a des effets souvent inconnus et il ne faudra donc pas les employer mal à propos. L'efficacité du verbe est grande, mais celle du nombre, à la fois parole et signe, est encore plus grande, plus forte et plus mystérieuse. L'énoncé d'un nombre concernant un individu de près donnera prise sur lui. *"Aussi ne dit-on jamais le nombre de ses enfants, de ses boeufs, de ses femmes, pas plus que son âge quand on le sait"*.((9)). La recherche de connaissance pourra par contre se faire pour les nombres qui ne nous touchent pas directement : ce sont alors des leçons, des thèmes, des symboles à interpréter.

L'imagination a ainsi établi autour du nombre tout un réseau de relations et de symboles à caractère anthropomorphique ; on prête aux nombres les pulsions des vivants, et chacun a sa personnalité propre.

l'interprétation symbolique des nombres

On trouvera dans (9) une étude très détaillée des interprétations symboliques données à divers nombres ; en voici un aperçu pour quelques-uns :

"UN" : C'est le symbole de l'homme debout, mais également le Principe, le Créateur ; *"l'un est le lieu symbolique de l'être, source et fin de toutes choses, contre cosmique et ontologique"*. C'est lui qui engendre le multiple et tout ce qui est multiple peut se réduire à lui.

"DEUX" : *"Symbole d'opposition, de conflit, de réflexion, ce nombre indique l'équilibre réalisé ou des menaces latentes"*. Il exprime une opposition qui peut être contraire et incompatible (le Bien/le Mal, le Jour/la Nuit, l'Amour/la Haine) ou complémentaire et féconde (l'Homme/la Femme...)

"TROIS" : *"Trois est universellement un nombre fondamental. Il exprime un ordre intellectuel et spirituel, en Dieu, dans le cosmos ou dans l'homme"*. C'est l'achèvement de l'Unité (la Trinité, Dieu en trois personnes de la religion chrétienne), le nombre qui rend compte du monde (terre, atmosphère, ciel), du temps (passé, présent, avenir), de toute action (le sujet agissant, l'action du sujet, l'objet ou le résultat de l'action).

C'est aussi souvent un nombre qui se rattache à des rites de tirage au sort.

"QUATRE" : Ses significations symboliques se rattachent à celles du carré et de la croix. Quatre apparaît généralement comme un symbole de plénitude, d'universalité : les quatre points cardinaux, les quatre vents, les quatre phases de la lune, les quatre saisons, les quatre éléments, les quatre bras de la croix, les quatre évangiles, etc...

C'est aussi parfois un symbole de la potentialité attendant que s'opère la manifestation qui vient avec le cinq.

"CINQ" : *"Le nombre cinq tire son symbolisme de ce qu'il est, d'une part la somme du premier nombre pair et du premier nombre impair (2+3), d'autre par le milieu des neuf premiers nombres. Il est signe d'union, nombre nuptial chez les Pythagoriciens, nombre aussi du centre, de l'harmonie et de l'équilibre"*.

C'est encore le symbole de l'Homme, avec ses cinq sens, ses cinq doigts de chaque main, l'homme qui, jambes et bras écartés, figure le pentagone.

C'est aussi le symbole de l'univers : un centre et quatre directions.

"SEPT" : C'est là un chiffre fatidique que l'on retrouve un peu partout, dans les religions, dans l'occultisme, dans la Bible, dans l'histoire... Exprimant la totalité, il symbolise un cycle complet, "une perfection dynamique". Il est le signe d'un changement après un cycle accompli et d'un renouvellement positif.

Associant quatre, symbole terrestre, et trois, symbole céleste, sept représente la totalité de l'univers en mouvement.

"TREIZE" : *"Dès l'Antiquité, le nombre treize fut considéré comme de mauvais augure. Philippe de Macédoine, ayant ajouté sa statue à celle des douze dieux majeurs, lors d'une procession, mourut assassiné peu après au théâtre".*

Mais le treizième dans un groupe peut apparaître aussi comme le plus puissant.

"D'une façon générale, ce nombre correspondrait à un recommencement, avec cette nuance péjorative qu'il s'agirait moins de renaître que de refaire quelque chose. Il représenterait par exemple la perpétuelle remontée du rocher de Sisyphe".

"QUARANTE" : C'est le nombre de l'attente, de la préparation, de l'épreuve ou du châtiment, et on le retrouve particulièrement souvent dans la Bible. Il a joué un rôle tout particulier dans les rituels mortuaires chez un grand nombre de peuples, un mort n'étant réputé "totalement mort" qu'au bout de 40 jours. Et la croyance selon laquelle le nombre quarante symbolise un cycle de vie a donné naissance à la coutume de la quarantaine.

"MILLE" : Ce nombre possède une signification paradisiaque ; c'est l'immortalité du bonheur ; il exprime l'ensemble des générations et la perfection de la vie.

la signification des nombres

Bien qu'il existe des constantes dans l'interprétation des nombres, chaque civilisation en a plus ou moins privilégié certains ; pour les Hébreux par exemple, 6, 7 et 40 étaient les chiffres fatidiques et on retrouve nettement cette influence dans la religion chrétienne. Chez les Perses et les Babyloniens, 60 (base du système de numération) et ses multiples sont les plus favorisés :

"Xerxès châtia l'Hellespont de 300 coups de verge et Darius fit diviser le Gyndès en 360 canaux parce qu'un de ses chevaux sacrés s'était noyé dans ce cours d'eau" (1)

D'une manière générale, il semble que 3, 7, 10, 13, 40 et 60 aient été les nombres les plus chargés de signification. Mais n'importe quel autre nombre (du moins dans cet ordre de grandeur) a reçu dans une civilisation ou une autre, à une époque ou une autre un sens caché. Les Babyloniens par exemple avaient associé à chacun de leurs dieux un nombre de 1 à 60, nombre correspondant à un certain rang dans la hiérarchie céleste. (1)

Une façon particulière d'attribuer une signification aux nombres fut la "gématrie" encore appelée "isopséphie". Issue de la cabale, -cette tradition dont la connaissance était jugée indispensable pour comprendre le vrai sens des livres de la bible-, la gématrie fut très à l'honneur dans les civilisations utilisant des numérations alphabétiques, particulièrement les Hébreux et les Grecs ; chaque lettre ayant dans ces numérations une valeur numérique, on pouvait associer à un mot donné un nombre obtenu en faisant la somme des valeurs numériques de chacune de ses lettres. Les écrivains de la bible eux-mêmes utilisaient la gématrie ; par exemple, Abraham partant au secours de son frère Eléazar emmène avec lui 218 esclaves ; or en gématrie hébraïque, Eléazar a précisément 218 comme nombre...

> *"On trouve dans les anthologies grecques de nombreux exemples de gématrie. Les noms de Patrocle, Hector et Achille ont respectivement comme nombre : 87*[1]*, 1 225 et 1 276 ; c'est à cela que l'on attribuait la supériorité d'Achille. Certain poète, désirant confondre son pire ennemi qui s'appelait Thamagoral, démontra que son nom était l'équivalent de loimos qui veut dire une sorte de peste.*
> *La théologie chrétienne fit un usage spécial de la gématrie pour interpréter le passé aussi bien que pour prévoir l'avenir. Le nombre*

(1) il s'agit sans doute ici d'une coquille ; on a en effet (cf numération grecque) :
Patrocle : πατροκλος = 80+1+300+100+70+20+30+70+200 = 871
Hector : Εκτορ = 5+20+300+800+100 = 1 225
Achille : Αχιλλευς = 1+600+10+30+30+5+400+200 = 1 276

666 avait une signification particulière : c'était le nombre de la Bête de l'Apocalypse dont l'interprétation catholique était l'Antéchrist ; un de ces théologiens, Pierre BUNGUS, qui vivait à l'époque de Luther, écrivit un livre de numérologie de 700 pages environ, dont une grande part était consacrée à ce 666, car l'auteur avait trouvé que ce nombre était équivalent au nom de Luther ; il en tira la conclusion évidente que Luther était l'Antéchrist. Luther répliqua en interprétant 666 comme la prévision de la durée du régime papal et se réjouit de pouvoir lui prédire une aussi courte existence". ((1) P. 44)

Les Romains aussi pratiquèrent un peu la gématrie. Ainsi dans l'Antiquité romaine, 17 était souvent considéré comme un nombre néfaste, car les lettres qui le composent (XVII) sont celles, changées d'ordre de VIXI : *"j'ai vécu" !...*

croyances contemporaines

Les croyances attachées aux nombres n'ont d'ailleurs pas complètement disparu aujourd'hui. Peut-être les nombres sont-ils moins perçus comme porteurs d'une force occulte, mais on retrouve fréquemment l'idée que des coïncidences numériques ne peuvent être l'effet du hasard et doivent donc avoir une signification cachée.

Si par exemple vous voulez montrer à quelqu'un que le Roi Soleil a eu toute sa destinée marquée par le nombre 14, vous pourrez lui faire observer qu'il fut majeur à 14 ans, monta sur le trône un 14 Mai, vit mourir son prédécesseur Louis XIII en 1643 (1+6+4+3=14), fut sauvé par Turenne à Blineau en 1652 (1+6+5+2=14), signa le traité de Douvres en 1670 (1+6+7+0=14) et mourut en 1715 (1+7+1+5=14) à 77 ans (7+7=14) !...

(...)

Tout le monde n'est sans doute pas persuadé qu'un miroir brisé condamne à "sept ans de malheur", mais bon nombre sont convaincus que "jamais deux sans trois". Et si, lorsqu'on "coupe les cheveux en quatre", qu'on "fait les quatre cents coups" ou qu'on voit trente-six chandelles", on n'attache guère d'importance aux nombre cités, "vingt-deux" apparaît comme porteur d'une grande force de défi.

Ajoutons que dans une société basée sur l'argent, le nombre ne peut manquer d'avoir une résonnance idéologique importante ; toute connaissance passe par un chiffrage : connaissance économique, bien sûr, mais aussi connaissance des opinions (cf. sondages), des personnes (cf. tests et QI), reconnaissance des valeurs (la notation des personnes commencée très tôt dès l'école)...

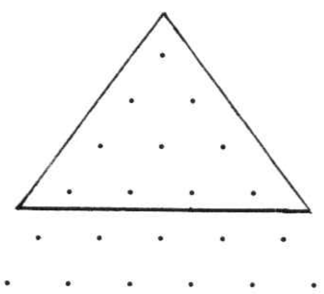
II - VERS UNE MATHEMATIQUE DU NOMBRE

les nombres chez les pythagoriciens

Avec les pythagoriciens qui, dans les derniers siècles avant notre ère se firent les tenants d'une "philosophie" accueillant les connaissances les plus diverses, les croyances n'empêchent pas des développements mathématiques intéressants.

Chez eux, le nombre est étudié dans une perspective religieuse et mystique et leur mérite sera, selon Aristoxène, d'avoir "élevé l'arithmétique au-dessus des besoins des marchands".

"Les nombres sont pour ainsi dire le principe, la source et la racine de toutes choses". (Théon de Smyrne). L'unité arithmétique ne fait qu'un avec le point géométrique et une sorte d'atome matériel. Les nombres sont donc représentables par des agencements de points qui serviront de modèles pour la compréhension des choses. A partir de cette conception, les pythagoriciens développeront toute une arithmologie mystique attribuant aux nombres des propriétés qualitatives.



etc...

Les nombres triangulaires : 1, 3, 6, 10 15... que l'on peut représenter à l'aide de points formant des triangles jouent un rôle important dans l'arithmologie pythagoricienne en particulier la "tétraktys" ou somme des quatre premiers nombres représentée par le triangle à dix points, enveloppant en elle les natures du pair (éphémère, féminin...) et de l'impair (indissoluble, masculin...) sera désignée comme le fondement de toutes choses.

A un disciple à qui il avait demandé de compter jusque 4, Pythagore pourra enseigner : *"Vois-tu, ce que tu as cru être quatre, c'était en réalité dix, un triangle parfait et notre mot d'ordre"*.

De la même manière, la suite des nombres 1, 4, 9, 16, 25... peut être représentée par des points disposés en carrés. Ce sont précisément les nombres carrés dont on voit facilement sur un dessin qu'ils peuvent se réduire à deux nombres triangulaires successifs.

Les nombres oblongs ou hétéromèques sont ceux que l'on peut représenter par un rectangle dont un côté a une unité de plus que l'autre. Eux aussi sont décomposables à l'aide des nombres triangulaires.

Citons encore les nombres pentagonaux, hexagonaux, heptagonaux... et, représentables dans l'espace, les nombres cudes, pyramidaux... Notons que le pentagone joue un grand rôle dans les mathématiques pythagoriciennes ; c'est même l'étoile à 5 branches ou pentagramme qui servit de signe de reconnaissance à la secte pythagoricienne. (cf. (4) p.28 sq)

Toutes ces études passionneront longtemps les mathématiciens et amèneront des développements intéressants. On trouve par exemple au Moyen-Age, en Chine et dans des manuscrits byzantins le fameux triangle arithémtique, plus connu sous le nombre de triangle de Pascal, celui-ci l'ayant systématiquement étudié au XVIII°.

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5 10 10  5  1
1  6 15 20 15  6  1
```

On part de 1 et chaque nombre du triangle est obtenu en ajoutant le nombre qui le précède dans la même colonne et le nombre qui précède ce dernier dans la même ligne.

On y retrouve dans les colonnes et les diagonales la suite des naturels, celles des nombres triangulaires, et pyramidaux. Ce triangle sera en particulier très intéressant en combinatoire.

carrés magiques et diaboliques

Signalons ici les carrés magiques dont l'étude s'est développé depuis l'Antiquité jsuqu'à nos jours comme une sorte de culte. Ils se présentent sous forme de carrés quadrillés à n lignes et n colonnes dans les cases desquels on doit inscrire la suite des nombres de 1 à n de telle sorte que sur chaque ligne et chaque colonne la somme des nombres soit la même. Si de plus cette somme se retrouve suivant les deux diagonales, le carré magique est dit parfait.

Voici par exemple un carré magique d'ordre 3 et un d'ordre 4 :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

1	15	14	7
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

"Il existe une très riche tradition de carrés magiques, car le carré évoque, dans ses strictes limites, le sens du secret et du pouvoir occulte. Le carré magique est un moyen de capter et de mobiliser virtuellement un pouvoir, en l'enfermant dans la représentation symbolique du nom ou du chiffre de celui qui détient naturellement ce pouvoir." ((9) article "carrés)

Jusque chez les astrologues de la renaissance, les carrés magiques seront considérés comme ayant un effet en rapport avec les planètes auxquelles ils correspondent : Saturne est associé aux carrés magiques d'ordre 3, Jupiter à ceux d'ordre 4, Mars à ceux d'ordre 5, Soleil à ceux d'ordre 6, Vénus à ceux d'ordre 7, Mercure à ceux d'ordre 8 et Lune à ceux d'ordre 9...

Ainsi par exemple les carrés magiques d'ordre 4 étaient-ils réputés combattre la mélancolie (d'origine saturnienne)...

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

M. GARDNER ("Problèmes et divertissements mathématiques" t.2) parle aussi des carrés "diaboliques qui sont des carrés magiques tels que sur toute diagonale, même "brisée", on obtienne toujours la même somme.

l'amitié, la perfection, à travers les nombres

Dans l'ancienne arithmétique, on désignait par "partie aliquote d'un nombre" tout diviseur de ce nombre autre que lui-même.

A partir d'un nombre donné, on peut ainsi en associer un autre obtenu en faisant la somme des parties aliquotes du premier. Par exemple à 27 qui a pour diviseurs autres que lui-même 1, 3, 9, on associe leur somme 13 ; à 56 on associe la somme de 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, soit 64.

Ceci amènera les Hindous, les Hébreux, mais surtout les Grecs, à s'intéresser à toute une série de problèmes :

- à quelqu'un qui lui demandait ce qu'est un ami, Pythagore répondit : *"celui qui est l'autre moi-même, comme sont 220 et 284"*. C'est qu'en effet la somme des parties aliquotes de 220 est 284, celle de 284 est 220. De tels couples de nombres étaient appelés "nombres amis".

(On raconte qu'un prince du Moyen-Age dont le nom en gématrie était l'équivalent de 284 cherchait une fiancée dont le nom serait l'équivalent de 220... (1))

- les "nombres parfaits" sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes. Ces nombres sont très rares. Les deux premiers sont 6 et 28.

- les "nombres déficients" sont ceux dont la somme des parties aliquotes leur est supérieure (ils comprennent donc en particulier les nombres premiers) : 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, etc...

- les "nombres abondants" sont ceux dont la somme des parties aliquotes leur est supérieure : 12, 18, 20...

"6 et 28 sont les plus petits nombres parfaits ; les Hindous comme les Hébreux les connaissaient ; certains commentateurs de la bible considèrent 6 et 28 comme les nombres fondamentaux de l'Architecture Suprême ; ils soulignent les 6 jours de la création et les 28 jours du cycle lunaire ; d'autres vont jusqu'à expliquer l'imperfection de la seconde création par le fait que la Noé avait recueilli dans son arche 8 créatures et non pas 6.

Ecoutons ce que dit St Augustin : *"Six est un nombre parfait en lui-même, non pas parce que Dieu a créé toutes choses en six jours parce que ce nombre est parfait, et il resterait parfait même si l'oeuvre des six jours n'existait pas.""* *((1) p.* 49-50*)*

Il faut dire ici que pour aussi entachées de mysticisme qu'elles fussent, ces spéculations ont servi de base à bien des recherches mathématiques qui ont permis à l'arithmétique de se développer. Tous les problèmes ne sont d'ailleurs pas aujourd'hui résolus ; par exemple tous les nombres parfaits que l'on connaisse sont pairs, mais on ignore s'il existe des nombres parfaits impairs...

les nombres premiers

Depuis les temps les plus anciens, les nombres premiers ont excité la curiosité (on sait qu'on appelle premier tout nombre n'ayant pas d'autre diviseur que lui-même et l'unité). Curiosité là aussi liée à des croyances qui font que pour les pythagoriciens par exemple il est pratiquement la même chose de dire "treize est un nombre premier" ou "treize est un nombre néfaste"...

Diverses méthodes ont été employées pour la recherche de ces nombres dont la plus intéressante est sans doute celle du "crible" d'Eratosthène (contemporain d'Archimède) : on écrit la suite des entiers jusqu'où l'on veut, puis on barre successivement les multiples de 3, de 5, de 7, de 11, etc...

La question s'est bien vite posée de savoir si la suite des nombres premiers était limitée ou non, s'il existait un nombre premier supérieur à tous les autres. A cette question, Euclide montrera qu'il faut répondre par la négative.

Un autre problème fut de rechercher comment étaient répartis les nombres premiers, quelle était en quelque sorte leur "densité" dans la suite des naturels. Beaucoup de recherches ont donné quelques éléments de réponse à ce problème qui n'est pas encore complètement éclairci. Par exemple, le mathématicien allemand Landau montra au XIX° qu'entre un nombre quelconque et son double il existe toujours au moins un nombre premier...

Comment reconnaître si un nombre est premier ? Le crible d'Eratosthène commode pour de petits nombres devient vite inutilisable pour de grands nombres. On a donc cherché des formules générales représentant les nombres premiers ou tout au moins permettant d'en construire à volonté. Mais outre qu'on n'ait jamais trouvé de formule générale pour tous les nombres premiers, beaucoup de formules se sont révélées inexactes ; par exemple, on a cru un moment que l'expression $n^2 - n + 41$ désignait toujours un nombre premier, pour toute valeur de n, alors que...

"tous les nombres"...

Il n'est pas question de faire état ici de toutes les recherches sur les nombres naturels. Depuis longtemps, elles se sont développées dans de nombreuses directions, se libérant peu à peu des références mystiques.

Nous ne parlerons pas non plus des extensions successives de la notion de nombre, depuis les nombres négatifs et les rationnels jusqu'aux complexes...

Mais il est un problème important que se posa assez tôt et dont il nous faut parler : c'est celui du caractère illimité de la suite des nombres. D'où vient cette conviction qu'il n'existe pas de dernier nombre ? Certainement pas de l'expérience qui nous montre au contraire que tout ce que nous pouvons connaître est fini et que toute tentative pour aller au-delà du fini serait arrêtés par notre propre fin.

S'agit-il d'une vérité surnaturelle, existant en-dehors de nous, comme semblent le penser les religions anciennes pour lesquelles il y aurait un dernier nombre mais qui ne serait accessible qu'aux dieux ?

N'est-elle pas plutôt un produit du cerveau humain qui, constatant son impuissance à épuiser tous les nombres conclut à l'impossibilité de cet épuisement ?

Quoi qu'il en soit, dès lors qu'il est admis qu'il n'y a pas de dernier nombre, se pose le problème de la validité des démonstrations concernant "tous les nombres" : comment peut-on parler de "propriétés de tous les nombres" alors qu'une vérification sur chaque nombre est impossible ?

On pourrait bien sûr vérifier une propriété pour quelques nombres et en conclure qu'elle a une valeur générale. Mais le procédé dit "d'induction" ne convient pas en mathématiques et l'histoire l'a montré à de nombreuses reprises. FERMAT par exemple avait cru trouver une formule générale ne donnant que des nombres premiers : $2^{2^n} + 1$, sans réussir toutefois à en établir la démonstration. Comme FERMAT, on peut vérifier sans trop de difficultés que ceci est vrai pour les valeurs de n de 0 à 4. Mais cent ans après, EULER montra que pour n=5 on obtient un nombre divisible par 641...

Il n'est donc pas possible de se fier à la seule méthode inductive qui peut facilement induire en erreur. On a donc cherché des procédés de démonstration indépendants de toute démarche inductive, mais aussi à savoir dans quels cas l'induction pouvait être légitimée. C'est ainsi qu'est apparu ce qu'on a appelé le "principe d'induction mathématique". Ce principe affirme que :

. Si une propriété est vraie pour le nombre 1

. Si, lorsque cette même propriété est vraie pour un entier elle est vraie pour son suivant.

alors elle est vraie pour tout entier.

Intuitivement, nous voyons bien qu'alors, puisque la propriété est vraie pour 1, elle l'est aussi pour 2, que étant vraie pour 2, elle l'est aussi pour 3 et ainsi de suite... si bien qu'elle doit être vraie pour tout entier.

On appelle généralement "raisonnement par récurrence" tout raisonnement s'appuyant sur ce principe. Il semble qu'on le trouve étudié pour la première fois au XVI° siècle dans un ouvrage de Francesco Maurolico, et Pascal l'a particulièrement mis en valeur.

Mais quelle est la valeur de ce raisonnement ? Ecoutons H. POINCARE :

"Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte, dès que cet acte est une fois possible...
On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction appliquée aux sciences physiques est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même...

Nous ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. Sans l'aide de cette induction différente à certains égards de l'induction physique, mais féconde comme elle, la déduction serait impuissante à créer la science".

(cité dans (1) p. 77-78)

Mais comment justifier mathématiquement ce raisonnement autrement qu'en le considérant comme "l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même" ? Ce problème ne manquera pas de surgir lorsque se posera le suivant : "mathématiquement, qu'est-ce qu'un nombre ?" ; et que ce soit dans le cadre de l'axiomatique de PEANO ou celui de la théorie des ensembles, on cherchera à donner au principe de récurrence une valeur de vérité mathématique, démontrable dans le cadre qu'on se sera fixé.

- 3ème partie -

LE NOMBRE NATUREL ET LES MATHEMATICIENS

I - COMMENT S'EST POSE LE PROBLEME JUSQU'AU XIXème SIECLE ?

La confiance en l'intuition pour déterminer les fondements des mathématiques

Jusqu'au XIX° siècle, les domaines d'étude des mathématiciens ont été les "nombres", les "grandeurs" et les "figures". Ces "objets" considérés comme définis par la nature, le travail du mathématicien consistait à explorer ces différents domaines et à en découvrir des propriétés. Ferdinant HOEFER, dans son "Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du XIX° siècle" (1895), écrit :

"Tout homme, naturellement curieux et méditatif, qui regarde tout à tour le ciel et la terre, peut arriver, de déduction en déduction aux résultats les plus merveilleux".

Ainsi, en arithmétique, l'addition, la soustraction et la multiplication sur les nombres entiers avaient été inventées pour répondre aux besoins de la vie courante ; puis on s'était attaché à mieux connaître ces nombres, à trouver des lois, à mettre en évidence des séries de nombres particuliers :

- les nombres pairs : 2, 4, 6, 8, ... etc
- les nombres impairs : 1, 3, 5, 7, ... etc
- les nombres triangulaires : 0, 1, 3, 6, 10, 15, ...

On avait cherché à découvrir des formules, à améliorer les numérations et les techniques opératoires, à résoudre des équations de plus en plus complexes.

Mais personne, jusqu'au XIX° siècle, ne s'était préoccupé de définir le nombre naturel autrement que par le recours à l'intuition. Cela suffisait pour les besoins mathématiques de l'époque.

ébranlée par certains résultats de géométrie

Cependant, vers 1850 certains travaux viennent ébranler la confiance des mathématiciens dans la justesse de leurs résultats.

Tout d'abord en <u>géométrie</u>. Jusqu'alors les mathématiciens explorant le monde physique et essayant d'en découvrir les lois avaient été amenés à construire une géométrie dont les axiomes paraissaient "évidents" au sens de "correspondant à la réalité sentie et expérimentée". Cette géométrie, la géométrie euclidienne, était la seule possible et il n'était pas question de la remettre en cause. Or, des mathématiciens (BOLYAI, RIEMANN, LOBATCHEVSKY...) ont l'idée de changer l'un des axiomes (le "postulat d'Euclide" (1)) et s'aperçoivent ainsi que l'on peut construire d'autres systèmes cohérents. Ces géométries non euclidiennes sont cependant perçues comme un jeu gratuit sans rapport avec la réalité.

Mais on constate, à la fin du XIX° siècle, que ces systèmes peuvent rendre compte de certains phénomènes physiques (les espaces riemanniens sont utilisés dans les théories actuelles de l'interprétation de l'univers). Alors s'il est admis que l'on peut décrire l'espace physique avec plusieurs géométries en partie contradictoires, où est la vérité géométrique ?

d'arithmétique

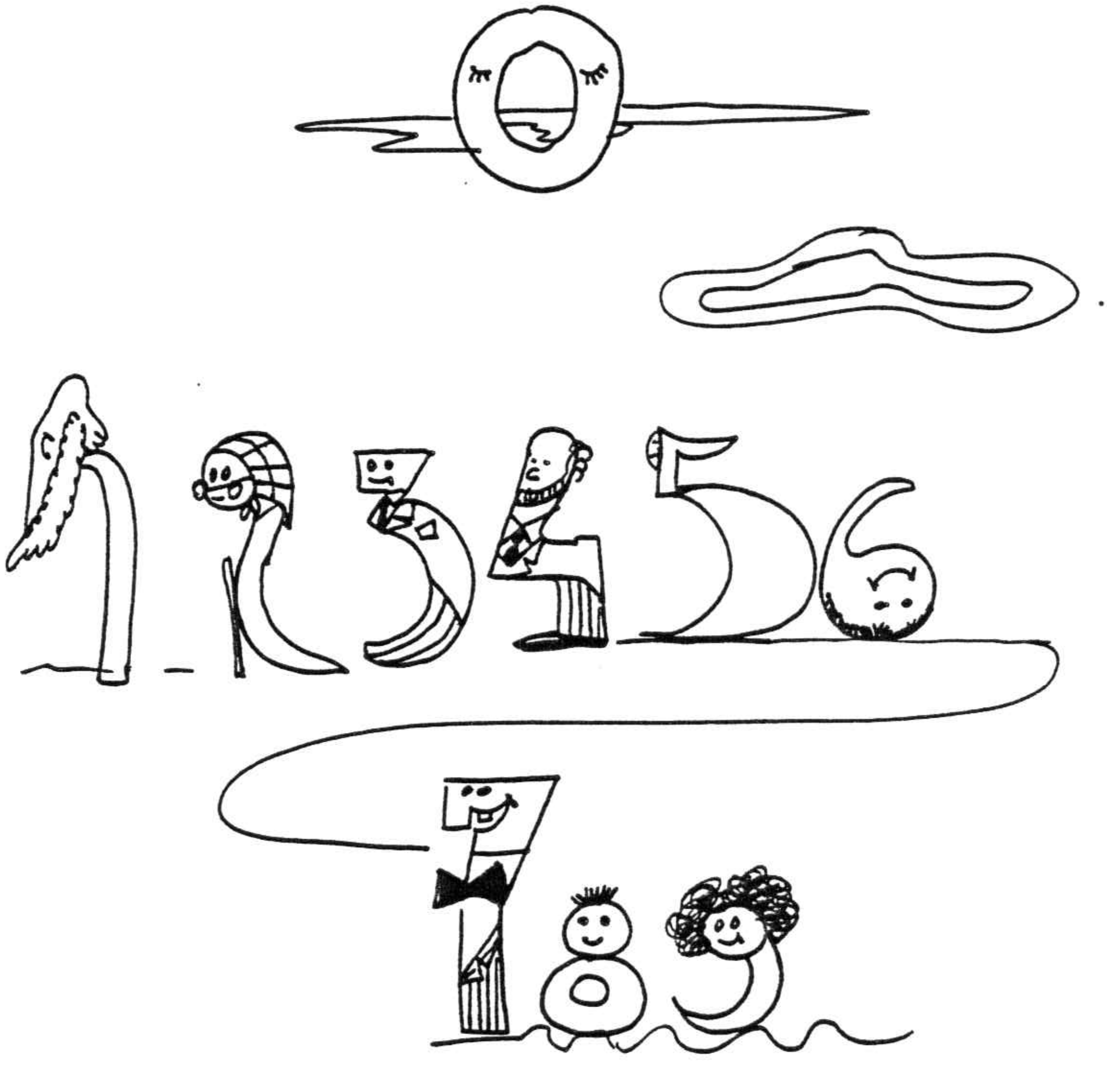
En <u>arithmétique</u> aussi, de nombreuses questions sont encore en suspens. En particulier, quel lien y a-t-il entre les nombres naturels et d'autres catégories de nombres que l'on utilise ?

Prenons l'exemple des nombres négatifs ; ils sont utilisés depuis déjà longtemps ; les calculateurs hindous s'en servaient dans leurs équations, les interprétant en termes de biens et de dettes. Depuis DESCARTES, ils sont systématiquement employés dans les calculs et au XIX° siècle, on sait les utiliser en géométrie. Nés artificiellement par commodité dans les calculs et interprétables dans certaines situations, ces nombres ne sont cependant pas "naturels" au sens où le sont les autres. Dès lors, quel sens mathématique leur donner ?

Prenons encore l'exemple des <u>nombres complexes</u> : CARDAN en 1545, puis BOMBELLI en 1560 cherchant à résoudre des équations du 3ème degré, eurent l'idée d'utiliser dans leurs calculs les racines carrées apparemment inexistantes des nombres négatifs. On s'aperçut alors qu'on pouvait comme pour les nombres définir des opérations sur ces expressions. On les appela alors des nombres, que DESCARTES qualifia d'imaginaires. Au milieu du XVIII°, la théorie élémentaire des nombres complexes était bien établie et son intérêt était

---

(1) <u>Postulat d'Euclide</u> : Par un point extérieur à une droite, il passe une seule parallèle à cette droite.


0
123456
789

évident. Mais certains hésitaient encore à leur attribuer une existence formelle et les mathématiciens commençaient à éprouver le besoin de leur donner une interprétation mathématique cohérente.

a devoir faire lace à une rande rigueur.

Au début du XIX° siècle, tout ce qui repose sur l'arithmétique est encore dépourvu de fondement logique et les mathématiciens sont ainsi amenés à donner aux différentes disciplines : arithmétique, géométrie, algèbre... des bases axiomatiques et à introduire plus de rigueur dans les démonstrations.

II - VERS L'AXIOMATISATION : UNE CONCEPTION PLUS PRECISE DU NOMBRE

es entiers apparais-ent alors omme la base es mathémati-ues

Cet effort d'organisation permet à WEIERSTRASS d'obtenir un modèle des nombres entiers négatifs et un modèle des nombres rationnels positifs en considérant des classes de couples d'entiers naturels. En utilisant une méthode analogue on peut faire une construction mathématique des nombres complexes. Vers 1870, à peu près simultanément, CANTOR, DEDEKIND, MERAY et WEIERSTRASS réussissent à trouver un modèle pour les nombres réels à partir des nombres rationnels, les faisant ainsi reposer sur les nombres entiers. La géométrie analytique ayant permis d'interpréter la géométrie classique en termes de nombres, l'arithmétique et les nombres entiers naturels deviennent à la fin du siècle dernier le fondement de toutes les mathématiques classiques.

t le recours à a méthode xiomatique

La méthode axiomatique avait fait son apparition au début du siècle dans différentes branches des mathématiques. Elle consiste à ne pas définir les objets sur lesquels on travaille par le recours à l'intuition qu'on en a, mais par des propriétés que l'on pose à priori (les axiomes) en utilisant un minimum de mots non définis (les termes premiers) et à partir desquels on construit une théorie. Bien entendu, on ne choisit pas les propriétés n'importe comment et on s'arrange pour qu'elles traduisent l'idée qu'on en a par l'intuition, le problème étant que les axiomes doivent constituer un système cohérent (non contradictoire) à partir duquel on pourra effectivement construire une théorie.

C'est ainsi que l'on commence à se préoccuper des fondements de l'arithmétique et à essayer de se détacher du recours à l'intuition. LEIBNITZ avait fait remarquer que des vérités aussi "évidentes" que 2 + 2 = 4 devaient être susceptibles de démonstrations en fonction des définitions que l'on donne aux nombres. Mais il n'était pas allé plus loin et au milieu du XIX° siècle, les nombres entiers paraissent toujours aussi naturels, les opérations sur ces entiers et leurs propriétés, telles que commutativité et associativité de l'addition, de la multiplication semblent aller de soi et ne pas avoir besoin d'être définies.

En 1861, GRASSMANN donne une définition de l'addition et de la multiplication et démontre leurs propriétés fondamentales en utilisant le principe de succession des nombres et le principe de récurrence.

va permettre de leur donner une base plus solide,

En 1888, DEDEKIND énonce un système complet d'axiomes pour définir les nombres, système reproduit 3 ans plus tard par PEANO et connu ordinairement sous ce nom. Il utilise 3 termes premiers : "0", "nombre", "successeur" et 5 axiomes que RUSSEL énonce dans "Introduction à la philosophie mathématique" (1961) de la façon suivante :

"1- 0 est un nombre.
2- Le successeur d'un nombre est un nombre.
3- Deux nombres ne peuvent avoir le même successeur.
4- 0 n'est le successeur d'aucun nombre.
5- Toute propriété qui appartient à 0, ainsi qu'au successeur d'un nombre qui possède cette propriété, appartient à tous les nombres."

(Page 16)

Sur cet axiome 5 se fonde le principe de récurrence.

Ainsi on appelle 1 le successeur de 0, 2 le successeur de 1... L'addition et la multiplication et toutes les propriétés élémentaires de l'arithmétique peuvent être déduites de ces 5 axiomes. (cf annexe I).

Ces 5 axiomes caractérisent les nombres entiers. Mais les définissent-ils ? non, car il est facile de voir que l'ensemble des nombres pairs vérifie aussi ces 5 axiomes. En effet, on peut poser :

0 a pour successeur 2
2 a pour successeur 4
4 a pour successeur 6.
....

le successeur d'un nombre étant obtenu en ajoutant 2, la série des nombres est alors 0, 2, 4, 6, 8, 10... Les 5 propositions de PEANO sont satisfaites. Ce système d'axiomes ne caractérise donc pas un ensemble unique et il ne peut suffire à définir l'ensemble des nombres entiers.

ıssitôt remise
ı question

Au moment même où ces axiomes étaient formulés clairement, pour beaucoup de mathématiciens (à commencer par DEDEKIND et PEANO eux-mêmes) la réponse à la question "Qu'est-ce qu'un nombre naturel ?" était à chercher ailleurs, dans la dernière venue des théories mathématiques : la théorie des ensembles.

Comment s'est construite cette nouvelle théorie et comment à travers elle a-t-on formulé le problème du nombre, c'est ce que nous allons essayer de voir maintenant. Pour cela, il nous faut revenir à un problème plus ancien qui a profondémment motivé la construction de cette nouvelle théorie, le problème de l'infini.

III - LE PROBLEME DE L'INFINI

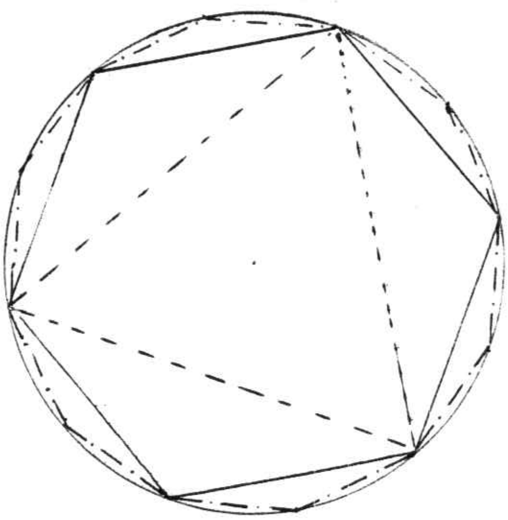
Sur le plan philosophique, l'idée d'infini était apparue essentiellement sous deux aspects :

- d'une part comme caractérisant un être aux propriétés particulières ; et traditionnellement l'infini caractérise "l'être tel qu'on n'en saurait concevoir de plus grand". C'est un attribut dont les théologiens diront qu'il ne peut appartenir qu'à Dieu.

- d'autre part liée à la possibilité de poursuivre un certain processus opératoire, sans limitation ; c'est à partir de ce point de vue que Zénon d'Elée développera ses fameux paradoxes, comme par exemple celui d'Achille et la tortue : si la tortue est devant Achille, celui-ci ne pourra jamais la rejoindre en effet, il devra toujours arriver d'abord au point d'où la tortue vient de partir, en sorte que celle-ci sera toujours plus ou moins en avance...

La notion d'"infini mathématique" restera longtemps marquée par ces conceptions et ce n'est qu'avec CANTOR qu'elle acquerra pleinement son autonomie ; souvent d'ailleurs, jusqu'au XIX° siècle, les mêmes hommes étaient à la fois philosophes et mathématiciens.

Chez les mathématiciens grecs, on ne trouve pas un concept vraiment élaboré de l'infini, mais plutôt une conception purement opératoire, n'ayant d'autre objet que de pouvoir rendre compte des opérations que les mathématiciens pratiquent. Il y a utilisation de procédés infinistes, mais l'infini ne fait pas partie en tant que tel du champ des objets mathématiques.



Prenons un exemple : afin de déterminer une valeur approchée de π , Archimède pense à évaluer la longueur d'un cercle de diamètre unité (donc de périmètre π) de la façon suivante on inscrit un triangle équilatéral, puis un hexagone, puis un dodécagone etc... Chaque fois on construit un polygone obtenu en doublant le nombre de côtés du polygone précédent ; et Archimède admet implicitement la possibilité de poursuivre le processus toujours plus loin. Les différents polygones obtenus se rapprocheront peu à peu du cercle sans jamais s'identifier à lui et leurs périmètres apparaissent comme des approximations de plus en plus fines du périmètre du cercle.

Ce procédé ingénieux ne résolvait pas la totalité du problème car il restait à obtenir des approximations satisfaisantes des périmètres des polygones, dont les mesures sont des nombres irrationnels.

Un pas sera franchi à l'époque classique dans la maîtrise des processus infinistes, avec l'apparition du "calcul infinitésimal", développé notamment par LEIBNIZ, et de la notion de "passage à la limité".

Prenons l'exemple de la suite des nombres de la forme 1/n (n étant un naturel)

1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 etc...

cette suite est illimitée ; pourtant on se rend compte facilement que plus on "avance" dans la suite et plus on se rapproche de 0. On ne l'atteindra jamais, mais on pourra toujours s'en approcher d'aussi près qu'on voudra.

La rupture nouvelle consistera à faire "comme si" l'infinité était atteinte, et à considérer non seulement que les termes de la suite donnent des valeurs de plus en plus approchées de 0, mais que 0 est lui-même obtenu au bout du compte ; et on dira que 0 "est" la "limite" de la suite des termes de la forme 1/n lorsque "n croît vers l'infini".

En ce sens, l'infini est alors rendu pratiquement accessible à l'esprit qui l'a ainsi enfermé dans ses limites.

Mais si les processus qui se répètent indéfiniment (ce qu'on a appelé "l'infini potentiel") sont ainsi domestiqués avec le développement du calcul infinitésimal, il reste que l'infini considéré comme quantité prise globalement (ce qu'on a appelé "l'infini actuel") pose encore bien des problèmes.

Comment parler par exemple de l'ensemble des points d'une droite ou encore de l'ensemble des nombres ? Cela signifierait que l'esprit est capable de concevoir simultanément l'existence d'une infinité d'objets. On s'est d'ailleurs rendu compte depuis longtemps que les raisonnements sur les quantités finies ne peuvent pas s'appliquer aux quantités infinies, sous peine de conduire à des paradoxes (cf. plus bas Galilée).

C'est pourquoi la plupart des mathématiciens ont depuis longtemps adopté une attitude prudente devant l'infini :

"Les mathématiciens classiques évitaient soigneusement d'introduire dans leurs raisonnements "l'infini actuel" (c'est-à-dire des ensembles comportant une infinité d'objets conçus comme existant simultanément, au moins dans la pensée), et se contentaient de l'"infini potentiel", c'est-à-dire de la possibilité d'augmenter sans fin toute grandeur donnée.""
(...)

"Classiquement, on a le droit de dire qu'un point appartient à une droite, mais tirer de là, la conclusion qu'une droite est "composée de points" serait violer le tabou de l'infini actuel. C'est vraisemblablement pour échapper à toute objection de ce genre qu'au XIX° siècle, beaucoup de mathématiciens évitent de parler d'ensembles et raisonnent systématiquement "en compréhension". Si ce point de vue comportait une certaine dose d'hypocrisie, il permettait toutefois de développer la plus grande partie de la mathématique classique..."

(cf 12 p.40)

IV - CANTOR ET LA THEORIE DES ENSEMBLES

CANTOR va tenter d'élucider le problème de l'infini actuel

Un mathématicien allemand, CANTOR, va jouer un rôle déterminant dans l'élucidation des problèmes liés à l'infini. Déjà depuis longtemps les notions d'ensemble et d'appartenance étaient couramment utilisées mais aucune théorie n'avait pu s'édifier à partir de là, du fait de cette catégorie d'ensembles que l'on s'interdisait d'utiliser : les ensembles infinis. CANTOR en éclaircissant cette notion d'ensemble infini, permet la construction d'une véritable théorie des ensembles.

en établissant une classification des ensembles infinis.

Au cours de ses recherches sur la définition des nombres réels il avait été amené à différencier ce qu'on pourrait appeler les "pluralités" des ensembles infinis en établissant des classifications. Ces classifications, il a essayé de les réaliser à partir d'un outil mathématique correspondant à la technique de l'appariement : la notion de bijection

Idée qui n'était d'ailleurs pas nouvelle,

L'idée d'appliquer la technique de l'appariement aux ensembles infinis n'était pas nouvelle. Déjà au XVII° siècle, GALILEE remarquait qu'on peut établir une correspondance bijective entre les nombres entiers et leurs carrés et que donc l'axiome "le tout est plus grand que la partie" ne peut s'appliquer aux ensembles infinis. "*Nous pouvons seulement conclure que le nombre de carrés est infini et le nombre de leurs racines infini ; le nombre des carrés n'est pas inférieur à la totalité des nombres et ce dernier total n'est pas supérieur non plus au premier, en fin de compte, les termes "égal", "plus grand", "moindre", ne sont pas applicables à l'infini, mais seulement aux quantités finies*" (cité dans (1) p.210). Mais personne ne parut s'intéresser à ces réflexions de GALILEE pour les pousser plus loin.

> "*Bien d'autres exemples, qui reviennent tous à dire qu'un ensemble fini peut être mis en bijection avec un sous-ensemble propre, semblaient nier la possibilité d'un concept de l'infini, car on voulait à priori que ce concept fût celui d'un unique infini*" (cf 11 p.202).

En 1820, BOLZANO publie un petit traité "des paradoxes de l'infini" passé à peu près inaperçu et dans lequel il n'hésite pas à revendiquer le droit à l'existence pour "l'infini actuel et à parler d'ensembles arbitraires. Il définit, dans ce travail, la notion générale d'équipotence (note 1) de deux

(1) Deux ensembles sont équipotents s'il existe une bijection de l'un vers l'autre.

ensembles, et démontre que deux intervalles dans l'ensemble des nombres réels sont équipotents ; il observe aussi que la différence caractéristique entre ensembles finis et ensembles infinis consiste en ce qu'un ensemble infini E est équipotent à un sous-ensemble distinct de E, mais il ne donne aucune démonstration convaincante de cette assertion (note 2).

ıis que CANTOR :ploite à fond partir des ısembles de ımbres.

CANTOR, quant à lui, reprend le problème en cherchant à différencier les classes d'équipotence d'ensembles connus, particulièrement les ensembles de nombres. En 1873, il remarque que l'ensemble des nombres rationnels est équipotent à l'ensemble des nombres entiers. Il se pose alors le problème de l'équipotence entre nombres entiers et nombres réels qu'il résoud par la négative. A partir de 1874, il cherche en vain pendant 3 ans à établir l'impossibilité d'une correspondance bijective entre R et R^n (ou si l'on veut, entre les points d'une droite et les points d'une surface, d'un volume.)

Puis à sa propre stupéfaction (il écrit à DEDEKIND : *"Je le vois, mais je ne le crois pas..."*) (cité dans (1). il réussit à définir une telle correspondance.

Nous n'indiquerons pas la démonstration générale de ce résultat, mais en 1878, CANTOR publia une démonstration très courte de l'équipotence de $]0, 1] \times]0, 1]$ et $]0, 1]$ (ou, si l'on veut d'un carré et d'un segment de droite), démonstration que nous allons tenter d'expliquer brièvement.

Il faut savoir, pour la comprendre, que tout nombre réel peut s'écrire sous forme d'une suite décimale illimitée (ce caractère illimité étant indiqué par des pointillés à la suite des derniers chiffres que l'on écrit). Par exemple:

$1/3 = 0,33333\underline{3}...$ (le dernier 3 étant souligné pour indiquer que ce chiffre se répète indéfiniment)

$22/7 = 3,\ 142857\underline{142857}...$ (ici, c'est le groupe de chiffres 142857 qui se répète indéfiniment)

$\pi = 3,\ 14159265358979322384626433832795...$ (cette fois, il n'y a pas de groupe de chiffres qui se répète régulièrement ; les méthodes modernes de calcul ont permis de trouver un très grand nombre décimales : les 5 premières suffisent pour le type d'approximation dont on a besoin dans la plupart des calculs de précision)

$\sqrt{2} = 1,\ 41421356237035...$ (là non plus, il n'y a pas de régularité dans l'apparition des chiffres).

(2) On peut prendre un exemple : l'ensemble des nombres pairs est un sous-ensemble de l'ensemble des nombres entiers N, distinct de N et il existe une bijection entre ces deux ensembles.

Un nombre décimal, lui, peut s'écrire de deux façons sous forme de suite illimitée : soit en rajoutant indéfiniment des zéros, soit avec une suite indéfinie de 9 :

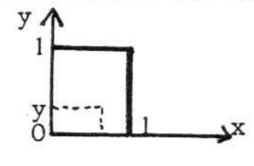
$$27{,}6742 = 27,\ 67420000\underline{0}\ldots \quad = 27,\ 67419999\underline{9}\ldots$$

$$1 = 1,\ 00000\underline{0}\ldots \quad = 0,\ 999999\underline{9}\ldots$$

Par contre, à toute suite décimale illimitée correspond un nombre réel et un seul.

Précisons enfin que les écritures illimitées dans lesquelles un groupe de chiffres se répète régulièrement sont celles de nombres rationnels, c'est-à-dire de nombres pouvant aussi s'écrire comme quotiants de deux entiers ; on trouve facilement cette écriture en utilisant la technique de la division ; pour les nombres qui ne sont pas rationnels, il faut recourir à d'autres procédés).

Revenons alors à la démonstration de CANTOR. On peut représenter $]0, 1] \times]0, 1]$ par un carré (intérieur compris) comme ci-dessous (la partie située sur chacun des axes étant éliminés)



Tout point de ce carré peut être représenté par un couple de nombres réels (x, y)
avec : $0 < x \leqslant 1$
et $0 < y \leqslant 1$

De même, on peut représenter $]0, 1]$ par un segment (extrémité 0 non comprise) sur un axe Oz. Et à tout point de ce segment on peut faire correspondre un nombre z tel que $0 < z \leqslant 1$

Cantor établit une bijection de la façon suivante :

Soit un point du carré que nous désignons par un couple (x, y). x et y peuvent s'écrire sous forme de suites décimales illimitées ; pour que ces écritures soient uniques, nous prendrons la convention de n'utiliser que la suite où se répètent indéfiniment des 9 dans le cas de nombres décimaux.

On range alors les décimales par groupes, chaque groupe se terminant dès qu'apparaît un chiffre différent de 0.

Par exemple si $x = 0,\ 830177009820000 1426\ldots$
et $y = 0,\ 8749 = 0,\ 8748999999\underline{9}\ldots$

on écrit pour x : 8 - 3 - 01 - 7 - 7 - 009 - _ - 2 - 00001 - 4 - 2 - 6 -...
pour y : 8 - 7 - 4 - 8 - 9 - 9 - 9 - 9 - 9 - 9 -...

On forme alors z en écrivant 0, la virgule, puis le premier groupe de x, puis le premier groupe de y, puis le second groupe de x, puis le second groupe de y, puis le troisième groupe de x, et ainsi de suite...

Dans l'exemple précédent, à (x, y) on fait ainsi correspondre :

z = 0, 883701478790099892900001949...

Prenons un autre exemple

Si (x, y) = (1/33 , 7/9)

1/33 = 0, 03030303... et l'on écrit 03 - 03 - 03 - 03...

7/9 = 0, 777777... et l'on écrit 7 - 7 - 7 - 7 -...

on fait alors correspondre z = 0, 037037037037... = 1/27

On pourra vérifier que cette correspondance ainsi définie est bien bijective, qu'à tout couple (x, y) de]0, 1] ×]0, 1] elle associe un nombre z unique de]0, 1] et réciproquement.

Dans (1) p. , T. DANTZIG rapporte cette démonstration de la façon erronnée suivante :

On forme z en écrivant après le 0 et la virgule la première décimale de x, puis la première décimale de y, puis la seconde de x, etc...

Dans le premier exemple on obtient : z = 0, 883704187979090989...

Dans le second on obtient : z = 0, 073707370737... = 67/909

(En fait, T. DANTZIG prend la convention d'écrire tout nombre décimal avec une suite illimitée de 0. Malgré cela la correspondance telle qu'il la définit n'est pas bijective ; nous laissons aux lecteurs le soin de rechercher pourquoi).

Du coup, CANTOR se consacre entièrement à la théorie des ensembles à l'intérieur de laquelle il formule de façon claire la notion d'équipotence et pour la première fois traite l'infini comme une entité mathématique bien définie. Dans un ouvrage paru en 1883, il écrira :

> *"Il est de tradition de considérer l'infini comme ce qui croît indéfiniment. Par contre, je conçois l'infini sous la forme définie de quelque chose de consommé, quelque chose capable non seulement d'être formulé mathématiquement, mais d'être défini par un nombre. Cette conception de l'infini est opposée aux traditions qui m'ont longtemps été chères, et c'est bien contre ma propre volonté que j'ai été obligé d'accepter ce point de vue. Mais de nombreuses années de réflexions et d'études scientifiques me conduisent à ces conclusions comme à une nécessité logique : c'est pourquoi je suis certain qu'on ne pourra pas soulever d'objections valables que je ne sois en mesure de réfuter".*
>
> (cité dans (1) p. 211)

En créant la théorie des ensembles, CANTOR avait ouvert la voie ; les notions de cardinal, d'ordinal, d'entier naturel allaient pouvoir être définies à partir d'une base qui paraissait solide.

V - LES CARDINAUX ET LES ENTIERS NATURELS

"Si deux ensembles bien définies M et N se laissent coordonner l'un à l'autre, élément par élément, de façon univoque et complète, je me sers de l'expression... qu'ils ont égale puissance ou qu'ils sont équivalents"

(cité dans 11 p.206)

Ayant ainsi repris l'idée d'équipotence formulée par BOLZANO, CANTOR essaie d'associer à chaque ensemble "quelque chose" qu'il appelle cardinal de l'ensemble, ceci de telle façon que deux ensembles de "même puissance" aient même cardinal. Ainsi l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ont même puissance (cf dans le paragraphe suivant la démonstration faite par CANTOR). Le cardinal qui leur est associé est le même ; on le désigne généralement par χ_0 ("aleph zéro"). Autre exemple : si deux ensembles finis ont même puissance, ils ont même cardinal ; ce cardinal est leur nombre d'éléments. Pour des ensembles finis la notion de cardinal vient donc coïncider avec celle de "nombre d'éléments" et c'est pourquoi CANTOR définira sur les cardinaux des opérations qui prolongent celles utilisées sur les entiers naturels.

FREGE, qui avait suivi avec intérêt ces travaux essaie de préciser la notion de cardinal et formule les choses, en gros, de la façon suivante :

"M étant un ensemble quelconque, le cardinal de M est l'ensemble de tous les ensembles équipotents à M. Puis, m étant un cardinal, il définit la fonction $\varphi(a) = a + 1$ et appelle entier naturel tout cardinal qui peut être obtenu à partir de 0 à l'aide de la fontion φ. Malheureusement, cette construction se révèle défectueuse, l'ensemble C de tous les cardinaux ou l'ensemble des ensembles équipotents à un ensemble M étant "paradoxaux"."

(cf (12) p.45) (cf paragraphe VII ci-dessous)

Ainsi, à partir des années 1900, les classes d'équipotences ne pouvant être considérées sans contradiction comme des ensembles, on est amené à modifier ces définitions : le cardinal d'un ensemble M est un ensemble particulier de la classe d'équipotence de M. Cela pose le problème du choix de cet ensemble particulier, problème qui ne sera résolu que par le recours à une méthode axiomatique. (cf annexe III p. 148)

C'est la démarche de l'appariement officialisée ainsi que le choix d'une collection type (bourse de pierre pour le berger...)

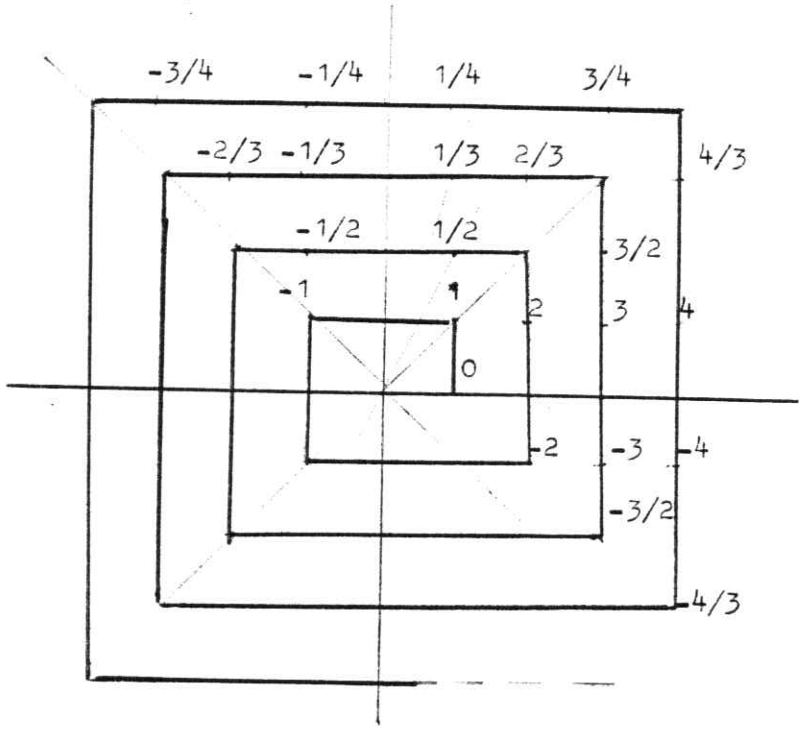
Signalons ici, que CANTOR s'attache par la suite à essayer de démontrer ce qu'on appelle "l'hypothèse du continu" et que l'on peut énoncer ainsi : il n'existe pas de cardinal compris entre le cardinal de l'ensemble des nombres entiers et le cardinal de l'ensemble des nombres réels. Pendant longtemps, des mathématiciens chercheront en vain à démontrer l'hypothèse du continu. Ce n'est qu'en 1963 que l'américain COHEN démontrera que cette hypothèse est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles et qu'on peut la considérer comme vraie ou fausse, sans que cela ne change rien pour les résultats mathématiques actuels.

VI - LES ORDINAUX ET LES ENTIERS NATURELS

Malgré l'intérêt porté aux travaux de CANTOR par des mathématiciens tels que FREGE ou DEDEKIND ou WEIERSTRASS, de nombreux autres tels que SCHWARTZ ou KRONECKER... manifestèrent une opposition irréductible à ces nouvelles idées. Cette opposition engendra chez CANTOR une tension importante qui, ajoutée à ses efforts infructueux pour démontrer l'hypothèse du continu, amena un net ralentissement de sa production mathématique. Néanmoins, il reprit intérêt à la théorie des ensembles et dans ses dernières publications datant des années 1895-1897, il s'intéresse surtout à la théorie des ensembles totalement ordonnés et au calcul des ordinaux.

Comment les problèmes d'ordre surgissent-ils ? Lorsque CANTOR est à la recherche de démonstrations de l'équipotence de deux ensembles, il lui faut montrer qu'il existe une bijection entre ces deux ensembles. Le meilleur moyen de montrer qu'il en existe une est d'en trouver une. C'est ainsi par exemple, qu'il montre que l'ensemble des entiers naturels est équipotent à l'ensemble des nombres rationnels en trouvant une bijection entre ces deux ensembles.

Pour montrer l'existence d'une telle bijection, CANTOR en construit une ; il cherche à associer à chaque entier naturel un rationnel unique. Cette association ne peut pas, dans la pratique, se faire globalement. Il faut prendre chaque entier l'un après l'autre en cherchant quel rationnel on peut lui faire correspondre. Pour être sûr de n'oublier aucun naturel, le plus simple est de les prendre chacun leur tour dans l'ordre usuel : 0, 1, 2, 3,... Le problème, pour pouvoir établir la correspondance revient alors à trouver



un ordre des rationnels "analogue" à l'ordre des naturels, c'est-à-dire tel que l'on puisse déterminer sans ambiguité et de façon unique le successeur d'un rationnel donné. L'ordre usuel des rationnels ne convient pas : on sait, en effet, qu'entre deux rationnels distincts, il en existe une infinité d'autres (entre 1/4 et 1/5 on trouve 33/160, 17/80, 35/160, 9/40...)

CANTOR a donc été amené à trouver un autre ordre d'écriture des rationnels que l'on peut représenter de la façon suivante :

tout nombre rationnel est de la forme p/q, p et q étant des entiers naturels premiers entre eux avec $q \neq 0$. Il est donc possible de représenter tous les rationnels dans un plan muni d'un système de coordonnées : le rationnel p/q sera représenté par le point de coordonnées p et q. (cf fig).

De cette façon, il y a plus de points représentés que de nombres rationnels. (En effet, les points (1, 2) ; (2, 4) ; (3, 6) ;... représentent le même nombre). Pour avoir exactement les nombres rationnels, on peut procéder de la façon suivante : à partir d'une droite passant par l'origine on ne conserve qu'un point, tous les autres représentant le même nombre rationnel.

Cette fois on a représenté une fois et une seule chaque rationnel. Reste à établir l'équipotence avec l'ensemble des naturels : il suffit de prendre les rationnels dans l'ordre d'apparition sur la ligne tracée en gras (0, 1, -1, -2, 2, 1/2...) et d'affecter à chaque rationnel le numéro d'ordre dans lequel on le rencontre. On obtient ainsi la correspondance

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & \\ 0 & 1 & -1 & -2 & +2 & +1/2 & -1/2 & -3/2 & -3 & +3 & \dots \end{array}$$

Cette correspondance définit une bijection entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres rationnels qui sont donc équipotents.

En ayant construit cette bijection, CANTOR a ordonné les nombres rationnels de façon inhabituelle.

C'est ainsi qu'on est amené à s'intéresser à des <u>bijections</u> très particulières : <u>celles qu'on peut construire sur des ensembles ordonnés et qui "respectent" cet ordre</u>.

Prenons par exemple, $N = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$ et l'ensemble des nombres pairs $P = \{0, 2, 4, 6...\}$ ordonnés par la relation habituelle $x \leqslant y$. Puis considérons la bijection f de N vers P définie par : $x \longrightarrow f(x) = 2x$:

dans N on a $2 \leqslant 7$ dans P on a $f(2) = 4 \leqslant f(7) = 14$

$8 \leq 10$ $f(8) = 16 \leq f(10) = 20$

...

Si dans $\mathbb{N}$ on a $x \leqslant y$ alors dans $\mathbb{P}$ on a $f(x) \leqslant f(y)$ on dit alors que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}$ munis de l'ordre habituel ont "même type d'ordre".

Plus généralement, si E et F sont deux ensembles ordonnés, si f est une bijection de E vers F telle que $x < y$ est équivalent à $f(x) < f(y)$, on dit que E et F ont "même type d'ordre" ou encore que E et F ont même ordinal (f est un isomorphisme pour l'ordre).

Avec la notion d'équipotence on a défini le cardinal d'un ensemble, avec la notion de "même type d'ordre" on peut définir l'ordinal d'un ensemble en appelant ordinal d'un ensemble ordonné A un représentant de la classe des ensembles qui ont même ordinal que A (le problème soulevé pour le choix du représentant est le même que dans la définition du cardinal).

Cependant en acceptant cette définition de l'ordinal on s'aperçoit que l'on ne peut pas toujours comparer deux ordinaux entre eux (comme on le fait pour les cardinaux).

Prenons deux exemples :

a) Imaginons un ensemble A = {a, b, c} ordonné suivant le schéma ci-contre :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}$$
$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$$

et un ensemble B = {a', b', c', d'} ordonné suivant le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc} a' & b' & c' & d' \end{array}$$
$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot$$

On peut construire une bijection de A sur un sous-ensemble de B respectant l'ordre en associant a' à a, b' à b, c' à c et dire intuitivement, de façon analogue à la comparaison des cardinaux, que A a un ordinal inférieur à celui de B.

B) Considérons maintenant D = {e, f, g} et E = {e', f', g'} ordonnés ainsi

D et E sont équipotents, mais il n'existe pas entre eux de bijection conservant l'ordre qu'ils n'ont donc pas même ordinal, sans qu'il soit possible de dire que l'un est supérieur à l'autre.

On peut éviter ce problème en n'acceptant, pour définir les ordinaux, que des ensembles muni d'une relation d'ordre total (1). Mais cela ne suffit pas si l'on considère les ensembles infinis. Reprenons l'exemple de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Q}$ (ensemble des nombres rationnels) munis de l'ordre usuel, qui est un ordre total, il n'existe pas entre eux de bijections qui conserve l'ordre, puisque N a un plus petit élément et que $\mathbb{Q}$ n'en a pas.

C'est pourquoi CANTOR est amené à préciser les conditions que doit vérifier une relation d'ordre total sur un ensemble infini pour qu'il soit possible de parler d'ordinal. Ce qui l'amène à s'intéresser aux relations de "bon ordre" (une relation de "bon ordre" est une relation d'ordre total telle que tout sous-ensemble a un premier élément) on dit que l'ensemble sur lequel est définie une relation de bon ordre est "bien ordonné").

Toute relation d'ordre total sur un ensemble fini étant une relation de bon ordre, il est à peu près clair, intuitivement que si deux ensembles finis sont équipotents, ils ont même type d'ordre quelle que soit la relation d'ordre qu'on construise sur eux. (lorsqu'on compte les éléments d'un ensemble fini, l'ordre dans lequel on fait le comptage est un ordre total et quel que soit cet ordre, on établit toujours un isomorphisme avec la même suite d'entiers, le

(1) une relation d'ordre définie dans un ensemble, est dite d'ordre total, si quels que soient les deux éléments m et q de cet ensemble, m et q sont comparables pour la relation.

dernier nommé de cette suite servant à désigner l'ordinal de l'ensemble). Ainsi on s'aperçoit que sur les ensembles finis, les notions de cardinal et d'ordinal coïncident : quelles que soient les relations d'ordre total sur 2 ensembles finis ayant même cardinal, ces ensembles ont même ordinal et réciproquement.

Mais ce qui est vrai pour les ensembles finis ne l'est plus pour les ensembles infinis. L'existence d'un isomorphisme dépendra de la relation d'ordre choisie, qui devra être une relation de bon ordre (comme on la vu sur l'exemple des nombres rationnels). (voir annexe II)

Mais si l'on peut parler de cardinal pour n'importe quel ensemble peut-on aussi parler d'ordinal pour n'importe quel ensemble ? Cela revient à se demander s'il est toujours possible de construire une relation de bon ordre sur un ensemble. Au début de ce siècle, ZERMELO répondra par l'affirmative et le prouvera, ce que d'ailleurs CANTOR avait conjecturé dès 1883.

Cela ne signifie pas pour autant que cette relation puisse être construite facilement sur n'importe quel ensemble. A titre d'exemple, bien qu'on sache d'après le théorème de ZERMELO qu'il existe une relation de bon ordre sur l'ensemble des nombres réels, personne à ce jour n'a encore réussi à en construire une.

VII - LES PARADOXES DE LA THEORIE DE CANTOR

Jusqu'au 19ème siècle, les axiomes fondamentaux des théories mathématiques étaient posées à priori et personne ne songeait à les mettre en doute. La notion de vérité mathématique était liée à la notion d'expérience qui avec l'intuition permettaient de choisir ces axiomes de façon pertinente.

C'est pourquoi lorsque CANTOR avait donné d'un ensemble la définition suivante :

> *"Par exemple, on entend un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée".*

peu d'objections furent soulevées de la part de ses contemporains, à part peut-être FREGE, qui proteste contre le caractère vague d'une telle définition.

Cependant l'importance de la théorie construite par CANTOR à partir de cette notion amène les mathématiciens à regarder le problème d'un peu plus près. BURALI-FORTI en 1897, CANTOR lui-même en 1899, RUSSEL en 1905 puis bien d'autres firent ressortir de nombreux paradoxes attachés à cette conception.

Qu'est-ce qu'un paradoxe ? C'est un énoncé vrai en même temps que son contraire. Citons deux paradoxes très connus, le premier mis en évidence par

RUSSEL, le second par BERY et RUSSEL.

- La langue française comporte un nombre fini de mots... il existe donc un nombre fini de phrases de seize mots. Considérons alors l'ensemble des entiers dont la définition peut s'exprimer en moins de seize mots français. Cet ensemble est fini. Il est donc légitime de parler de l'entier n défini comme "le plus petit entier qui n'est pas définissable en moins de seize mots français". Mais cette définition est contradictoire puisqu'elle ne comporte que quinze mots !!!

- Un bibliothécaire consciencieux ayant des catalogues de ses ouvrages décide détablir un catalogue des catalogues ; ce catalogue doit-il être couché sur la liste ?

Peut-on parler de l'ensemble de tous les ensembles ? Non, car cette notion est contradictoire. En effet, appelons X l'ensemble de tous les ensembles. Puisque X est un ensemble, d'après sa définition, il doit appartenir à lui-même. Il faut donc admettre pour un ensemble la possibilité d'appartenir à lui-même. Etablissons alors dans X une partition en 2 sous-ensembles :

A : ensemble des ensembles qui sont élément d'eux-mêmes
B : ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.

Et intéressons-nous au problème : est-ce que B appartient à lui-même ? Si oui, cela signifie que B appartient à A (d'après la définition de A). Comme A et B forment une partition de X, si B appartient à A, c'est qu'il n'appartient pas à B, autrement dit qu'il n'appartient pas à lui-même... Ce qui est contradictoire.

Sinon B, n'étant pas élément de lui-même, doit d'après sa définition, être élément de lui-même, ce qui est contradictoire.

La théorie de ce fait, devient contradictoire. Il devient urgent de revoir les bases des mathématiques. C'est ainsi que *"s'ouvre une crise des fondements d'une rare violence qui a secoué le monde mathématique pendant plus de 30 ans"*. (cf 12 p. 46)

VIII - LES NOUVELLES ORIENTATIONS

Cette crise des fondements va en fait permettre la naissance de l'axiomatique moderne. Les procédés intuitifs ne s'avèrent plus suffisants. On va d'abord refaire la géométrie. HILBERT, en 1899, publie "les fondements de la géométrie" où il explicite les axiomes de la géométrie euclidienne et fait apparaître que d'autres géométries peuvent exister si on modifie le choix de certains axiomes. Les géométries de RIEMANN et de LOBATCHEWSKY sont en quelque sorte "officialisées" et aucune géométrie n'est désormais plus vraie qu'une autre.

C'est la base de l'axiomatique moderne où un concept n'est tenu qu'a être bien défini par rapport aux axiomes choisis et surtout non contradictoire.

> *"Les paradoxes pullulent dans la théorie cantorienne parce que certains ensembles sont trop "gros". ZERMELO, en 1908, publia dans les "Mathematsche Annalen" une axiomatique de la théorie des ensembles ne partant pas de la définition cantorienne naîve. L'idée est de définir des opérations permises sur des objets appelés ensembles(...) Axiomatiquement on déclare en outre que la famille des entiers naturels est un ensemble.*
>
> *FRAENKEL en 1921 et J. VON NEUMANN en 1925 apporteront des améliorations à ce système d'axiomes qui évite les paradoxes précédemment évoqués. Toutefois, rien n'assure encore aujourd'hui que d'autres paradoxes ne pourraient pas surgir même dans le cadre axiomatique ainsi fixé. Tout le problème est justement la non-contradiction de cette axiomatique. D. HILBERT, en posant la méthode axiomatique basée sur le langage formalisée, ouvrait directement la route aux théories dont le but était de démontrer une non-contradiction (...) Ce problème de la non-contradiction ne pouvait que faire renaître la logique de la torpeur où elle s'était réfugiée depuis les vigoureuses percées d'Aristote et de Leibniz..."* (cf 11 p. 213).

Deux tendances principales s'affrontent alors, la seconde finissant par s'imposer en raison de la force nouvelle que représentent l'axiomatique et la formalisation. C'est la lutte entre ceux qu'on a appelés "les intuitionnistes" et les "formalistes".

- Pour les "intuitionnistes", il faut une sorte de certitude intérieure garantissant l'existence des objets mathématiques. Vulgarisée par H. POINCARE, cette école reprend l'idée kantienne de certains a priori des formes mêmes de la pensée. La création d'un langage formalisé permettant de communiquer sans tenir compte de la personnalité du mathématicien relève de l'utopie. En ce qui concerne les nombres, nous avons l'intuition de la suite des nombres entiers et il n'est pas question pour les intuitionnistes de ramener la notion d'entier à celle (beaucoup moins précise intuitivement) d'ensemble.

"BROUWER systématisera ce point de vue en accordant à la seule intuition mathématique la liberté -totale- de créer la mathématique, en dehors même d'une quelconque "matérialité" de la réalité extérieure, physique par exemple. Cette intuition appartiendrait à une sorte de monde des Idées à la PLATON et se distinguerait bien entendu de la logique considérée comme un pur langage. Ce langage logique est en effet soumis à des règles strictes, provenant de l'étude des ensembles finis. C'est la logique aristotélicienne en gros. Mais alors, il n'y a aucune raison de pouvoir appliquer ce langage dans le cadre des ensembles infinis. Le fond du problème est bien la signification de l'existence d'un objet en mathématique. Le fait qu'on démontre qu'une propriété P ne puisse provenir d'une autre déjà acquise ne permet pas d'en déduire qu'il existe un élément ne satisfaisant pas la dite propriété P.

L'Ecole Intuitionniste rejette donc l'emploi de la logique ordinaire (par exemple principe du tiers exclu) aux ensembles infinis. Elle met l'accent sur l'idée qu'il existe des propositions indécidables dans le cadre d'une axiomatique donnée. En outre, cette Ecole rejette les procédés non explicitement constructifs et en particulier l'ensemble des nombres irrationnels en tant que tel..." (cf 11 p. 215)

- Les "formalistes", quant à eux, ne souhaitent pas renoncer à l'héritage du passé, mais plutôt en revoir les bases ; comme dit HILBERT : *"Du paradis que CANTOR a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser" !...*

Dès 1884, FREGGE proclamait son ambition de construire l'arithmétique (donc les mathématiques d'après CANTOR) sur une amélioration du calcul propositionnel. C'est RUSSEL et WHITEHEAD qui dans leurs "Principia mathematica" parus de 1910 à 1913 offriront un exposé systématique des bases des mathématiques. En dehors de leur formalisme symbolique très riche, l'apport de RUSSEL et WHITEHEAD sera de proposer une construction formelle sans paradoxes logiques, en particulier en évitant de considérer des classes qui se contiennent elles-mêmes comme élément. Ils parviendront enfin à une explication complète des cardinaux.

A partir du moment où on admet le principe du recours à la méthode axiomatique, on est conduit à accepter plusieurs systèmes possibles, avec pour contrainte le principe de non-contradiction, principe qui sera une préoccupation importante pour les mathématiciens de ce siècle.

En 1931, GODEL démontre qu'il est illusoire de vouloir établir la non-contradiction de l'arithmétique. Plus précisément, pour tout système d'axiomes contenant le système de PEANO, GODEL montre qu'il existe un énoncé de théorie des nombres qui ne peut être démontré dans le cadre du système donné (qu'on ne peut donc dire ni vrài ni faux). *"Ce résultat, dit DHOMBRES, détruisait l'une des plus intimes convictions qui font partie de la philosophie spontanée du mathématicien".*

En 1963, COHEN montre que certains théorèmes sont indécidables dans le cadre de la théorie de ZERMELO-FRAENKEL, et depuis, de nombreux théorèmes non prouvés paraissent indécidables dans les domaines les plus variés.

Ainsi ce XX° siècle sera-t-il marqué par l'apparition d'axiomatiques plus exigeantes que l'axiomatique finalement naïve de CANTOR. C'est à partir d'une telle axiomatique et par l'utilisation d'un langage complètement formalisé que BOURBAKI construit, logiquement parlant, toutes les mathématiques :

> *"Alors qu'autrefois on a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières qui lui fournissaient notions et vérités premières, ce qui eût entraîné pour chacune la nécessité d'un langage formalisé qui lui appartînt en propre, on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique d'une source unique, la Théorie des Ensembles".*
>
> (Bourbaki, "Théorie des Ensembles", Introduction, Hermann)

Prudemment, Bourbaki ajoutera dans l'édition de 1970 :

"Ce faisant, nous ne prétendons pas légiférer pour l'éternité"...

- 4ème partie -

LA CONSTRUCTION DU NOMBRE CHEZ L'ENFANT

ASPECTS PSYCHO-PEDAGOGIQUES

Il est difficile de parler de l'aspect psychologique de la construction du nombre entier naturel sans accorder une place importante aux travaux de l'école de Genève. Ces travaux reposent sur une étude scientifique et même si les méthodes utilisées ont quelquefois été remises en cause, ils sont à la base de nombreuses recherches pédagogiques.

Bien que les accusations d'un mathématicien tel que FREUDENTHAL et d'une rééducatrice telle que S. BARUK ne se fondent pas sur une expérimentation scientifique, il nous a paru intéressant de signaler leurs points de vue.

I - LES TRAVAUX DE L'ECOLE DE GENEVE SUR LA CONSTRUCTION DU NOMBRE CHEZ L'ENFANT

Le contenu de ce paragraphe est largement inspiré de l'ouvrage de J. PIAGET et A. SZEMINSKA, "la genèse du nombre chez l'enfant" et de l'article de M. LAURENT DELCHET : "la dimension génétique de la recherche" publié dans le cahier pédagogique n° 78 (Intuition et construction de l'espace - INRP)

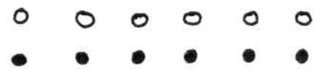
a conservation es quantités iscrètes est n indice 'apparition es structures pératoires éversibles hez l'enfant;

D'après PIAGET et les psychologues de l'école de Genève, la construction du nombre chez l'enfant est conditionnée par la possibilité pour l'enfant de réaliser des opérations réversibles. Une opération réversible étant ce qui transforme un état A en un état B en laissant au moins une propriété invariante au cours de la transformation et avec retour possible de B en A.

PIAGET lie cette possibilité de réaliser des opérations réversibles à la notion de conservation des quantités. C'est en travaillant sur l'activité intellectuelle de l'enfant dans des activités de type mathématique qu'il a isolé une caractéristique de la pensée du jeune enfant : l'absence de conservations des quantités dont l'enfant ne se défait que très progressivement :

- au point de vue des quantités continues des expériences simples peuvent être faites. On présente à l'enfant deux verres de même forme et de même dimension pleins d'eau colorée, en bleu pour l'un et en rouge pour l'autre. Puis, on lui demande de transvaser l'un des deux dans un récipient de forme différente, par exemple plus large et plus bas. Pour le jeune enfant la quantité d'eau n'est pas conservée. Il n'accepte la conservation des quantités continues (quantité de matière, masse, volume) que vers 8-10 ans (cf 13)

- au point de vue des quantités discrètes (constituées d'unités individualisables donc concernant directement le nombre) on peut faire l'expérience des jetons espacés. Une correspondance terme à terme étant réalisée entre deux rangées de jetons,



l'enfant doute de l'équipotence quand on modifie la disposition de l'une des rangées.

Ainsi lorsqu'on observe un enfant qui compare en nombre des collections d'objets, on constate que jusqu'à un certain âge, certaines qualités de la collection (espace occupé, ressemblance ou dissemblance des éléments, etc...) empêchent l'enfant de dégager l'invariant qu'est le nombre d'éléments de la collection. (Voir "la génèse du nombre chez l'enfant")

D'après PIAGET l'enfant parvient à dépasser ce stade de non conservation quand il a la possibilité de penser que l'opération faite pour modifier la rangée peut être inversée et qu'il peut mentalement revenir au point de départ.

La conservation de la quantité discrète, est bien dans ce cas un indice d'apparition d'une opération réversible.

Ces structures, la classification opératoire et la sériation opératoire

Quelles sont les structures opératoires réversibles que l'enfant doit posséder pour concevoir mathématiquement le nombre ?

1) La classification opératoire

"classer", c'est grouper des objets en collections. Une classe est caractériséee en "compréhension" et en "extension" ; en compréhension par les propriétés communes aux objets appartenant à la classe, en extension par la liste des objets. Les étapes de cette construction sont :

a) la réalisation de "collections figurales" (les objets de la collection sont utilisés pour réaliser un "dessin"). 4 ans, 5 ans et demi.

b) la réalisation de "collections non-figurales" à l'aide de critères de ressemblance (couleur, forme) mais il ne peut comparer la partie et le tout. (situation : 2 carrés rouges, 4 carrés bleus ; l'enfant déclare : il y a plus de carrés bleus que de carrés). 5 ans et demi, 7 ans.

c) la différenciation des 2 termes compréhension et extension définit la classification opératoire. L'enfant devient alors capable de "quantifier l'inclusion" c'est-à-dire qu'il peut comparer le tour et la partie. (7 ans, 8 ans).

2) La sériation opératoire

Sérier, c'est ordonner des éléments selon un critère qui varie. Les étapes de cette construction sont :

a) l'enfant ne parvient pas à constituer la série correcte (exemple : sérier dix batons de longueur différente du plus petit au plus grand) 4 ans, 5 ans et demi.

b) il procède par essais multiples et nombreux tatônnements pour atteindre une solution correcte : 5 ans, 7 ans.

c) l'enfant devient capable de construire méthodiquement sa série sans tatônnement ni erreur en utilisant la transitivité : c'est le niveau de la sériation opératoire : 7 ans, 8 ans.

organisent pour
rmettre à
enfant de
nstruire le
stème des
mbres.

Les activités de classification paraissent liées à l'aspect cardinal du nombre et peuvent paraître suffisantes pour construire le nombre cardinal. De même, les activités de sériation paraissent liées à l'aspect ordinal et pourraient permettre la construction de l'ordinal.

Tel n'est pas le point de vue de PIAGET : *"Le nombre est à la fois une classe et une relation sériales"*. L'opération de dénombrement résulte d'une fusion de la classification et de la sériation.

"Le nombre retient des activités de classification, la structure d'inclusion. Mais il fait abstraction des qualités des objets et se contente de considérer chacun comme une unité. Dès lors, pour distinguer une unité de la suivante, il est nécessaire d'utiliser une sériation. Pour PIAGET, c'est la synthèse de ces deux opérations qui constitue le nombre :

$$1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 \ldots"$$

(cf 34 p 75)

II - QUELQUES CRITIQUES AU SUJET DES TRAVAUX DE PIAGET

Des critiques ont été faites à PIAGET portant d'une part sur la méthode d'expérimentation d'autre part sur les conclusions par la remise en question de certaine expériences ou de certaines interprétations de ces expériences. Ces critiques portent sur l'ensemble des travaux de PIAGET :

Critiques sur la méthode

- l'expérimentation chez PIAGET se fonde sur un entretien non programmé avec l'enfant. Certains psychologues critiquent cette méthode car il y a souvent un écart très grand entre la compréhension et la formulation. HUANG dans l'étude de la représentation du monde chez l'enfant, en opposition à cette méthode du "questionnaire" propose plutôt une sorte de "test" : mettre l'enfant face à un phénomène et chercher à saisir ses réactions immédiates.

En ce qui concerne l'influence des tâches concrètes dans le problème de la quantification de l'inclusion, des recherches ont été faires par le CNRS ; elles aboutissent à la remise en cause des conclusions de PIAGET sur ce sujet.

On reproche encore à PIAGET toujours dans le problème de la quantification de l'inclusion de ne pas suffisamment tenir compte de l'influence des facteurs linguistiques dans la compréhension des phrases comportant des opérations de quantification. Une autre critique est faite sur les méthodes de PIAGET, celle de ne pas laisser une possibilité pour proposer une alternative à ses explications. Ainsi dans la représentation du monde chez l'enfant les expériences étaient liées à une certaine conception de l'enfance posée à priori.

Critiques sur les conclusions

Donnons quelques exemples qui remettent en cause les conclusions :

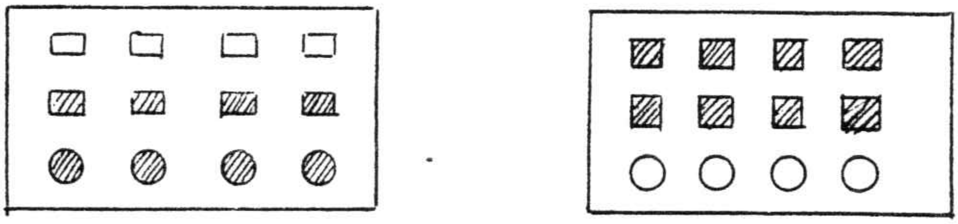
a) remise en question de certaines expériences

La recherche du CNRS portant d'une part sur l'influence des tâches concrètes sur la réussite, d'autre part, sur l'influence des facteurs linguistiques dans l'étude de situations où intervient une quantification conduit leurs auteurs à rejeter l'assimilation quantification du prédicat et inclusion faite par PIAGET.

note : Voici quelques exemples d'expériences réalisées pour mettre en évidence l'influence des tâches concrètes dans l'étude de situations où intervient une quantification.

Plusieurs types de tâches sont proposées aux enfants

a) Jugement ou diagnostic (méthode de PIAGET). On présente à l'enfant des cartes de ce type.

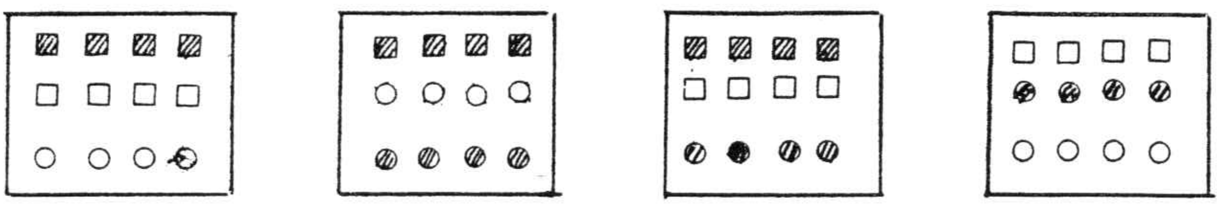


(pour la commodité de ces notes, , seront des carrés ou des ronds bleus, des carrés ou des ronds rouges. Dans l'expérimentation, formes et couleurs varient ; on se contentera dans les exemples donnés des mêmes formes et et des mêmes couleurs).

Question : "Est-ce que tous les carrés sont rouges ?"

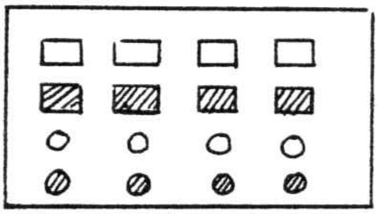
Inconvénient : une réponse correcte en apparence peut quand même cacher une erreur : "oui" pour la 2ème carte peut signifier "seuls les carrés sont rouges", "non" pour la 1ère peut signifier "il y a aussi des ronds rouges".

b) Choix - On présente à l'enfant un jeu de 4 cartes analogues aux précédentes en lui demandant de choisir celle(s) où tous les carrés sont rouges.



Si un élève se trompe, on peut ainsi en examinant les cartes choisies analyser les raisons de son erreur.

c) Rectification - On présente à l'enfant une carte analogue où les formes coloriées sont des gommettes. Si l'enfant a répondu non à la question "est-ce que tous les carrés sont rouges ?" on lui demande d'enlever le moins possible de gommettes pour que l'affirmation devienne vraie.



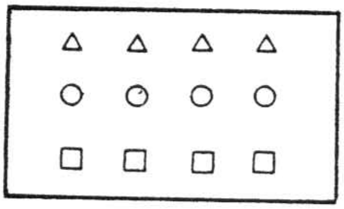
d) Construction - Technique comprenant 3 variantes.

Cette technique est beaucoup plus difficile, elle a pour but de compléter les précédentes.

1) On donne à l'enfant une carte vide et des gommettes
Consigne : construire un dessin :

a) où tous les carrés soient rouges
b) en utilisant le plus de gommettes possibles.

2) On donne à l'enfant des cartes où sont tracées des formes, et trois crayons de couleur.



consigne : colorier ces formes pour que tous les carrés soient rouges et qu'il y ait le plus de dessins différents possibles (deux dessins peuvent différer par la forme ou la couleur).

3) On donne à l'enfant une carte vide, des formes modèles en carton et 3 crayons de couleur.

Formes : △ □ ○ Les consignes sont les mêmes qu'en 2.

b) remise en question des interprétations de ces expériences

A propos du nombre notons celle qui concerne l'hypothèse selon laquelle l'ordination suppose toujours la cardination et réciproquement : Il est difficile d'admettre avec PIAGET la formation simultanée de ces deux aspects dans la mesure où :

a) il ne s'occupe pas de l'aspect ordinal lorsqu'il étudie la construction cardinale de la notion de nombre chez les enfants de 5 à 7 ans.

b) il utilise seulement la connaissance qu'ont les enfants du début de la suite des nombres pour étudier l'appréhension qu'ils ont des relations qui lient le rang d'un objet dans une série et le nombre des objets rangés avant lui (Cf HUANG).

III - LE POINT DE VUE DE FREUDENTHAL

Dans "Mathematics as an educational task" FREUDENTHAL consacre un chapitre au concept de nombre, dans lequel il s'élève contre la trop grande place faite aujourd'hui à l'aspect cardinal du nombre. Pour lui, les enfants saisissent dès le départ la suite illimitée des nombres et ne les conçoivent en aucune façon comme classe d'ensemble équivalente (même inconsciemment).

Concevoir que la suite des nombres est illimitée est le premier des concepts mathématique

"Depuis bien longtemps on a coutume d'enseigner aux enfants dans un premier stade les nombres jusqu'à 20, puis ensuite les nombres jusqu'à 100, et enfin la suite illimitée des nombres, ou quelque chose comme cela. Mais les enfants saisissent la suite illimitée dès la première étape et c'est un grand évènement. Ainsi dans une école Montessori, on demandait aux enfants d'écrire les nombres les uns sous les autres : 1, 2,... 10, 11... Sans doute le maître devait-il aider après 19, peut-être encore après 29, alors qu'après 39 ce n'était plus nécessaire et cela jusqu'à 99. La petite fille de mon histoire était profondément absorbée dans cette activité. Le troisième jour elle dépassait 1000. A 1024, elle refusa obstinément de continuer. "Cela continu ainsi" dit-elle "n'est-ce pas ?" Le jeu était terminé. Dans une école traditionnelle le maître aurait dit : "Sois gentille et continue à compter jusqu'à 2000" Heureusement il connaissait de nouveaux jeux. Je ne sais pas lesquels. Peut-être compter par 2, par 3 ou avec les nombres triangulaires ou les nombres carrés. La suite des nombres appartient aux mathématiques. L'expression "cela continue ainsi" est mathématique : c'est le premier concept mathématique et le premier que les individus conçoivent.

La petite fille était-elle capable de formuler les principes ? Sans doute pas. On peut avoir pris conscience de l'aspect infini de la suite des nombres sans être capable d'en formuler les principes. Mais même le fait de manipuler de tels principes et d'en saisir les applications illimitées constitue une performance importante. L'enfant a découvert l'infini ce qui constitue l'alpha et l'oméga des mathématiques. Compter est bientôt suivi de l'arithmétique la plus élémentaire. Additionner c'est compter en avant, soustraire c'est compter en arrière. Ceci est le principe fondamental des anciennes méthodes. C'est un principe sûr inspiré par l'aspect ordinal du nombre et complètement négligé par les pédagogues modernes".

Selon l'auteur l'aspect ordinal (ordinal étant pris ici dans le sens axiomatique de PEANO) est trop souvent négligé dans l'enseignement mathématique actuel au profit de l'aspect cardinal. Pourtant ce dernier est insuffisant du point de vue didactique, du point de vue mathématique et de peu d'importance comparé à l'aspect ordinal. L'aspect cardinal est primitif : les oiseaux savent combien d'oeufs ils ont dans leur nid ; à un niveau supérieur l'homme sait compter.

L'aspect cardinal est de peu d'importance par rapport à l'aspect ordinal...

Pour FREUDENTHAL il est très possible d'envisager à l'école l'équipotence et la comparaison des cardinaux. Les ensembles finis et infinis fournissent des exemples convenables. Mais il faut bien considérer que les nombres naturels sont en fait admis et qu'on ne peut prétendre les présenter comme fondés sur la théorie des ensembles.

En ce qui concerne les opérations c'est un fait bien connu que si des ensembles disjoints sont réunis ce sont leurs cardinaux qui sont additionnés. Par ailleurs le fait que, dans le produit cartésien de deux ensembles les cardinaux sont multipliés, est un des aspects de la multiplication qui n'a pas été suffisamment justifié dans les méthodes traditionnelles d'enseignement. L'auteur souligne l'importance du rectangle pour visualiser cette opération. D'après lui dans les démonstrations de combinatoire la théorie sous-jacente est souvent obscure. Souvent la définition de la multiplication à partir du produit cartésien est présentée comme une démonstration alors qu'en fait la situation est beaucoup plus sophistiquée.

"Si avec 5 filles et 4 garçons on doit former tous les couples, alors l'ensemble des couples est vraiment le modèle adéquat et nous obtenons 20 couples. Dans la plupart des cas cependant ce modèle ne convient pas ; posons par exemple la question : il y a 5 chats qui ont chacun 4 pattes ; combien de pattes ? Le petit mot "chacun" garantit une bonne réponse mais est-ce justifié par l'ensemble des couples ? Y a-t-il 5 chats qui puissent être combinés à 4 pattes comme dans le problème des garçons et des filles ? Naturellement non bien qu'on puisse récupérer le modèle en donnant un nom aux pattes de chaque chat de façon arbitraire (1, 2, 3, 4) et en cherchant les couples de chats et de nombres. Mais si nous posons maintenant le problème suivant : à un meeting de 5 personnes on doit élire un président et une secrétaire ; de combien de manières possibles ?..." (cf 16)

qui joue le 1er [rô]le dans la cons[tr]uction du nombre.

"Dans la génèse du concept de nombre, le nombre "pour compter" joue le premier rôle et le plus important. Dans ce contexte, l'aspect cardinal est seulement complémentaire, correspondant au fait que le nombre "pour compter" est invariant par bijection. Rien n'indique que les enfants constituent le nombre à partir de cette invariance. L'enfant a acquis le nombre "pour compter" et à un certain moment son invariance par bijection (permutation)".

Il signale un peu plus loin qu'en *"aucune façon l'enfant ne constitue le nombre comme classe d'ensembles équivalents, même inconsciemment. Le fait d'insister sur cette invariance par bijections est une attitude de mathématicien adulte qui ne peut oublier sa propre théorie des nombres naturels. Or les enfants apprennent cette invariance dans un contexte beaucoup plus vaste ; ils réalisent que s'ils comptent encore demain ils trouveront à nouveau 5 doigts à leur main, que tous les hommes ont le même nombre de certaines choses et que le nombre de billes dans le mouchoir ne change pas même si l'on dit "abracadabra". L'invariance par bijections est un point chaud dans ce contexte, un hobby d'adulte qui le vendent comme aspect cardinal.*

Combien d'invariances un enfant doit-il apprendre ? L'auteur signale que lors d'une promenade avec son fils (2 ans 4mois) ils virent un chien boiteux ; quelques jours plus tard, passant au même endroit, l'enfant demanda "où est le drôle de petit chien ? " Il devait apprendre que les chiens ne sont pas une partie invariante d'un lieu.

"Parmi les propriétés d'invariance du nombre "pour compter" l'invariance par bijections est un cas particulier. C'est seulement l'invariance du nombre pour compter qui peut être formulée à l'intérieur des mathématiques ;

avoir autant de doigts demain qu'aujourd'hui et savoir le nombre de doigts des autres à partir du mien ne fait pas partie du domaine des mathématiques"

"Le fait que l'invariance par bijections peut être formulée mathématiquement n'est pas suffisant pour croire que cela devrait être le seul critère pour tester la bonne compréhension du concept de nombre de la part des enfants. Aucun doute que l'insistance en psychologie sur l'aspect cardinal est due à PIAGET. Impressionné par CANTOR, il se tourna vers l'étude du développement du concept de nombre sous cet aspect. Il est vrai qu'il mentionnait le nombre ordinal mais ce qu'il mettait sous ce chapeau n'a rien à voir avec l'aspect ordinal ni avec le nombre pour compter. Son indifférence vis-à-vis du comptage est si grande qu'il admet presque tacitement que son test permet de compter mais qu'il ne mentionne jamais jusqu'où les enfants peuvent compter. En fait, il est très étonnant qu'un grand nombre d'entre eux soient capables de compter loin et même sans restriction".

Freudenthal met en cause les connaissances mathématiques de PIAGET et surtout l'exploitation didactique qu'on en a fait,

"Il est clair que PIAGET croyait que le concept de nombre naturel pouvait entièrement être déduit des cardinaux. Il croyait cela vrai du point de vue mathématique, et cela peut l'avoir séduit de le vérifier du point de vue psychologique par ses expériences. Ces idées de PIAGET influencèrent des mathématiciens qui auraient dû savoir qu'il faisait fausse route et qui auraient dû voir que l'aspect cardinal du nombre était insuffisant mathématiquement"... "C'est une triste histoire de voir la didactique fonder sa pratique sur des théories venant d'un psychologue. Ce qui est emprunté à PIAGET ce ne sont pas les résultats de ses expériences, mais les présuposés mathématiques faux ou tout au moins mal compris " : "5 est la classe des ensembles équivalents à un certain ensemble standard" est compris par PIAGET : "5 est une classe constituée de 5 unités équivalentes" et par cette équivalence il voulait dire que les unités peuvent être arbitrairement interchangées avec elles ou avec d'autres. Evidemment, les sources de PIAGET utilisaient le "équivalent" sans couleur au lieu du "équipotent" et cela a pu contribuer au malentendu".

et réaffirme que l'aspect cardinal est insuffisant pour comprendre l'universalité du nombre

En conclusion, l'auteur ne rejette pas l'aspect cardinal du nombre entier naturel.

Il est certain que les enfants doivent apprendre que le nombre "pour compter" est invariant par des bijections, que si on demande "combien de billes ont-ils ensemble ?" les enfants doivent réaliser la réunion de deux ensembles, même si le résultat est obtenu en comptant, qu'ils doivent réaliser la multiplication à l'aide de couples et qu'à un plus haut niveau ces actions doivent devenir conscientes et finalement s'étendre jusqu'à la formalisation. L'argument opposé est de ne pas restreindre le nombre naturel à l'aspect cardinal ni même d'insister sur cet aspect. Peut-être que le 5 du dé rappelle encore une idée de cardinal mais personne n'associe une telle idée à un billet de 5 , à 5h, à 5mn, à 5°, au 5ème étage, à 5 ans, au point 5 sur la droite. Tous ces exemples sont des concepts de nombre très différents de la cardinalité. Il est vrai qu'avec quelques-uns d'entre eux la somme et le produit des cardinaux devrait être complètement interprétés. C'est un fait important et c'est une part de l'universalité qui explique le pouvoir du nombre.

IV - LE POINT DE VUE DE STELLA BARUK (*)

L'analyse que fait Stella BARUK à propos de l'apprentissage des nombres, si elle est loin de résoudre tous les problèmes, a du moins le mérite de les poser en termes différents.

Comme pour FREUDENTHAL, son travail, fruit d'une réflexion à partir de la pratique quotidienne n'est sans doute pas à mettre sur le même plan que celui de PIAGET qui est celui de toute une école et découle de recherches systématiques et approfondies sur un grand nombre de cas.

L'intérêt du point de vue de S. BARUK, tel qu'il est développé dans les derniers chapitres de "Fabrice où l'école des mathématiques" est qu'il s'appuie non pas sur une étude du développement intellectuel de l'enfant, mais plutôt sur une analyse d'ordre sociologique et historique.

Cette analyse la conduit à établir une distinction entre deux domaines numériques jugés totalement différents : le domaine du "quantitatif" et le domaine du "mathématique".

a distinction ntre "quantitatif" et mathématique"

S. BARUK établit une distinction fondamentale entre le domaine "quantitatif" et le domaine "mathématique" du nombre.

(*) Stella BARUK a une pratique de rééducation des enfants en mathématique ; elle a écrit deux livres ("Echec et math" Seuil 73 et "Fabrice où l'école des maths" Seuil 77) qui se veulent en rupture avec les pratiques pédagogiques telle que l'auteur les voit, contraignantes et mystifiantes.

Il s'agira, en matière de pédagogie, de ne pas les confondre, contrairement à ce qui, selon S. BARUK, se passe actuellement.

Le quantitatif est né, à partir des échanges, de la nécessité de garder en mémoire un bien, un avoir. Il est du domaine de l'utile et malgré toute la complexité qu'il peut atteindre (taux, escomptes, valeurs boursières.. il reste borné et rigide, parce que lié aux choses.

La mathématique par contre est une interrogation sur les nombres d'où est exclue toute recherche utilitaire. Ca ne sert à rien de rechercher le dernier nombre premier, de rechercher si un nombre peut se décomposer en somme de deux carrés, de rechercher si deux nombres sont amicaux...*"Ca ne sert à rien, parce que ça sert à tout autre chose : ça sert à garantir l'exercice et la jouissance d'un pouvoir"*. Pouvoir de s'interroger à l'infini, réponse *"aux interrogations angoissées que l'homme a adressées à des divinités chargées de l'ordre du monde"*.

a des conséquences pédagogiques. L'enfant a un acquis quantitatif

L'enfant arrive à l'école muni d'un déjà-savoir d'ordre quantitatif. S. BARUK s'oppose à tout ce qui dans les pratiques pédagogiques conduit à considérer que l'enfant doit repartir complètement à zéro pour tout redécouvrir. Il s'agit au contraire de s'appuyer sur le déjà-savoir quantitatif existant.

Le quantitatif est un savoir sur l'avoir : or, *"le rapport à l'avoir d'un enfant passe d'abord, à travers sa langue maternelle par un savoir qu'il a de son propre corps"*. Il a deux mains, cinq doigts dans chaque, deux yeux, deux oreilles...

En particulier, le rapport aux doigts reste, depuis la nuit des temps, constitutif de la numération parlée et écrite. Et c'est essentiellement sur ce rapport aux doigts que devra s'appuyer le pédagogue. D'où l'importance de la valorisation de la main qui n'est pas forcément chose facile, compte tenu des interdits qui pèsent sur elle : mettre les mains dans les poches, se gratter le nez, avoir les mains sales, ne pas mettre les mains sur les tables...

L'interdiction pédagogique finirait de briser ce rapport aux doigts ; et S. BARUK de s'en prendre à la "Pédagogie" qui n'a pas pris en compte cette réalité et a commencé à *"inventer de couper un enfant de ses doigts pour* *pouvoir utiliser autre chose à la place. Or rien ne peut les remplacer. Et, selon les cas, ou bien ils repoussent à la place ou à côté des prothèses pédagogiques telles que barres, tablettes, perles, jetons, etc... ; ou bien la mutilation est effective".* (cf 19 p. 201)

La garantie obtenue par les doigts va devoir s'étendre et se diversifier. Elle le pourra par l'intermédiaire de la comptine : "un, deux, trois, quatre, cinq, ..." qui, parce qu'elle renvoie aux doigts, permettra de tenir un compte d'autres collections.

qu'il s'agit
d'organiser

Il s'agira donc d'aider l'enfant à composer avec le quantitatif, *"en explicitant tout cet implicite tellement profondément enfoui par l'usage qu'en font les adultes. A savoir que ce sont sur les seules désignations que se font les comptes. Que compter exige de nommer et que nommer, c'est toujours tuer un peu".* Et compter des personnes, c'est d'abord *"les réduire à n'être personne".*

A part le nombre de ses doigts, de ses oreilles,... l'enfant ne connaît de nombre qu'ordinal et les comptes qu'il tient sont implicitement ordinaux. Il faut donc l'aider à passer de l'ordinal au cardinal.

> *"Et ce passage, seuls les doigts peuvent le garantir. Car seule l'asymétrie des mains permet au repérage ordinal de garantir le cardinal. Les mots numéraux sont ainsi associés à des images de doigts -juste retour des choses- et ce seront les combinaisons de ces images qui permettront le calcul, surtout si ces images de mots sont associées à des images chiffrées.*
>
> *Très vite en effet, les images chiffrées prennent le relais des images de doigts, lesquelles, quand elles sont bien enracinées et bien utilisées comme relais entre déjà-savoir et nouveau savoir, se "subliment" à une vitesse stupéfiant. Là où petites poules blanches ou vilains petits canards encombrent les yeux et les oreilles, là où même les bâtonnets pèsent du plomb, les doigts ont une légèreté, une mobilité extraordinaire. Aussi paradoxal que cela puisse paraître, il est beaucoup plus facile de parvenir à l'idée d'un sept désincarné avec sept doigts faits de chair et d'os qu'avec sept n'importe quoi. Et infiniment*

plus facile de calculer 7+5 avec ses doigts qu'avec autant de bâtonnets dont la somme ne voudra rien dire, et qu'il faudra, eux, compter et recompter, la seule garantie restant en jeu étant celle de la comptine". (cf 19 p. 207)

et de dépasser. Le mathématique n'est pas le quantitatif et les confondre en matière d'enseignement serait aberrant : le quantitatif est du domaine de l'utile et chaque individu en sait suffisamment pour "se débrouiller" dans la vie, quitte à apprendre sur le tas les éléments de quantitatif technique qui peuvent être nécessaires à l'apprentissage d'un métier.

"Si on voulait vraiment apprendre le quantitatif aux enfants, cela irait très vite. Et on n'aurait, très vite, plus grand chose à leur faire faire. Le vrai concret est celui de la rue, celui qui leur est immédiatement accessible, parce qu'il leur parle, parce qu'ils le vivent. Le reste, le prétexte à additions, soustractions, multiplications et divisions, à partir de faux en tous genres, détraque leur rapport à la réalité". (cf 19 p. 229)

C'est pourquoi, pour S. BARUK, *"les psychologues qui prétendent, à partir de bonbons, de verres d'eau ou de billes, tester les aptitudes mathématiques d'un enfant sont de redoutables charlatans"...*

La confusion entre quantitatif et mathématique ne peut que desservir les enfants, particulièrement ceux des milieux les plus défavorisés :

"ne reconnaissant dans ce mélange pseudo-savant, ni le quantitatif qui est "le leur", ni le plaisir du mathématique, privés de la chance d'avoir, et du goût de savoir, ces individus n'auront qu'à se reproduire tels quels. Rouages nécessaires à la bonne marche d'une société qui, en fait de lecture et d'écriture des nombres, ne leur demandera que de savoir souscrire à la quantification à laquelle il aura été procédé de leur propre capacité de travail". (p. 242)

Si on leur enlève le rôle qu'on leur fait abusivement jouer en matière de sélection, les mathématiques ne servent à rien, sinon *"à ce à quoi pourrait servir toute relation au savoir quand elle n'est pas pervertie par les outrances de la pédagogie : le plaisir".*

"Relation au plaisir de savoir, relation au désir de savoir, les mathématiques ne peuvent être que cela. Sinon, avec la démesure qui les caractérise, elles ne sont qu'une épouvantable contrainte, un effroyable pensum producteur de cauchemars chez les enfants et leurs parents.

Et, paradoxalement, ce n'est que parce qu'il aura été abordé pour lui-même pour le plaisir, que le savoir mathématique du nombre pourra être utile. Car c'est alors que, fluide et polymorphe, il pourra se prêter aux lourdeurs du quantitatif sans s'y abimer corps et biens. Mais son utilité première, c'est d'abord son inutilité : celle qui fait apparaître une relation spécifique à un savoir spécifique ; mais, également, la volonté réelle de partager ce savoir avec celui à qui on l'enseigne, sans que la finalité explicite ou implicite de la relation enseignante soit sans cesse justifiée et imposée par un utilitarisme faux, donc inéfficace. Les enseignants qui, en toute bonne foi, "observent" à des fins pédagogiques les enfants, leurs plaisirs et leurs jeux pour récupérer tout ce bonheur enfantin qui n'a de sens que "gratuit", ne se rendent sans doute pas compte du poison qu'ils inoculent dans le plaisir, dans le savoir, et dans le plaisir du savoir qui, en mathématiques, ne peut être éprouvé qu'à partir d'un crayon, d'un papier et de l'écriture". (cf 19 p. 238)


I II III IV
V VI VII
VIII IX X

- 5ème partie -

L'APPROCHE DU NOMBRE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

De nombreux textes, lois, règlements et instructions précisent l'évolution de l'école primaire de 1887 à nos jours. Une fois définis les buts et les méthodes de l'enseignement primaire, des programmes proposent, pour chaque discipline d'enseignement, des objectifs spécifiques, des méthodes et des contenus.

L'approche de la notion de nombre entier constitue un sujet particulier de l'enseignement des mathématiques. L'évolution de cette approche dépend certes de l'évolution des théories mathématiques, mais aussi de l'évolution des objectifs généraux de l'éducation et des objectifs spécifiques de l'enseignement des mathématiques ainsi que des méthodes préconisées en liaison avec les progrès de la psychologie.

Nous procédons dans ce chapitre à une courte étude historique des objectifs et des méthodes de l'enseignement élémentaire, des objectifs et méthodes de l'enseignement des mathématiques, des programmes proposés pour la première année de l'école obligatoire, ceci afin de mieux cerner l'évolution de l'étude de la notion de nombre naturel telle qu'elle transparaît à travers les textes officiels et les ouvrages pédagogiques sans préjuger de l'application pratique de ces textes et ouvrages.

I - FINALITES ET METHODES DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE DE 1887 à 1977

1) finalités

usque vers 1960 'enseignement rimaire doit tre utili- aire et édu- atif

Les instructions de 1923, 1938, 1945 qui ont régi l'enseignement élémentaire jusque vers 1970 font référence à celles de 1887. Chaque nouveau texte se modifie en rien les buts généraux assignés à l'école primaire.

> *"L'éducation intellectuelle (à l'école primaire publique) ne donne qu'un nombre limité de connaissances. Mais ces connaissances sont choisies de telle sorte que non seulement elles assurent à l'enfant*

tout le savoir pratique dont il aura besoin dans la vie, mais encore elles agissent sur ses facultés, forment son esprit, le cultivent, l'étendent et constituent vraiment une éducation". (I.0 1887)

GREARD, directeur de l'enseignement primaire en 1887 est de nouveau cité dans les instructions de 1923 :

"L'objet de l'enseignement primaire n'est pas d'embrasser sur les diverses matières auxquelles il touche tout ce qu'il est possible de savoir mais de bien approfondir dans chacune d'elles ce qu'il n'est pas permis d'ignorer".

Cette ambition de l'enseignement primaire "d'être à la fois utilitaire et éducatif, de préparer l'enfant à la vie courante et de cultiver son esprit" est reprise et largement développée dans les instructions de 1923, puis dans celles de 1945. Ces dernières ajoutent :

"Cherchons à donner aux enfants du peuple une éducation qui si l'on ose dire, soit à la fois utilitaire et désintéressée, réaliste et idéaliste, et qui tienne un compte égal de leurs besoins les plus effectifs et de leurs plus nobles aspirations".

et dispenser la culture du français moyen

Jusqu'en 1959, cet enseignement primaire formait un tout cohérent. L'enfant qui suivait cet enseignement du cours préparatoire à la classe de fin d'études, partait vers 13 ans "armé pour toute sa vie adulte". Un enseignement secondaire, se terminant vers 18 ans, dont la conception et les méthodes différaient de l'enseignement primaire dispensait une culture générale destinée à une élite.

Il devient avec la prolongation de la scolarité obligatoire, une étape dans la formation générale

En 1959, l'enseignement obligatoire est prolongé (décret du 6 janvier 1959) et restructuré en

- un cycle primaire jusqu'à 11-12 ans
- un cycle secondaire jusqu'à 16 ans.

Ainsi, "l'école primaire n'est plus qu'une école préparatoire" (O. GUICHARD, ministre de l'éducation nationale en 1969) et le souci de la préparation au métier et à la vie adulte ne sont plus les objectifs prioritaires.

"Il faut (...) décider une fois pour toutes que le rôle de l'enseignement primaire doit être de développer des attitudes fondamentales, de former à des méthodes, de donner des outils ; comprendre une fois pour toutes que ce rôle peut être rempli à loisir et d'autant plus qu'on saura le concentrer sur l'essentiel...

... L'Ecole Primaire doit bâtir les fondations patiemment et solidemment. Elle bâtira les fondations de l'instruction en assurant l'usage de la langue maternelle, en apprenant à s'exprimer et à se comprendre... en formant au langage des chiffres et en donnant l'apprentissage de la logique, en suscitant et cultivant le désir d'apprendre quel qu'en soit l'objet et surtout en donnant la méthode.
L'Ecole bâtira aussi les fondations d'une éducation de toute la personnalité, d'une éducation qui n'oublie ni le corps, ni les sens, ni le caractère, ni la vie morale...

... 1969 doit marquer le début d'une véritable renaissance de l'enseignement primaire".
(Extrait d'un discours d'O. GUICHARD - Octobre 1969)

Ainsi, avec la prolongation de la scolarité obligatoire, l'enseignement primaire est devenu un degré dans l'échelle de l'éducation nationale. Il n'en est que le premier et les objectifs éducatifs deviennent prioritaires. Cependant il n'y a pas eu de réforme générale. Une commission de rénovation pédagogique a été mise en place et ses travaux ont conduit à l'institution du tiers temps (7 Août 1969) destiné à *"engager une pédagogie plus libre, moins obsédée par l'acquisition et plus soucieux du développement"* (O. GUICHARD). Dans ces perspectives, la réorganisation de l'enseignement du calcul proposée par la commission LICHNEROWICZ a été mise en oeuvre (arrêté du 2 Janvier 1970) ainsi que la rénovation de l'enseignement du français (plan Rouchette 1972).

En 1975, M. HABY, ministre de l'Education a entrepris une réforme de l'éducation et redéfini les objectifs généraux assignés à la formation scolaire dans le courrier de l'éducation du 19 Avril 1976 :

"Une éducation moderne se proposera désormais de faire acquérir à l'élève non seulement certaines connaissances culturelles mais aussi

des méthodes de pensée et d'action, des capacités (être capable de ...) et des comportements intellectuels, manuels, sociaux, etc.

La démarche qui conduit à l'élaboration des programmes s'en trouve inversée. Il convient de fixer d'abord avec précision les objectifs à atteindre, puis d'en déduire les contenus et les méthodes propices à la réalisation de ces objectifs".

En 1977 l'école élémentaire doit "favoriser le développement de l'enfant (être humain en devenir)...

Pour la scolarité élémentaire, il s'agit de définir les objectifs selon deux axes :

A : *"Le premier concerne ce qui a trait au développement de l'être humain en devenir qu'est le jeune enfant... Cet objectif s'entend avec le double souci, d'une part de ménager toutes les potentialités d'épanouissement ultérieur"* dans les domaines affectif, psychomoteur, social, cognitif ; d'autre part de *"dépister, prévenir et atténuer au mieux les handicaps éventuels de divers ordre (organiques, sociaux-culturels) qui risquent de compromettre le développement de l'enfant. L'école, et en particulier l'école maternelle, en raison de la précocité de son intervention, doit contribuer à dépister ces handicaps et selon leur nature et leur degré éviter qu'ils ne s'aggravent et tenter d'apporter le traitement pédagogique, on faciliter l'administration du traitement thérapeutique qu'ils appellent".*

... promouvoir des compétences qui préparent la scolarité ultérieure et à plus long terme, la vie adulte"

B : Le second axe correspond aux intentions, scolairement plus spécifiées d'orienter le développement de l'enfant dans des perspectives visant à *"le préparer à tirer le meilleur profit de sa scolarité ultérieure, étape obligée de l'accès à la vie adulte"*. Les compétences, qu'il s'agit de promouvoir, sont regroupées sous deux rubriques :

- *"Celles qui constituent des acquisitions instrumentales, considérées comme les apprentissages de base" :* maîtrise de la langue orale, pratique de la langue écrite, connaissance précise des nombres entiers et décimaux, maîtrise des opérations arithmétiques.

- *"Celles qui relèvent de ce qu'on pourrait appeler les processus d'éveil..."*

:n mettant tout en
›euvre pour faire
:chec à l'échec
:colaire

"La pédagogie de l'école élémentaire doit plus que jamais, s'orienter dans le sens d'une réelle égalité des chances-faire échec à l'échec scolaire, tel sera son objectif essentiel".

2) <u>méthodes</u>

'n enseignement
:radué, prati-
ue, s'appu-
ant sur des
éalités
oncrètes,

Pour ce qui est des méthodes d'enseignement proposées pour l'école élémentaire, elles sont explicitées en termes très généraux.

"La seule méthode qui convienne à l'enseignement primaire est celle qui fait intervenir tour à tour le maître et les élèves qui entretient pour ainsi dire entre eux et lui un continuel échange d'idées sous des formes variées, souples et ingénieusement graduées. Le maître part toujours de ce que les enfants savent, et procédant du connu à l'inconnu, du facile au difficile, il les conduit par l'enchaînement des questions orales ou des devoirs écrits à découvrir les conséquences d'un principe, les applications d'une règle, ou inversement les principes et les règles qu'ils ont déjà inconsciemment appliquées...
En tout enseignement, le maître pour commencer, se sert d'objets sensibles, fait voir et toucher les choses, met les enfants en présence de réalités concrètes, puis peu à peu les exerce à en dégager l'idée abstraite, à comparer, à généraliser, à raisonner sans le secours d'exemples matériels". (1887)

Ainsi, en 1887, l'enseignement doit rester concret et pratique, aller du facile au difficile. On retrouve encore cette idée en 1923 :

"L'enseignement primaire... est essentiellement intuitif et pratique : <u>intuitif</u>, c'est-à-dire qu'il compte avant tout sur le bon sens naturel, sur la force de l'évidence, sur cette puissance innée qu'à l'esprit humain de saisir du premier regard et sans démonstration non pas toutes les vérités, mais les vérités les plus simples et les plus fondamentales; <u>pratique</u>, c'est-à-dire qu'il ne perd jamais de vue que les élèves de l'école primaire n'ont pas de temps à perdre en discussions oiseuses, en théories savantes, en curiosités scolastiques et que ce n'est pas trop de cinq ou six années de séjour à l'école pour les munir du petit trésor d'idées dont ils ont strictement besoin et surtout pour les mettre en état de le conserver et de le grossir par la suite".

(I.O. 1923)

.onnant à l'en-
'ant l'impres-
ion qu'il
rogresse,

Cependant, si les instructions de 1923 continuent d'affirmer que l'enseignement doit être gradué, elles remettent en cause la méthode dite "concentrique" qui fait apparaître aux divers cours ou aux divisions successives d'un même cours les mêmes articles du programme en exigeant simplement qu'ils soient traités avec une ampleur croissante"...

"Si l'on veut que l'enfant travaille avec joie et avec profit, il faut lui éviter la monotomie des redites, le dégoût du déjà vu... Si vous tourniez toujours dans le même cercle, ou même dans des cercles concentriques, auriez-vous du plaisir à marcher ?"

un enseignement actif, tel doit être celui de l'école primaire.

On insiste en 1923 sur l'idée de "méthode active faisant un appel constant à l'effort de l'élève et l'associant au maître dans la recherche de la vérité". On insiste aussi sur l'effort que doit faire l'éducateur pour éviter qu'à l'usage cette méthode ne s'altère :

"... Tel croit toujours faire appel à la réflexion de ses élèves et peu à peu en vient à leur imposer d'autorité ses opinions.
... à l'observation, qui laisse encore l'écolier passif, nous préférons, l'expérimentation qui lui assigne un rôle actif...
... à l'enseignement par l'aspect, forme intéressante de la méthode concrète qui n'a pas dit son dernier mot et que le cinématographe va renouveler, il faut superposer une autre forme de la même méthode, qui n'en est encore qu'à ses balbutiements mais qui décuplera l'efficacité de l'art pédagogique, l'enseignement par l'action".

Le recours à l'interdisciplinarité

Ce souci d'aller du "facile au difficile" a conduit le plus souvent à un découpage de l'emploi du temps calqué sur le découpage des connaissances en petites leçons : leçons de choses, d'histoire, de géographie...

En 1969, l'institution du tiers temps favorise une approche des connaissances de façon plus interdisciplinaire. Les disciplines apparaissent alors comme des composantes d'une démarche pédagogiques plus globale centrée sur le vécu et l'éveil de l'enfant.

puis la personnalisation de l'enseignement et la diversification des parcours par l'instauration d'une pédagogie par objectif caractérisent les méthodes proposées aujourd'hui.

En 1977, M. HABY, pour répondre à la préoccupation de l'échec scolaire instaure à l'école élémentaire une pédagogie par objectifs.

"Il faut que la scolarité primaire tienne compte des différences de maturité et de rythme qui, pour des raisons d'ailleurs très diverses apparaissent entre les enfants. C'est pourquoi il a été décidé de modifier le cursus scolaire traditionnel et d'instaurer une pédagogie par objectifs...
... Dans cette nouvelle perspective, qu'entraîne une répartition des programmes, non plus sur cinq années, mais sur trois cycles, l'enseignement n'est plus conçu comme une succession prédéterminée d'étapes annuelles, les élèves en difficulté étant invités à revenir à leur point de départ et à refaire le même élément de parcours avec des enfants plus jeunes qu'eux. A la fixité d'un trajet effectué en principe à la même vitesse, en fait à des vitesses très différentes par le jeu des redoublements et surtout avec des résultats inégaux, se substitue la notion d'un terme fixé d'avance et d'une individualisation des parcours". (courrier de l'Education)

II - OBJECTIFS ET METHODES DE L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE A L'ECOLE PRIMAIRE (I.0 1887-1923-1938-1945-1970-1977)

a) Avant 1970

Dans les instructions officielles de 1887, les objectifs de l'enseignement mathématique se confondent avec ceux de toute l'éducation intellectuelle et de l'enseignement primaire en général. Ils ont un double but : utilitaire et éducatif.

> *"L'enseignement de l'arithmétique n'a pas seulement un caractère d'utilité pratique ; il présente aussi un caractère éducatif. Il concourt dans une assez large mesure au développement de quelques facultés intellectuelles : attention, réflexion, raisonnement et constitue ainsi une excellente discipline de l'esprit. Il contribue en outre, à la formation de la volonté".* ("Pédagogie vécue" Charrier p. 339-340 Ed. Nathan 1925 texte de 1918)

En 1923, ces idées directrices ne sont pas abandonnées :

> *"... Un enseignement de culture générale, visant moins à entasser des connaissances dans les mémoires qu'à former des esprits, non pas spécialisés, mais bien équilibrés et complets".* (Cité dans 20)

Cette orientation semble approuvée par GOUMY (Inspecteur d'Académie) qui explique :

> *"L'enseignement utilitaire est devenu insuffisant à l'école primaire et la quantité des choses enseignées à l'enfant importe beaucoup moins que l'orientation donnée à son esprit" et si "le calcul n'est pas du point de vue utilitaire, un des enseignements essentiels à l'école primaire... il est un excellent instrument de formation intellectuelle"".* (Cf. 21).

GOUMY explique cette insuffisance de l'enseignement utilitaire par le fait que, depuis une centaine d'années (nous sommes en 1933), les connaissances et les techniques évoluent si rapidement qu'il faut craindre que ce qui est enseigné ne soit très vite dépassé. D'où la nécessité de former "des hommes d'initiative et de progrès... lucides et sans préjugés... capables d'analyser des problèmes sans cesse renouvelés" et non des "esprits routiniers". Citons encore GOUMY :

> *"L'enfant qui répète des formules sans en pénétrer le sens ressemble*

au singe qui imite des gestes sans savoir ce qu'ils signifient. On ne dira jamais d'un singe qu'il est instruit ; il ne faut pas qu'on puisse dire d'un enfant qu'il est bien dressé".

Cependant il est dit et souligné

"Calculer, calculer rapidement et exactement, tel est l'objectif principal de l'enseignement mathématique à l'école primaire.
La théorie ne doit intervenir que dans la mesure où elle est nécessaire pour justifier la pratique du calcul, la rendre plus agréable à l'enfant qui cherche à s'expliquer ce qu'il fait, la rendre plus féconde en la rendant plus intelligible". (I.O 1923)

<u>Calculer vite et bien reste, en 1945, l'objectif principal</u>...

"A aucun moment on n'a recours au raisonnement déductif abordable seulement par les adolescents. Les enfants de l'école primaire pourront constater des propriétés curieuses des nombres et des opérations ; le maître ne se préoccupe pas de les justifier, il les considérera seulement comme des matériaux qui pourront être utilisés plus tard".

Les instructions de 1945 semblent cependant apporter quelques restrictions

"Un double but : 1° rendre à notre enseignement sa <u>simplicité</u> et son <u>efficacité</u> anciennes en ce qui concerne <u>l'acquisition des mécanismes fondamentaux</u>

2° le fonder davantage sur les faits, sur l'observation personnelle, afin de donner à la jeunesse française le grand bain de <u>réalisme</u> dont elle a besoin".

Toujours dans les instructions de 1945, on trouve :

"La tâche de faire acquérir les notions essentielles définies par les programmes et d'assurer leur bonne compréhension, passée jusqu'à leur mise en oeuvre dans des applications variées et bien choisies, est largement suffisante pour utiliser pleinement et efficacement toutes les heures de classe". (Cf 20)

Le but de l'enseignement mathématique semble être alors essentiellement utilitaire.

"Le premier objet de nos leçons et exercices de calcul est de donner à nos écoliers le moyen de calculer correctement. Une initiation mathématique qui n'aboutirait pas à la pleine maîtrise des opérations élémentaires du calcul manquerait évidemment son premier but". (Cf 22)

Ce premier but est donc manqué puisque une enquête faite en 1950 signale l'insuffisance du calcul numérique (déjà !...). Voici des moyennes des réponses exactes :

- fin d'études primaires :	addition	70 %	multiplication	66 %
	soustraction	77 %	division	51 %
- cours complémentaire :	addition	94 %	multiplication	47 %
	soustraction	83 %	division	53 %

Cette enquête rapportée dans "l'arithmétique et la géométrie à l'école primaire" est confirmée par de nombreuses communications à des publications pédagogiques émanant d'instituteurs de directeurs d'écoles primaires, d'inspecteurs de l'enseignement primaire se faisant l'écho des doléances d'employeurs. Aucune explication n'est donnée à cette insuffisance. (Ceci bien avant 1970 !!!)

Ainsi que le préconisent les instructions de 1887, 1923 et 1945 la méthode utilisée dans l'enseignement des mathématiques doit être intuitive et concrète.

"L'intuition sensible place les choses avant les mots. Elle éclaire l'esprit en le mettant en contact avec la réalité de la vie. Son emploi est une réaction contre l'enseignement verbal.
Veut-on faire connaître à de jeunes enfants une plante, une fleur, un fruit : point de longues et ennuyeuses explications. La plante, la fleur le fruit sont mis sous leurs yeux ; ils les voient, les palpent, les sentent, les soupèsent. Se propose-t-on dans l'enseignement du calcul, de leur donner l'idée des premiers nombres, point de théorie sur la numération. On place devant eux des batonnets, des marrons, des cailloux..." (Cf 24)

Ce procédé trouve sa justification psychologique :

"Procéder avec les débutants, c'est se conformer aux lois de l'évolution mentale, l'esprit du jeune enfant aime en effet, à se porter sur les choses, mais répugne à l'abstraction". (Cf 24)

L'organisation des programmes en 1887 semble d'autre part induire la méthode concentrique (les nombres et les quatre opérations dès le cours préparatoire par exemple). Dans les ouvrages pédagogiques on recommande la répétitio

"Il ne faut pas craindre la répétition ; l'éducation maternelle ne connaît guère d'autre procédé ; il est celui de la nature...
Dans l'âme de l'enfant, les idées naissent, au défilé des choses. C'est par la répétition surtout qu'elles se fixent, et sans le jeu de la mémoire, mettant pour ainsi dire une plaque photographique au fond de l'oeil, une plaque phonographique au fond de l'oreille". (Recueil des monographies pédagogiques, tome 4 p. 347 1889).

Même si des réserves apparaissent en 1923, quant à l'efficacité de cette méthode en général, elle semble rester valable jusque vers 1970 en mathématique.

b) 1970

La publication de l'arrêté du 2 janvier 1970 définissant le programme de mathématique de l'enseignement élémentaire est une étape dans la mutation de l'école élémentaire souhaitée par la Commission Ministérielle de Rénovation Pédagogique.

"L'enseignement mathématique à l'Ecole Elémentaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l'évolution contemporaine de la pensée mathématique.
... l'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquerir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par "la vie courante", mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques,... de leur fournir des modes et des outils de pensée plus puissants, capables de s'appliquer à des situations imprévues et avant tout de construire ces outils". (1ère étape - A.P.M.E.P.)

La réforme ainsi envisagée paraît correspondre à la convergence d'un certain nombre de réalités que sont l'évolution du progrès technique en rapport avec l'évolution des mathématiques d'une part, le renouveau des conceptions pédagogiques en liaison avec l'apport de la psychologie, d'autre part.

On demande aux maîtres de donner à ses élèves "*une véritable formation mathématique qui leur permette, à partir de l'observation et de l'analyse de situations familières, de dégager des concepts mathématiques, de les reconnaître, et de les utiliser dans des situations variées, de s'assurer ainsi de la maîtrise d'une pensée mathématique disponible et féconde*". (1ère étape APMEP)

Il s'agit donc de s'attacher plus à l'aspect qualitatif des connaissances qu'à leur aspect quantitatif.

D'autre part, on invite les maîtres à réfléchir à l'enseignement du calcul à la lumière des conceptions nouvelles des mathématiques afin de mieux pratiquer des méthodes actives, méthodes dont l'emploi était déjà préconisé en 1923 mais qui étaient peu utilisées surtout en mathématique.

c) 1977

Seuls les objectifs pour l'enseignement des mathématiques au cycle préparatoire sont parus.

> *"Au cycle préparatoire, comme à tous les niveaux de l'école primaire, il importe de partir de situations tirées du vécu de l'enfant et liées à ses intérêts spontanés ou provoqués et de les exploiter collectivement et individuellement.*
> *L'observation et l'analyse de ces situations multiples et variées auront pour objectifs généraux :*
> *a) de faire apparaître les éléments et structures communs afin de dégager les notions essentielles que l'enfant doit acquérir.*
> *b) de représenter les modèles correspondants à l'aide de signes et symboles ou sous forme schématique (diagrammes, tableaux...) et ainsi à la fois de préciser ces notions et de les rendre conceptuellement utilisables.*
> *c) de répondre aux questions, de donner une solution aux problèmes qui peuvent se poser en mettant en oeuvre les techniques acquises ce qui permet à l'enfant de confirmer ses connaissances.*
> *Ainsi se développeront d'une certaine investigation et d'une certaine imagination le goût de la recherche, ainsi s'acquerront des techniques indispensables et l'habitude de la précision de langage et de pensée dans la communication des résultats. Toutes qualités nécessaires aussi bien aux besoins de la vie courante, à la formation de l'esprit ainsi qu'à la prolongation ultérieure des études".*

III - PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES POUR LA PREMIERE ANNEE DE L'ECOLE OBLIGATOIRE

1) Arrêté du 18 Janvier 1887

- Section des petits enfants (de 2 à 5 ans) ou 2ème section
    - familiariser l'enfant avec les termes : un, deux, trois, quatre cinq, moitié, demi : l'exercer à compter jusqu'à dix.
    - calcul mental sur les dix premiers nombres.

- Section des enfants de 5 à 6 ans ou 1ère section
    - premiers éléments de la numération orale et écrite petits exercices de calcul mental ; addition et soustraction sur des nombres concrets ne dépassant pas la première centaine.
    - étude des dix premiers nombres et des expressions demi, moitié, tiers, quart.
    - les quatre opérations sur des nombres de deux chiffres
    - le mètre, le franc, le litre.

Le programme de la section des enfants de 5 à 6 ans est le même que celui de la section des enfants de 5 à 7 ans (section enfantine).

Horaire : 3h 3/4 par semaine.

2) Arrêtés du 23 Février 1923

- Section préparatoire (6 à 7 ans)
    - premiers éléments de la numération ; compter les objets ; en écrire le nombre jusqu'à dix puis cent.
    - petits exercices de calcul oral ou écrits (sans dépasser 100)
    - ajouter ou retrancher des groupes d'objets ; additionner ou soustraire les nombres correspondants.
    - compter par 2, par 3, par 4 ; multiplier par 2, par 3, par 4, diviser des groupes d'objets en 2, 3, 4 parts égales.

"Les idées directrices de l'ancien programme ne sont pas davantage abandonnées. Si nous avons modifié le texte de 1887, c'est pour en mieux marquer l'esprit...
Par exemple, le texte de 1887 : "premiers éléments de la numération écrite" a été traduit en 1923 par : "compter des objets, en écrire le

nombre". "Les quatre opérations sur des nombres" est devenu "ajouter ou retrancher des groupes d'objets additionner ou soustraire les nombres correspondants ; compter par 2, par 3, par 4, multiplier par 2, par 3, par 4".

3) 1945

- Cours préparatoire

  - étude concrète des nombres de 1 à 5, puis de 5 à 10, puis de 10 à 20.
    formation, décomposition, nom et écriture ; usage des pièces de 1, 2, 5, 10 francs, du décimètre et du double-décimètre gradués en centimètre.
    Les nombres de 1 à 100 ; dizaines et demi dizaines compter par 2, par 10, par 5. Usage du damier de 100 cases, et du mètre à ruban.
    Exercices et problèmes, concrets d'addition, de comparaison et de soustraction (nombre d'un chiffre, puis de 2 chiffres) de multiplication et de division par 2, par 5.

- Ecole maternelle

  - petite section (2 à 5 ans), calcul :
    groupements très variés d'objets semblables : 2, 3, 4, 5, jusqu'à 10, et compte de ces objets (sacs individuels de cailloux, bâtonnets, coquillages, etc...)
  - grande section (5 à 6 ans), calcul :
    groupements d'objets : 20, 30, 40, jusqu'à 50 (sacs individuels) demi ; moitié ; tiers ; quart.
    Petits exercices de calcul mental : additions, soustractions, multiplications, divisions ; représentation des nombres, de l'unité jusqu'à 50 petits exercices écrits de calcul avec dessins correspondants ; exercices et jeux avec le mètre, le franc, le litre, les poids (balance, kilogramme, demi-kilogr.)

4) Arrêté du 2 Janvier 1970

- Cours préparatoire

    - activités de classements et de rangement
    - notion de nombre naturel
    - nommer et écrire les nombres
    - comparer deux nombres
    - somme de deux nombres.

horaire : 5h par semaine.

5) Arrêté du 18 Mars 1977

- programme et objectifs du cycle préparatoire
    1 - manipuler et connaître les objets et les collections d'objets reconnaître des propriétés, classer et ranger, mettre en correspondance
    2 - connaître le nombre
      a) dégager la notion de nombre
      - mettre en correspondance terme à terme : autant que plus que, moins que.
      - classer les collections d'objets.
      - associer un nombre à une classe de collections d'objets
      b) présenter la numération écrite et parlée décimale
      - écrire, nommer les nombres
      - présenter la numération décimale écrite et parlée
      - étudier des nombres de un et deux chiffres
      - écrire et utiliser des égalités du type 27=20+7
      c) comparer des nombres
      - utiliser les signes =, $\neq$, <, >
      - écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.
    3 - calculer sur les nombres
      a) somme, addition
      - analyser, reconnaître et représenter les situations faisant intervenir la somme de deux nombres ; utilisation du signe + ; addition
      - élaborer la table d'addition, l'utiliser et se familiariser

avec les résultats en vue de leur mémorisation ; calcul mental ; signification et utilisation des parenthèses.

- élaborer une technique opératoire de l'addition
- reconnaître, analyser, représenter les situations pouvant s'exprimer sous la forme a+.=c

b) étudier et traiter quelques problèmes simples

4 - se situer dans l'espace et l'organiser

a) se situer

- positions relatives d'objets par rapport à soi-même, par rapport à un ou plusieurs repères ou les uns par rapport aux autres.
- déplacements, itinéraires, parcours selon les conventions
- utilisation des quadrillages et tableaux : repérage

b) reconnaître des formes et figures simples

- courbes et domaines : intérieur, extérieur
- pavages, mosaïques, puzzles

c) organiser

- pliages, découpages
- successions régulières, frises...
- jeux d'emboitements, de construction.

IV - EVOLUTION DANS L'APPRENTISSAGE DE LA NOTION DE NOMBRE

a) Avant 1970

Dans l'apprentissage des premiers nombres entiers

Avant 1970, on l'a vu précédemment, l'enseignement du calcul doit être intuitif et pratique. Quand l'enfant apprend les nombres entiers, il s'agit donc de le mettre en présence de collections d'objets, de lui apprendre le nom et l'écriture du nombre de ces collections.

Cet apprentissage n'est pas si facile. L'enfant ne comprend pas toujours la signification du nombre et cette notion est jugée par tous depuis 1887 déjà, comme trop abstraite pour un tout jeune enfant.

> *"Le jeune enfant n'a pas l'idée du nombre. Trois, quatre ne lui disent rien de précis. Mais trois billes, quatre crayons ont pour lui un véritable sens. Il est donc nécessaire de se servir d'objets pour l'initier au calcul. S'adresser à ses sens est le plus sûr moyen d'arriver à son intelligence".* (Cf 22 p. 343) (1889)

> *"Le nombre que nous appelons abstrait doit se présenter à l'esprit de l'enfant comme le résumé de ce qui aura été fait à propos des billes, des haricots, des tables... des objets les plus divers afin de graver en lui le caractère universel de l'emploi du nombre entier dans l'évaluation des collections d'objets".* (1927 Cf 25 p. 14)

En 1923, on consacre cette méthode qui consiste, au cours préparatoire, à placer dans les mains des enfants des objets qu'ils ont à "grouper, séparer, combiner de diverses manières pour se rendre compte, par les yeux et par la main de la signification réelle des calculs les plus simples" (Instructions officielles 1923).

l'opération manuelle doit précéder l'opération arithémtique

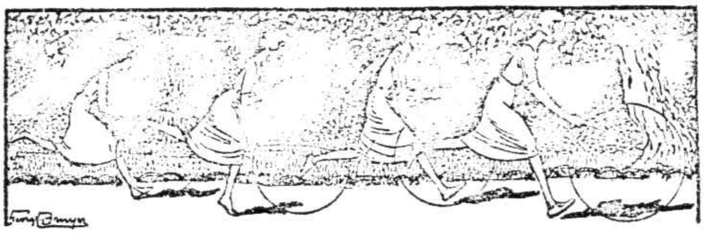
Ces directives des instructions officielles sont présentes dans les manuels scolaire de l'époque. BOUCHENY et GUERINET dans l'arithmétique enfantine (Edition 1932) s'adressent aux maîtres ainsi :

> *"... Tout d'abord, l'enfant "compte des objets" ; il les manie, il les combine de diverses manières, il les groupe et les sépare ; il réalise en un mot, sur les objets eux-mêmes, les opérations fondamentales du calcul.*
> *Puis il dessine ces objets et les groupements qu'il en fait.*
> *Il répète ensuite sur les nombres représentant les objets qu'il a vus, maniés et dessinés les opérations qu'il vient de faire..."*

Les leçons qui suivent cette introduction sont toutes construites selon cette démarche.

Regardons l'apprentissage du nombre quatre.

— 9 —



Quatre fillettes — Quatre cerceaux...

2ᵉ *Leçon.* — COMPTONS QUATRE BOUTONS

Matériel de la leçon. — Jeux de 1 bouton, de 2, de 3, de 4. Sacs individuels de bûchettes. Collections de 4 objets de même espèce : billes, plumes, crayons, livres,...

Le nombre quatre. — Comptons trois boutons. A côté de ces trois boutons, plaçons un autre bouton ; nous avons **quatre** boutons. *(Montrer le carton portant 4 boutons.)*

4 boutons

FIG. 4.

Dessinez quatre boutons.

Écrivons **quatre, 4.**

Le **chiffre 4** représente le nombre **quatre**, c'est-à-dire quatre **unités**.

Le nombre 4 est **plus grand** que le nombre 3 ; le nombre 3 est **plus petit** que le nombre 4.

D'une façon générale, *de deux nombres, celui qui est le plus grand est celui qui renferme le plus d'unités.*

Exercices.

1. — Reconnaître le carton qui porte 4 boutons, ceux qui en portent 3, 2, 1.

2. — Montrer 4 doigts. Prendre 4 bûchettes, 4 crayons. Montrer un objet qui a 4 pieds. Nommer des animaux à 4 pattes.

3. — Compter de 1 à 4, de 4 à 1.

4. — Compter 4 élèves. Montrer le 4ᵉ. Faire partir les 3 autres.

5. — Grouper 4 élèves. Dire combien il en reste si l'on en fait partir un, puis un autre, et encore un autre.

6. — Disposer des bûchettes de la façon suivante et dire combien on en a, dans chaque cas :

7. — Combien font 3 et 1 ? 2 et 2 ? 1 et 3 ? 2 fois 2 ?

8. — Alain avait 3 livres; on lui en donne un autre. Combien en a-t-il ?

9. — Josette a 2 cahiers; elle en prend 2 autres. Combien en a-t-elle ?

10. — Mireille colle des gravures sur un album. Elle en colle d'abord une, puis 3 autres. Combien a-t-elle collé de gravures ?

11. — Paul a 4 billes. Il en donne une. Combien lui en reste-t-il ? Combien lui en serait-il resté s'il en avait donné 2 ? 3 ?

12. — Écrire les nombres de 1 à 4, puis de 4 à 1.

13. — Ranger dans un ordre croissant, c'est-à-dire du plus petit au plus grand, les nombre 3, 1, 4, 2.

14. — Écrire et compléter :

1 et 1 font ...	1 et 2 font ...
2 et 1 font ...	2 et 2 font ...
3 et 1 font ...	1 et 3 font ...

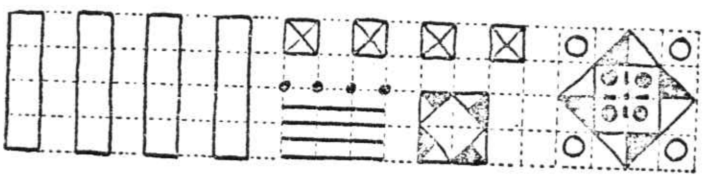
15. — Écrire 4 fois la lettre *i*, 3 fois la lettre *t*.

16. — Écrire 4 mots de 4 lettres chacun.

17. — Prendre 4 bûchettes. Les placer en X. Dessiner les groupes formés.

18. — Dessiner 4 points, 4 bâtons, 4 croix, 4 ronds.

19. — Dessiner un bandeau en utilisant un des motifs donnés ci-dessous. (On pourra colorier les dessins.)



Trois boutons et un bouton font quatre boutons

Quatre boutons et un bouton font cinq boutons

...

Huit boutons et un bouton font neuf boutons.

L'enfant apprend ainsi les nombres jusqu'à neuf et l'ordre dans ces nombres vient "naturellement". On la prépare aussi au cours de ces premières leçons à l'étude de l'addition et de la soustraction en faisant grouper et séparer des objets. Les exercices 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14 de la leçon "comptons quatre boutons" se retrouvent à peu près sous la même forme dans l'étude de chacun des neuf premiers nombres.

Dans cette progression, l'addition est introduite après l'étude du nombre neuf.

— 21 —

8e *Leçon.* — LA NOTION D'ADDITION
Revision des nombres de 1 à 9.

Matériel. — Le même que précédemment. On pourra également, pour varier les exercices, constituer un jeu de cartons représentant des cerises, des ballons, ...

Ajoutons. — **Jean cueille d'abord un bouquet de 2 cerises, puis un bouquet de 3. Combien a-t-il de cerises en tout ?**

$2 + 3 = 5$

Fig. 12.

Jean a :

2 cerises et 3 cerises, soit 5 cerises.

— **Pierre reçoit d'abord 5f, puis 4f. Combien a-t-il reçu en tout ?**

Pierre a reçu en tout :

Fig. 13.

$5^f + 4^f = 9^f$.

— Jean et Pierre font une **addition**.

Quand on groupe des objets de même espèce, on fait une addition.

On indique l'addition par le signe +, **plus**.

Le résultat de l'addition s'appelle **total**.

Devant le total, on place le signe =, **égal**.

On exprime l'addition ainsi : 2 cerises + 3 cerises = 5 cerises.

Ou, plus simplement : 2 + 3 = 5 cerises.

$2 + 3 + 4 = 9$

Fig. 14.

De même : 5 + 4 = 9 francs.

— **René cueille 2 cerises, puis 3, puis 4. Combien a-t-il de cerises ?**

René a :

2 + 3 + 4 = 9 cerises.

$$\begin{array}{r} 2 \\ +3 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ +3 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$$

— On peut écrire les nombres à ajouter en lignes comme ci-dessus, ou en colonnes, comme il est indiqué ci-contre.

Exercices.

1. — Dessinons et ajoutons des jetons :

OO + OOO = OOOOO   2 + 3 = ...

OOO + OOOO = ...   3 + 4 = ...

OOOO + OOOOO = ...   4 + 5 = ...

Puis vient la soustraction.

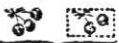
— 23 —

9e Leçon. — **LA NOTION DE SOUSTRACTION**

Revision des nombres de 1 à 9.

Matériel. — *Le même que précédemment. Jeu de cartons de différentes couleurs représentant soit des ballons, soit des cerises, soit des pommes,... permettant de reprendre les exercices faits avec les cartes de boutons.*

Retranchons. — Jean avait 5 cerises. Il en mange 2. Combien lui en reste-t-il?



$\begin{array}{r} 5 \\ -2 \\ \hline 3 \end{array}$

5 cerises
5-2=3 cerises

FIG. 15.

Il lui reste : 5 cerises — 2 cerises = 3 cerises.

— Pierre a 9 jetons. Il en donne 4. Combien lui reste-t-il de jetons?

Il lui reste : 9 jetons — 4 jetons = 5 jetons.

9 {OOOOO
  OOOO

9-4=5 jetons

FIG. 16.

— Jean et Pierre ont fait une **soustraction**.

Soustraire, c'est retirer, retrancher, ôter, enlever...

On indique la soustraction par le signe —, **moins**.

Le résultat de la soustraction s'appelle **reste** ou **différence**.

$\begin{array}{r} 5 \\ -2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ -4 \\ \hline 5 \end{array}$

On peut écrire les nombres à retrancher l'un au-dessous de l'autre, le plus petit sous le plus grand.

On dit : 2 ôté de 5, il reste 3;
4 » 9, » 5.

... La multiplication par 2 et la division par 2. Ces quatre leçons doivent permettre de traduire à l'aide de signes les opérations manuelles faites sur les objets d'une part et la revision des neufs premiers nombres d'autre part.

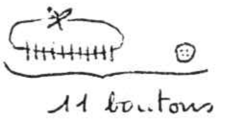
Les nombres de 10 à 100 sont introduits après :

<u>Le nombre dix</u> : *"Comptons neuf boutons. A côté de ces neufs boutons, plaçons encore un bouton ; nous avons <u>dix</u> boutons".*

10 boutons

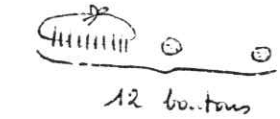
Une dizaine de boutons

<u>Le nombre onze</u> : *"Prenons dix boutons ou une dizaine de boutons. A côté de ces dix boutons, plaçons un autre bouton ; nous avons dix et un ou <u>onze</u> boutons"*



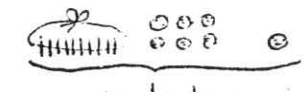
"Le nombre onze représente une <u>dizaine</u> et une <u>unité</u>. Il s'écrit 11".

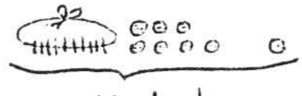
<u>Le nombre douze</u>

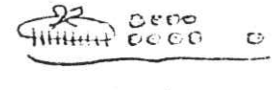


...

Puis dix-sept, dix-huit, dix-neuf.







Le nombre dix est introduit comme les autres et on explique son écriture en faisant un paquet de dix : une dizaine ;

"Il ne reste plus rien ; on peut donc dire : il y a un paquet et rien de plus, ce qu'on peut écrire 1 et 0... L'enfant concevra ainsi tout naturellement la façon d'écrire les nombres de 10 à 19, car son premier soin devra toujours être de réunir dix bûchettes en un paquet et de compter les bûchettes qui restent..." (Cf 21)

'étude des euf premiers ombres est ondamentale

On trouve d'autres propositions mais partout on insiste sur l'étude des premiers nombres. GOUMY dans "l'Arithmétique et la Géométrie à l'école primaire" (cf 21) écrit que c'est *"faciliter singulièrement la route que d'imiter l'enfant à la connaissance de tout ce que renferment les neuf premiers nombres"*. Il suggère d'introduire le signe "+" et le signe "-" dès l'étude du nombre trois et propose les étapes suivantes.

> *"Tout d'abord, faire reconnaître le nombre en effectuant devant l'enfant et en lui faisant effectuer de nombreux groupements d'objets correspondants tous au nombre à étudier.*
>
> *- lui enseigner le signe que représente ce nombre.*

- *décomposer et recomposer ce même nombre, en utilisant les groupements d'objets déjà connus et les nombres correspondants et représenter graphiquement toutes ces associations sous forme d'opérations.*
- *tirer de là de nombreux petits exercices d'addition et de soustraction, conçus de telle sorte qu'un des éléments sur trois soit représenté par un point, que l'enfant doit remplacer par le chiffre qui convient".*

Prenant l'exemple du nombre sept, il propose des exercices dont il ne nie pas la difficulté : *"Le maître tient 5 bûchettes dans une main, l'enfant écrit sur son ardoise le nombre 5. Le maître prend deux bûchettes dans l'autre main et l'enfant écrit le nombre 2, puis le maître réunit les deux bûchettes aux cinq premières et après avoir constaté le résultat, l'enfant écrit sur son ardoise : 5+2 = 7".*

L'enfant apprend ainsi que	7=1+6	et 7-1=6
	7=2+5	7-2=5
	7=3+4	7-3=4
	7=4+3	...

Et il "utilise son premier savoir" en faisant quelques exercices du type

7-1=.	6+.=7	.+5=7
7-5=.	4+.=7	
7-.=6	5+1+.=7	
7-.=2	2+2+.=7	......

Toutes ces écritures doivent être des traductions de gestes et de manipulations de collections.

mais difficile d'où l'idée d'utiliser des nombres concrets

Tous les pédagogues sont donc d'accord pour dire que "l'opération manuelle doit précéder l'opération arithmétique" (I.O 1923) mais personne ne nie la difficulté qu'il y a pour "l'enfant de passer de cinq bille ajoutées à trois billes à 5+3, de s'élever du nombre dit <u>concret</u> au nombre dit abstrait (cf 25 p. 25). Dans son souci de "se mettre à la portée des enfants" GOUMY écrit :

"Le nombre doit rester pour l'enfant intimement lié aux objets concrets

et de même nature dont il représente le groupement".

Quand GOUMY conseille (1432) l'emploi de nombre concrets cela veut dire pour lui que toute opération doit avoir un support concret, mais qu'il faut aussi "arithmétiser les problèmes le plus tôt possible". Il conteste l'emploi d'écritures du type 5 billes + 3 billes ; 36 oeufs × 8

"Si on désire savoir combien 8 paniers contiennent d'oeufs, sachant qu'il y en a 36 dans chaque paniers, n'est-il pas plus simple de faire comprendre et dire à l'enfant que le nombre d'oeufs est donné par l'opération 36×8 et ne pas écrire 36 oeufs × 8. Pourquoi le nombre 36 représentant des oeufs serait-il concret et le nombre 8 représentant des paniers abstrait ?"
(Cf 21 p. 76)

Malgré des divergences d'opinions, les nombres concrets sont officialisés en 1945 dans les programmes et instructions.

CP ... *"Etude concrète des nombres de 1 à 5, puis de 5 à 10, puis de 10 à 20... "*

CE ... *"Dans les exercices on dira toujours utiliser des nombres concrets c'est-à-dire des nombres (entiers) suivis d'un nom d'objet (élève, bérèt,...) ou d'une unité : franc, gramme, centimètre..."*

"... Un nombre concret n'est qu'un renseignement sur une grandeur qui doit être complété par l'indication de ce qu'on veut faire de cette grandeur : 15 pommes, ce peut être 15 pommes qu'on ajoute à d'autres, qu'on veut partager...
Au cours moyen seulement on rencontrera des exemples de nombres abstraits et indépendants des unités dans l'étude des pourcentages et des fractions simples..."

La manipulation de matériel varié, point de départ indispensable dans l'approche de la notion de nombre ne fait pas l'unanimité.

"Les livres de calcul les plus récents offrent à la vue toutes sortes de collections d'objets hétéroclites, "pittoresques" ou "vivants" : lapins, cocottes, tulipes, carottes, avions, diablotins... Nous avouerons sans ambage notre peu de goût pour tout ce bric-à-brac. Il a le grave

inconvénient de détourner l'attention de l'enfant sur le pittoresque individuel ou le caractère émouvant de chaque objet. L'enfant a qui l'on présente 5 lapins se mettra peut-être à rêver nostalgiquement au petit lapin blanc qu'il élève chez lui, ou bien il observera que le 3ème des lapins figurés sur l'image laisse tomber nonchalamment l'oreille gauche alors que tel autre lève avec brio sa courte queue touffue. Dans la mesure même où le dessinateur aura égayé son dessin de détails vivants il détournera l'attention de l'enfant du seul point qui importe, qui est de l'amener, en dépassant l'observation concrète, à la notion d'une collection absolument homogène." D'où la nécessité de présenter aux enfants des collections d'objets aussi "insignifiants" que possible (30 p. 15-16). D'ailleurs le matériel varié est de plus dangereux et peu pratique : *"Les marrons sont encombrants et roulent, les haricots enfoncés dans le nez et les oreilles ont causé de multiples ennuis..."* (30 p. 45)

La vision globale du nombre

L'utilisation de matériel varié est parfois contestée et l'on se dirige vers la recherche d'image du nombre ou figure du nombre.

Une autre préoccupation apparaît en 1945 : les enfants doivent être habitués "à reconnaître, sans énumérer, de un à cinq objets ; d'abord sur des dispositions géométriques simples, puis sur des objets groupés en ligne, puis sur des objets sans ordre" (I.O). On parle alors de notion globale du nombre, c'est-à-dire de "la possibilité pour un enfant de reconnaître, de nommer et d'écrire le nombre d'objets d'une collection, sans avoir besoin de ranger ces objets et de les numéroter dans l'ordre des nombres" (cf 29 p. 85). S'il est difficile de déterminer avec précision jusqu'où doit aller cette perception globale (4? 5? 9?), on imagine des images du nombre partiellement géométriques qui doivent aider la mémoire globale du nombre d'une part et le souvenir de diverses décompositions d'autre part.

Ainsi : *"Pour avoir véritablement la notion d'un nombre, il faut pouvoir le reconnaître sous ses aspects divers, connaître son nom, sa figure, sa constitution"* (I.O 1945)

Qu'est-ce qu'une figure numérique ? Dans "l'enfant et le nombre" (Didier 1945), on trouve la définition suivante : *"Les figures numériques sont des dispositifs géométriques d'unités, propres aux petits nombres ; chacun de ces nombres se présente alors sous une physionomie particulière qui en donne une perception instantanée sans qu'il soit besoin de compter". On peut aussi "reconnaître le nombre d'une seule vue, sans avoir à dénombrer unité par unité ce qui ramènerait "à la routine du dénombrement mécanique"*. Ces constellations semblent pour les auteurs de "l'enfant et le nombre" la meilleure façon de donner aux enfants la notion de nombre : *"Ce n'est pas, nous semble-t-il en remuant l'un après l'autre les 4 jetons d'une collection que l'enfant forme la* *notion de 4 et des décompositions. Ce serait plutôt, croyons-nous, en contemplant, à bonne distance, et d'une vue d'ensemble, simultanée, la constellation de 4 objets, que l'enfant sera illuminé par le nombre 4, qui est 2+2 et 3+1... Seul l'oeil contemplant saisit la forme d'ensemble de la collection constellante par delà les unités et permet à l'esprit de l'enfant de concevoir en lui la notion numérale en dehors de toute action réelle".*

La figure numérique *"contribue d'autant mieux à l'acquisition de la notion du nombre correspondant qu'elle est de "bonne forme". "Des expériences ont été faites à ce sujet et voici les résultats obtenus :*

- la forme ronde a été reconnue la meilleure, les formes longues sont les moins bonnes (inconvient des bûchettes)

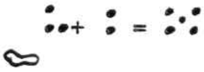
- la distance la plus convenable entre deux cercles d'un carré est un écartement qui ne doit pas être inférieur aux 3/4 du diamètre d'un cercle et pas supérieur à ce diamètre. La bonne distance entre ces deux groupes est le double de ces distances. Les couleurs vives et contrastées sont favorables à la perception et à la fixation des souvenirs". (cf 39)

Il existe plusieurs systèmes de figures numériques, et les préférences varient suivant les auteurs. Qu'est-ce qu'une figure de "bonne forme" ? Il ne semble pas y avoir de réponse universelle. L'un des auteurs, CANAC, expose son propre système :

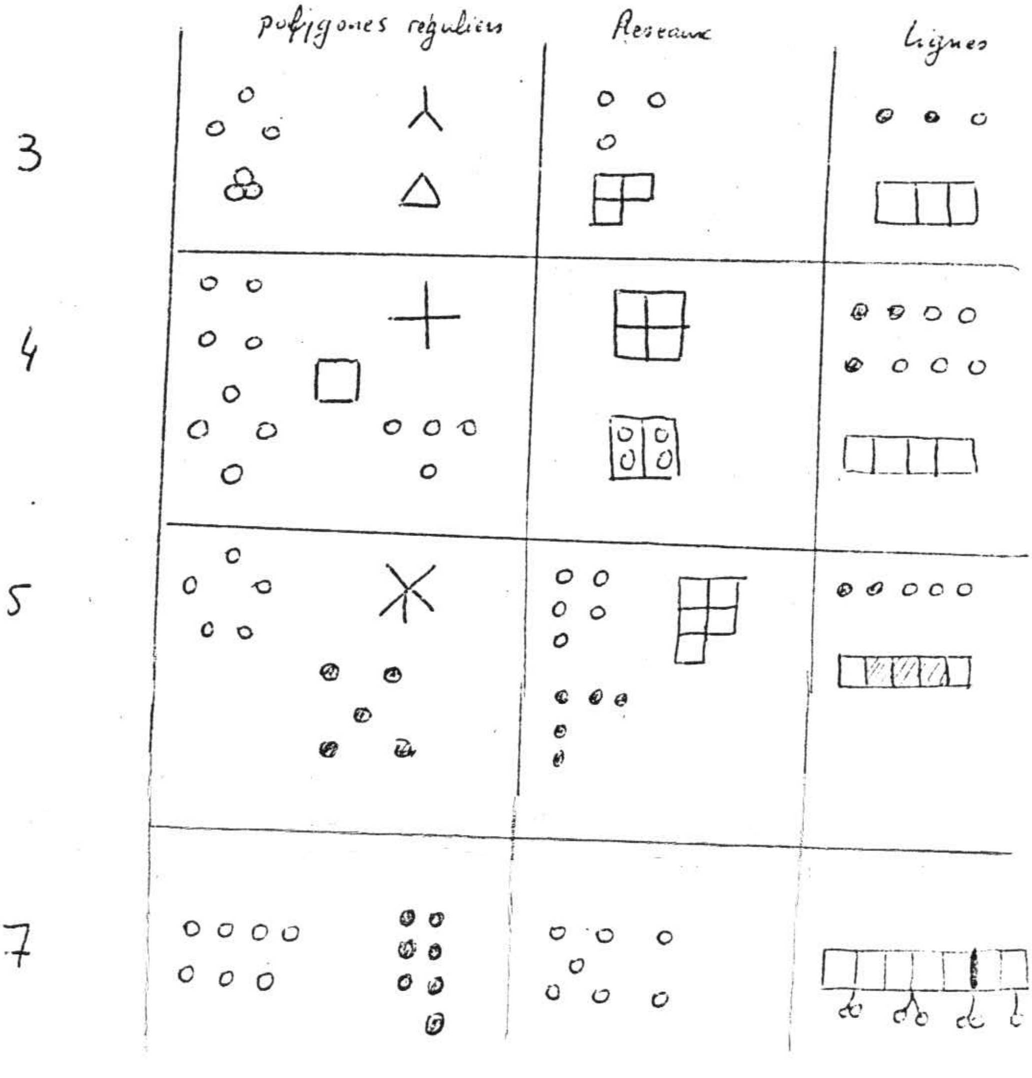
"On associera l'idée de 3 avec la forme du triangle, et le premier triangle présenté sera équilatéral, parce que ce triangle est le plus régulier et le plus beau". On découvre ici un autre intérêt des constellations : *"Ainsi, dès le début, l'esprit de l'enfant est enrichi de formes géométriques fondamentales et d'une grande beauté décorative"* (39 p. 18)

L'idée de 4 sera bien sûr associé au carré, mais *"nous ne voyons pas l'intérêt qu'il y aurait, avec de si jeunes enfants, à mettre en évidence, à propos de 5, le pentagone, figure difficile à reconnaître et à tracer, asymétrique, disgrâcieux, biscornu ; et la meilleure représentation de 5 est sans doute le domino correspondant."*

Pour les nombres de 6 à 10 les constellations seront constituées de plusieurs fragments. *"Il semble indiqué, par exemple, de présenter 6 sous la forme du domino correspondant, qui est 2 fois 3, ou 3 fois 2.. huit serait figuré par le domino double quatre... Quant à 7, nombre sauvage et remarquablement dépourvu d'affinité intéressantes, on peut le figurer par le schéma 4+3, faute de mieux".* (39 p. 22)

Les constellations deviennent, en quelque sorte, une autre représentation du nombre ; on n'hésite d'ailleurs pas à écrire  et dans la méthode BOSCHER (1959) on trouve 
(attention ! ce sont des haricots)

Des exemples



b) 1970 Etape vers une réforme de l'enseignement mathématique...

Dans le cadre de la rénovation pédagogique, la réorganisation de l'enseignement du calcul est mise en place en 1970. Le programme du cours préparatoire se réduit aux chapitres suivants :

"Activités de classement et de rangement
Notion de nombre naturel
Nommer et écrire les nombres
Comparer deux nombres
Somme de deux nombres"

Le courant mathématique moderne, associé aux travaux de BOURBAKI orientent les commentaires qui accompagnent ces programmes :

e nombre naturel st attaché à des lasses d'ensembles

"C'est par des manipulations nombreuses d'ensembles d'objets que les enfants élaborent peu à peu la notion de nombre naturel. Il est essentiel de bien comprendre que le nombre naturel n'est ni un objet, ni une propriété attachée à des objets, mais une propriété attachée à des ensembles...
La notion de nombre naturel comme propriété d'un ensemble apparaîtra dans la mesure où l'on pourra établir une mise en correspondance terme à terme entre ensembles."
"L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permettra de classer les collections et d'attribuer à chaque classe un nombre : ainsi, la classe de tous les ensembles qui ont autant d'objets que l'on a de doigts dans une main définit le nombre naturel "cinq". Cinq doigts, cinq enfants, cinq fruits... ne sont pas des nombres : le nombre cinq

est une propriété commune à l'ensemble des doigts d'une main, à un groupe d'enfants, au contenu d'une coupe de fruits".

Dans un souci de rigueur, les notions qui conduisent au nombre cardinal sont dégagées :

Les commentaires du programme et les présentations faites dans les manuels scolaires reposent aussi sur l'idée nouvelle que la notion de nombre naturel peut se construire. Les travaux de PIAGET ont largement contribué à ce changement. "Le souci majeur du maître étant de donner aux élèves, dès le début de la scolarité une formation mathématique véritable" chacun va s'efforcer de comprendre ce concept de nombre et d'en dégager les différents aspects. Or, la théorie sous-jacente aux commentaires du programme est la théorie des cardinaux avec comme point de départ : "Un ensemble E a autant d'éléments qu'un ensemble F si, et seulement si, il existe une bijection de E vers F".

ensembles,

Ainsi, le nombre est propriété d'ensembles, il paraît alors nécessaire de travailler la notion d'ensemble avec les enfants.

relations,

- la correspondance terme à terme est une relation entre ensembles ; Il semble indispensable de s'intéresser dès le CP à diverses relations entre ensembles et d'en trouver des représentations.

relations d'équivalence,

- la correspondance terme à terme permet d'établir une relation d'équivalence entre ensembles. On propose parfois l'étude de toutes les propriétés : réflexivité, symétrie, transitivité ?

- la correspondance terme à terme classe les ensembles. Certains pensent qu'il *"faut apprendre aux enfants à classer des ensembles en ensembles équivalents"* (DIENES cf 31) d'où la nécessité d'introduire des activités de classement dès la maternelle.

la présentation traditionnelle est fondamentalement remise en cause : 4 n'est plus 3 et 1 et les nombres concrets n'existent plus.

Il ne s'agit plus en 1970 d'utiliser la suite ordonnée des nombres (un, deux, trois, ...) pour déterminer le nombre d'éléments d'une collection, ni de définir 4, comme étant 3 et 1. La mise en ordre des nombres ne fait après, à l'aide de la relation "a plus d'éléments que" ; 3+1 apparaît comme une autre façon d'écrire 4 quand la notion de somme a été introduite à l'aide de la réunion d'ensembles.

Les nombres sont des "objets mathématiques, c'est-à-dire essentiellement abstrait : il est donc impossible de parler de nombres concrets" (Math et calcul, livre du maître 1972).

> *"On ne répètera jamais assez que le nombre n'est pas du tout une chose. C'est une propriété, tout comme la rougeur des joues ou la noirceur de la nuit ou la rondeur d'une tour... Des nombres connus, deux, trois, quatre n'existent pas "concrètement". Deux est la propriété de tout ensemble de deux objets" (cf 31 p* 23*)*

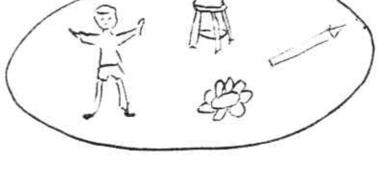
> *"Deux fleurs, cinq pommes ne sont pas, en fait de nouvelles espèces de nombres. Ce sont des descriptions abrégées d'ensembles ayant pour objets des fleurs ou des pommes et pour nombre respectif deux et cinq".* (Touyarot. Itinéraire mathématique livre du maître 1967)

Ces idées qui se dégagent alors des commentaires des programmes et de la plupart des ouvrages pédagogiques ont été diversement interprétées. Mais dans leur grande majorité, les manuels ou fichiers destinés aux enfants proposent des activités sur les ensembles et sur les relations avant d'introduire les premiers nombres à l'aide de la correspondance terme à terme.

es ensembles

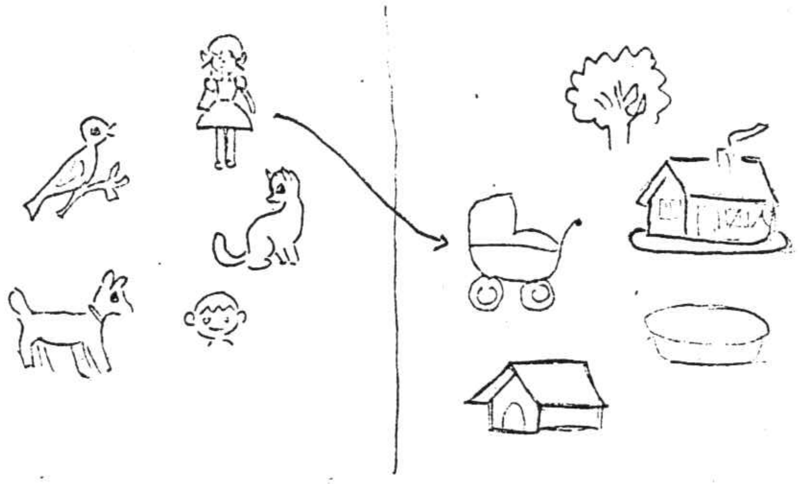
Les enfants apprennent ainsi à reconnaître et représenter des ensembles.

> *"Afin que les enfants prennent conscience du fait qu'un ensemble d'objets est un nouvel objet, on s'aidera non seulement du mot collectif usuel (famille, collection, jeu de boule...) mais aussi de geste, d'entourer les objets ou de la décision de les situer tous ensemble à l'intérieur d'un enclos : ficelle nouée entourant ces objets, courbe fermée dessinée par terre...*
> *... La courbe n'est qu'une ligne accessoire destinée à montrer cet ensemble, à le mettre en évidence, à le souligner".* (cf 32 p. 6)



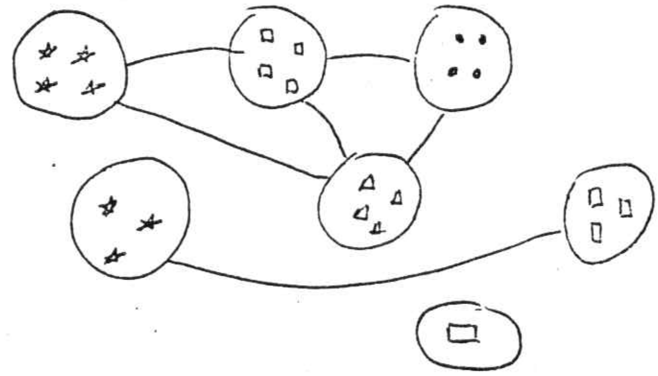
à la correspondance terme à terme

L'enfant "découvre" ensuite que certains ensembles peuvent avoir autant d'objets. Cette découverte s'appuie sur le fait qu'on peut faire correspondre à chaque objet d'un ensemble un objet de l'autre.



(Touyarot)

Puis il compare deux à deux plusieurs ensembles



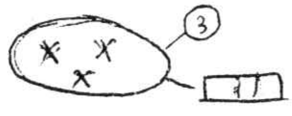
aux premiers nombres

Les ensembles mis en correspondance terme à terme ont le même nombre d'éléments ; il s'agit alors de nommer ce nombre et de l'écrire. On apprend à nommer les premiers nombres ; parfois dans un ordre inhabituel

2, 4, 6, 1, 3, 5 (Touyarot)
6 2 3 4 1 8 (Math 001)

Ce qui est possible avec ce procédé de construction.

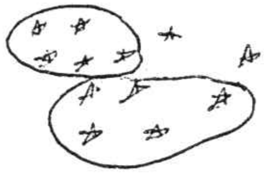
On utilise aussi des baguettes faites avec des cubes emboitables : *"A chaque élément de l'ensemble on fait correspondre un cube, puis l'on emboite les cubes pour former la baguette nombre de l'ensemble"* (Mathématique au CP Such)



Les nombres après 10

Le maître se fixe comme objectif de faire comprendre aux enfants les règles de la numération décimale (cf annexe IV). Si pour "faire abstraire un concept, il faut faire varier tout ce qui peut varier" (cf 33 p. 47), il devient nécessaire de faire varier la base des groupements pour la numération. Ainsi apparaissent des activités de groupements 3 par 3, 4 par 4, avant les groupements 10 par 10 et les enfants apprennent à coder les nombres en différentes bases avant d'apprendre onze, douze...

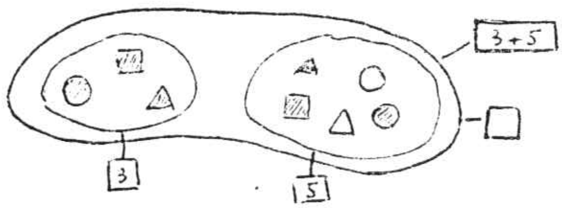
5 par 5



	×
2	2

L'addition

L'addition est introduite à l'aide de la réunion d'ensembles



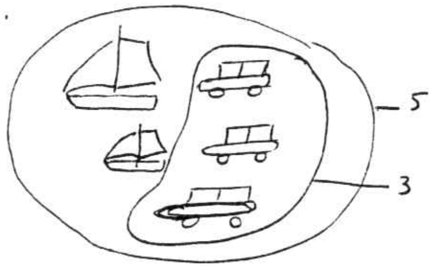
"le nombre des objets d'une réunion de deux ensembles disjoints est nommé et écrit sous la forme a+b" (cf 32)

Dans l'exemple ci-dessus, le "nombre de la réunion" s'écrit 3+5 mais il peut aussi s'écrire 8. Nous avons deux désignations du même nombre. Nous pouvons écrire 3+5=8.

L'ordre

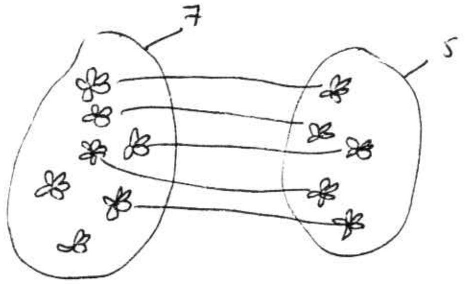
Pour comparer 7 et 5 on considère deux ensembles A er B ayant respectivement 7 et 5 éléments. Puis on compare ces ensembles à l'aide de la correspondance terme à terme. A a plus d'éléments que B ; cela permet de dire "7 est plus grand que 5" et d'écrire 7 > 5

des exemples

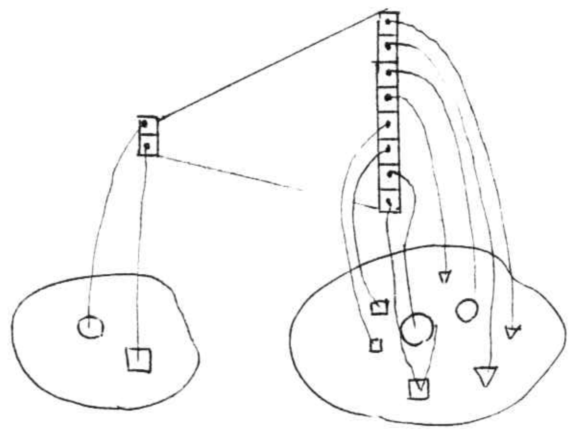


il y a plus de jouets que de voitures

5 > 3



(Touyarot cf 32)



(N. PICARD cf 33)

Ainsi en 1970, les programmes et les différentes propositions d'auteurs de manuels permettent d'introduire séparément : nombre, numération, somme, ordre.

c) 1977

Les programmes et instructions de 1977 ne font qu'expliciter les commentaires de 1970. Ils ne laissent plus le choix quand à la méthode d'approche de la notion de nombre entier au CP[(1)]; l'aspect cardinal du nombre est mis clairement en évidence :

"Exercices de mise en correspondance terme à terme, notion de "autant que", "moins que", "plus que" à partir de situations les plus diverses. Classement de collections d'objets en utilisant la correspondance terme à terme. On attachera la propriété "nombre" aux classes ainsi obtenues" (I.O 1977)

Le problème du codage des nombres doit être posé en tant que tel et l'écriture d'un nombre en bases diverses doit être utilisé comme moyen pédagogique pour l'apprentissage de la numération décimale mais avec modération :

"Le fonctionnement d'un système de numération de position dont la base est petite se découvre et se pratique plus aisément car avec un nombre d'éléments réduit, on peut atteindre des nombres de 3 et 4 chiffres. Il n'est pas cependant nécessaire d'envisager de nombreuses bases, deux peuvent suffire..." (I.O 1977)

L'addition *"peut être présentée en liaison avec la réunion de deux ensembles disjoints"* mais *"l'étude formelle de la réunion n'est pas à faire"* (I.O. 1977)

d) Essai de comparaison des différentes progressions

Nous venons de voir les progressions proposées pour l'apprentissage de la notion de nombre entier depuis le début du siècle.

Sur le plan mathématique, il apparaît clairement que les progressions actuelles privilégient l'aspect cardinal du nombre.

Avant 1970, la représentation des nombres s'appuyait sur l'idée de succession pour étudier un nouveau nombre, on le "formait" en ajoutant 1, au

(1) Le programme du 2 janvier 1970 était essentiellement le programme de 1945 allégé. Il constituait "seulement un palier, une transition dans la direction de l'objectif à atteindre à plus long terme"... Les commentaires joints suggéraient "de façon très libérale, une présentation rénovée de notions parfaitement connues des maîtres" (circulaire du 4 Septembre 1970).

précédent : 4 c'était 3+1. "3+1" désignait moins la somme de 3 et 1 que le successeur de 3.

Cela semble proche de l'axiomatique de PEANO. Mais ces nombres étaient attachés à des collections et pour trouver le nombre d'éléments d'une collection, on rangeait les éléments effectivement ou fictivement, puis on les numérotait et le numéro du dernier était le nombre cherché. On ne se demandait pas pourquoi on trouve le même numéro quelque soit le rangement. C'était plutôt fait d'expérience ou article de foi. Peut-on dire qu'on utilisait l'aspect ordinal du nombre ?

En 1945, il fallait voir globalement les premiers nombres, c'est-à-dire ne pas énumérer unité par unité. Les constellations faisaient-elles apparaître l'aspect cardinal ? Nous ne le pensons pas car il ne s'agissait pas d'utiliser une correspondance terme à terme pour déterminer si deux collections avaient autant d'éléments ou non ; il fallait reconnaître un dessin.

En fait, avant 1970, les différents aspects du nombre n'étaient pas mis en évidence même si on conseillait parfois d'éviter la confusion entre nombre cardinal et nombre ordinal en utilisant le procédé NOLL :

"Dire 1 en étendant 1 doigt ; puis le contracter et dire 2 en étendant 2 doigts à la fois ; puis de nouveau les contracter et dire 3 en étendant 3 doigts à la fois et ainsi de suite". (cf 30)

En ce qui concerne une écriture du type "2+5", elle désignait avant 1970 une action à faire à partir d'une collection de deux objets et d'une collection de 5 objets (voir §1). Le signe "=" indiquait que l'action était faite et annonçait un résultat. "2+5" n'apparaissait donc pas comme désignant un nombre. Actuellement les programmes mettent en évidence le fait que "2+5 et "7" sont deux écritures du même nombre et que le signe "=" traduit ce fait. Ainsi, on peut écrire $7 = 2 + 5$

$2+5 = 4+3\ldots$

Au niveau de l'enchaînement des notions la différence est importante entre progressions anciennes et actuelles. Avant 1970, les nombres s'étudiaient les uns après les autres ; chaque nombre était exploré assez complètement dans ses relations aux précédents (ordre, décomposition). Aujourd'hui, on discerne mieux les différentes structures : notion de nombre, ordre dans les nombres, addition. Si l'on a conservé l'étude d'une seule opération au CP, c'est pour alléger le programme et permettre que chaque notion soit dégagée à partir de situations nombreuses.

Ces différences sur le plan mathématique et le fait que les travaux des psychologues ont été largement diffusés ont-ils entraîné des différences sur le plan didactique ? Le comportement des maîtres et des élèves devant les mathématiques a-t-il été transformé comme le souhaitait le Recteur Gauthier dans la circulaire du 4 Septembre 1970 ? Cela n'apparaît pas clairement. La conception de l'apprentissage des mathématiques est bien souvent restée la même : l'activité mathématique est plus souvent conçue comme une étude progressive et bien ordonnée de notions que comme une mathématisation, une construction d'outils à partir de situations concrètes.

V - LES ORIENTATIONS ACTUELLES

Le changement proposé en 1970 ne s'est pas opéré sans difficulté ni erreurs. L'introduction dans les livres des notions d'ensembles, de relations... bref de ce qu'on a appelé des "mathématiques modernes" a soulevé des polémiques. Il faut reconnaître que les raisons du changement et l'enchaînement des notions n'ont pas toujours été bien expliqués. On pourrait citer pour exemple des manuels scolaires dans lesquels les notions sous-jacentes à la théorie des cardinaux étaient étudiées pour elles-mêmes et objet d'exercices mécaniques. Citons aussi l'utilisation abusive de schémas imposés qui se présentent comme des savoir-faire indispensables (cf patate) et non comme des outils aidant à la mathématisation.

Le programme du CP actuel permettra-t-il d'éviter ces abus ? Il est difficile de dire comment il sera interprété et si les objectifs proposés seront atteints.

Ce programme ne répond d'ailleurs pas à toutes les préoccupations et les expérimentations se poursuivent notamment dans les I.R.E.M.

L'équipe de l'I.R.E.M. de BORDEAUX *"asseoit l'activité mathématique sur une étude systématique de la désignation, des structures fondamentales* *d'ordre et d'équivalence développés sur les acquis de l'enfant"* (bulletin n°16 IREM de Bordeaux).

Ainsi :

"pour permettre aux enfants d'intérioriser la notion de nombre en la dégageant le plus clairement possible de la notion de collection, le travail sur la relation d'équivalence est matérialisé en répartissant les collections en classes par leur insertion dans des boites ; chaque contenu de boite est désigné par un signe, le signe du nombre ; ce contenu représente le nombre". (Bulletin n° 16)

Cette exploration des nombres se fait sans ordre ni exhaustivité. *"L'ordre permet ensuite de relier ces nombres et de compléter une première liste ordonnée. L'addition permet ensuite d'explorer grâce à des partitions d'ensembles des nombres pouvant dépasser 50. La comparaison des sommes mène à une étude systématique de la décomposition des premiers nombres. Enfin, la numération apporte la possibilité de désigner d'une façon simple des nombres immensément grands..."* (voir présentation détaillée dans 28 p. 234).

Après plusieurs années de recherche, l'équipe de l'IREM de GRENOBLE, reprenant les idées précédentes, en est arrivée à la conclusion que "travailler exclusivement sur un seul des deux aspects (ordinal ou cardinal) ne peut faciliter aux enfants la maîtrise des nombres. Aussi rejette-t-elle "toute présentation qui sur-développerait trop longtemps l'un des aspects par rapport à l'autre".

Aussi a-t-elle choisi de proposer à chaque étape "des activités où interviennent les différents aspects du nombre (cardinal, ordinal, numération)", et en particulier de s'attaquer au problème : *"comment travailler assez tôt dans l'année du CP sur l'aspect ordinal du nombre alors que l'on ne dispose précisément pas alors de la suite des nombres ?"*

Dans un numéro spécial de la revue "Grand N" "Mathématiques pour le cycle préparatoire" (77), l'équipe de Grenoble tente d'apporter des éléments de réponse. Mais il est symptomatique que ce document se présente comme "un exemple de ce que l'on peut faire, en aucun cas un modèle de ce que l'on doit faire", au CP.

En effet, outre le fait que les classes sont toutes différentes et que ce qui vaut pour l'une ne vaut pas nécessairement pour l'autre, il faut bien reconnaître que, malgré de nets progrès ces dernières années, la façon dont se fait la construction du nombre dans l'esprit des enfants et dans le milieu de la classe, n'est pas complètement éclaicie.

On peut néanmoins essayer de dégager quelques points essentiels comme le proposa le compte-rendu du groupe "Points de vue sur le nombre naturel" lors du séminaire APM-IREM-PEN de Nice en janvier 1976 :

" - *L'approche du nombre n'est pas linéaire et ne peut être calquée sur une théorie mathématique. Le concept de nombre naturel s'élabore lentement par approches successives au cours d'activités privilégiant soit l'aspect cardinal, soit l'aspect ordinal, soit la numération. La démarche suivie ne dépend que des enfants auxquels on s'adresse et est incompatible avec l'usage de manuels ou de fiches.*

- *La numération fait partie de la construction du nombre. Il y a une "zone" à partir de laquelle le nombre n'existe que si l'enfant peut l'écrire dans un système suffisamment élaboré.*

- *pour que l'enfant construise l'outil "nombre naturel", il faut lui proposer des situations où il est amené à inventer des procédés qui lui permettent de résoudre les problèmes qui se posent à lui. Pour cela, il faut lui donner des problèmes situés dans une zone, dans laquelle il ne pourra prolonger les méthodes qu'il connait.*

- *On peut distinguer différentes zones, assez floues, auxquelles correspondent des moyens privilégiés :*
  - . *de 1 à 5, l'enfant compare globalement,*
  - . *de 5-7 à 15-20, l'enfant compare soit directement par correspondance terme à terme (manipulations synchronisées, pointage, dessin, etc...) soit indirectement en utilisant un ensemble intermédiaire (collier, serpent à écailles, comptine,...) ; dans ce dernier cas, on évitera*

de lier l'ensemble étalon à un autre concept, celui de longueur par exemple.

. *au-delà, la comparaison se fait paquets par paquets*(1)

- Au cours de ces activités, il n'y a pas distinction absolue entre aspect cardinal et aspect ordinal. Par exemple, pour écrire 53 (base six), l'enfant construit 5 paquets de six et pour fabriquer ces paquets de six, il peut le faire globalement, ou en comptant 1, 2, 3, 4, 5, 6. De même, pour voir qu'il y a 5 paquets, il peut le faire de deux façons".

Signalons enfin une étude récente sur "les procédures spontanément utilisées par les élèves de CP pour construire un ensemble équipotent à un ensemble donné ou ayant plus d'éléments que ce dernier, dans un domaine numérique donné" (2)

Dans l'une des épreuves proposée à 121 enfants (fin du 2° trimestre de CP), l'expérimentateur mettait en vrac, sur la table, sans superposition, 15 jetons rouges. L'enfant disposait d'une boîte contenant 25 jetons bleus et on lui demandait "Prends autant de jetons bleus que de jetons rouges" (après s'être assuré que dans toutes les classes des activités portant sur le "autant que" avaient été précédemment menées).

L'étude a montré que : *"bien que les enfants soient davantage attirés par le comptage que par la correspondance terme à terme pour la construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné ou la vérification de l'équivalence de deux collections, la correspondance terme à terme est beaucoup plus opérationnelle que le comptage".*

D'une autre épreuve, il ressort que : *"lorsqu'il s'agit de construire un ensemble ayant plus d'éléments qu'un ensemble donné, la correspondance terme à terme passe largement en tête des méthodes utilisées".*

A ce sujet, les auteurs font remarquer : *"on peut noter que le faible pourcentage de succès à l'épreuve de construction d'une collection équivalente ainsi que la faible opérationnalité du comptage ont étonné les maîtres avec*

---

(1) L'équipe de l'IREM de Bordeaux a longtemps travaillé sur l'utilisation des correspondances paquets par paquets pour introduire les écritures additives des nombres. cf "l'addition au CP" IREM de Bordeaux (document provisoire).

(2) "Une étude sur l'approche du nombre par l'élève du cours préparatoire" A. BESSOT et C. COMITI, IREM de Grenoble.

qui nous avons eu une première discussion. Ceci met l'accent sur le risque de décalage qui peut exister entre ce que l'on peut croire acquis et ce qui l'est réellement".

Cependant, malgré les éclaircissements qu'elle apporte, l'étude ne répond pas à toutes les questions, et avec les auteurs on peut se demander : *"Que devient la prédominance soulignée ci-dessus lorsqu'on change de domaine numérique ? Lorsque l'on change de moment dans le cursus scolaire ? Quel est le statut de l'inégalité selon le domaine numérique et l'apprentissage en cours ?"*

ANNEXES

LES FONDEMENTS MATHEMATIQUES DE LA NOTION DE NOMBRE

Nous allons esquisser les grandes lignes de l'une des premières constructions apparues, celle de PEANO(1), très fortement marquée par l'intuition que nous avons des nombres entiers.

Signalons aussi l'existence de deux autres méthodes débordant largement le cadre de la théorie des nombres entiers et nécessitant un recours beaucoup plus profond à l'axiomatique et à la logique :

- celle de ZERMELO-FRAENKEL(2)
- celle de BOURBAKI(3)

Nous exposerons schématiquement la première d'entre elles. Quant à celle de BOURBAKI, elle est assez connue sous sa forme naïve, compte tenu de ses analogies avec les conceptions psychologiques développées par PIAGET ; c'est généralement à elle que l'on fait référence pour justifier les pratiques de présentation des nombres à l'école élémentaire.

Nous réfléchirons enfin sur les systèmes de numération à base, afin notamment de voir quelle peut être leur place à l'intérieur d'une construction mathématique théorique.

---

(1) Giuseppe PEANO (1858-1932)
mathématicien italien. Il a notamment travaillé sur la recherche d'un symbolisme mathématique commode dont il subsiste beaucoup de choses dans les notations actuelles. Sa construction axiomatique de l'ensemble des entiers naturels est inspirée des travaux du mathématicien allemand DEDEKIND et remonte à 1889.

(2) Ernst ZERMELO (1871-1953)
mathématicien allemand, disciple de Cantor, connu surtout pour "l'axiome du choix" qu'il explicita en 1904. Il a travaillé sur une axiomatisation de la théorie des ensembles qui, modifiée par Adolf Abraham FRAENKEL (1891-1965) et Thoralf SKOLEM (1887-1963) constitue aujourd'hui l'axiomatique dite de "Zermelo-Fraenkel".

(3) Nicolas BOURBAKI
pseudonyme collectif d'un groupe de mathématiciens, français à l'origine, né en 1939 et se renouvelant par cooptation de ses membres.

ANNEXE 1

L'AXIOMATIQUE DE PEANO

Il s'agit, d'énoncer un minimum d'axiomes (bien entendu non contradictoires) traduisant l'intuition que nous avons de l'ensemble des nombres entiers.

I - RECHERCHE D'UN SYSTEME D'AXIOMES

Pour cela, essayons de préciser la représentation intuitive que nous avons des nombres entiers ; nous imaginons une suite d'objets distincts qui se présentent dans un certain ordre à partir d'un objet initial que nous notons 0 : 0, 1, 2, 3, 4,... Essayons de visualiser cette représentation par un schéma :

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \quad \dots$$

où les flèches indiquent l'ordre de succession, les pointillés voulant signifier "on peut toujours continuer".

Chaque flèche a la même signification : elle va d'un nombre à son suivant, nous dirons son "successeur". Partant de 0, on peut obtenir tous les autres nombres en réutilisant toujours cette même flèche. On imagine ainsi qu'en utilisant les deux seuls termes "zéro" et "successeur d'un nombre" on devrait pouvoir reconstituer toute entière la suite des nombres. Nous énoncerons donc deux premiers axiomes affirmant l'existence du zéro et le principe du successeur

<u>axiome I</u> : il existe un nombre noté 0
<u>axiome II</u> : à tout nombre entier on peut faire correspondre un autre nombre entier appelé son successeur.

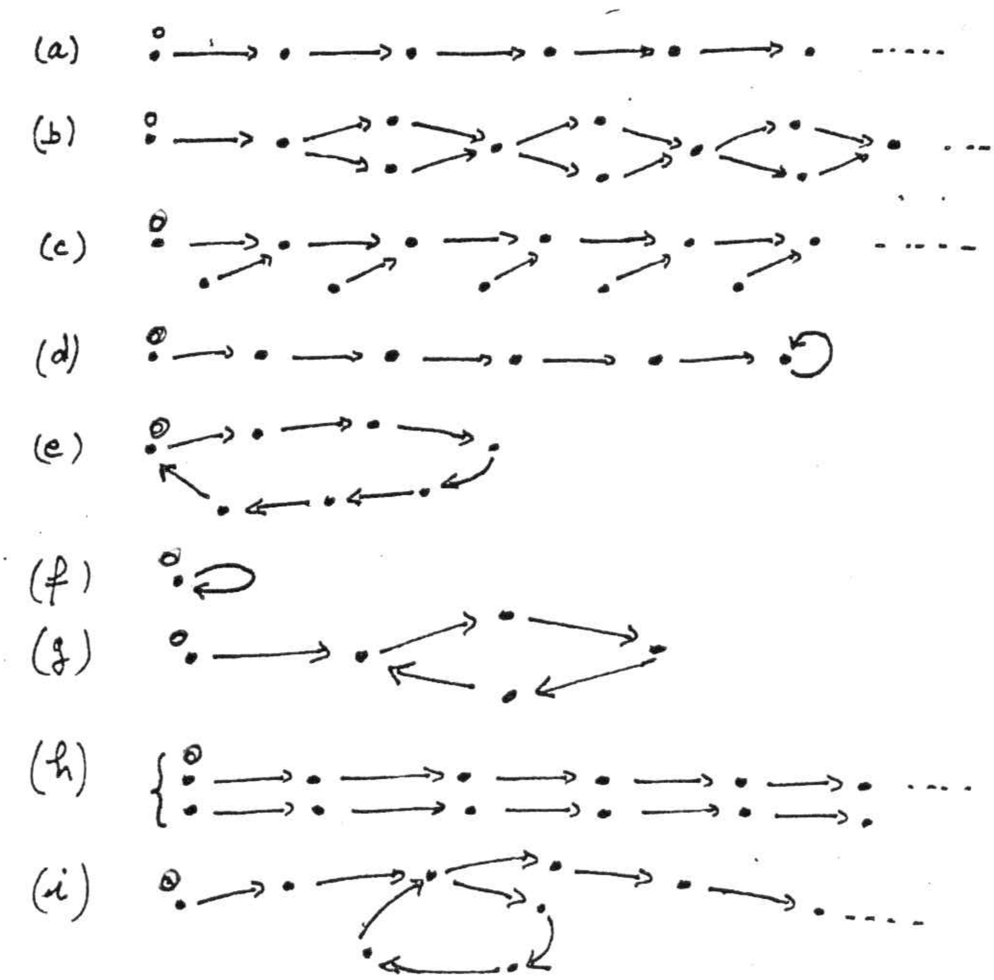
Ces axiomes nous suffisent-il pour retrouver les naturels tels que nous les percevons ? Nous allons voir que non. Imaginons pour cela d'autres schémas (cf page suivante) ne correspondant pas à celui que nous voulons (i.e. le schéma (a)). Sur chaque schéma, nous avons matérialisé l'axiome I par un élément noté 0 et l'axiome II par des flèches. Il est facile de voir que tous les schémas peuvent correspondre à des ensembles vérifiant nos deux axiomes. Si nous voulons ne conserver que le schéma (a), il va donc falloir préciser.

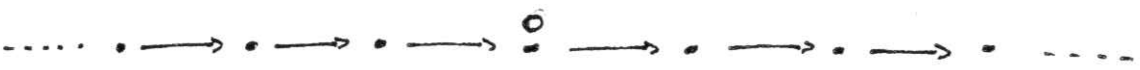
Regardons le schéma (b). Nous voyons que dans ce cas certains éléments auraient deux successeurs. Affirmons donc l'impossibilité de ce fait et nous éliminerons ainsi ce schéma. Pour cela, il nous suffit de modifier l'axiome II de la façon suivante :

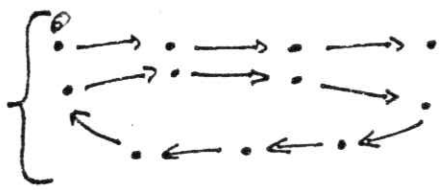
<u>axiome II'</u> : à tout nombre entier on peut faire correspondre un nombre entier <u>unique</u> appelé son successeur.

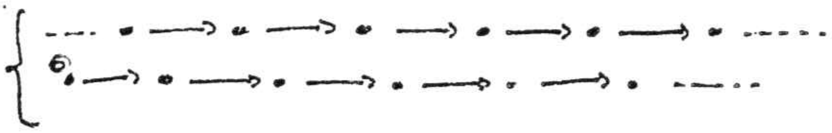
(b) étant éliminé, voyons (c) ; il conduit à l'existence possible d'un même successeur pour deux entiers distincts. Nous supprimerons cet inconvénient en affirmant :

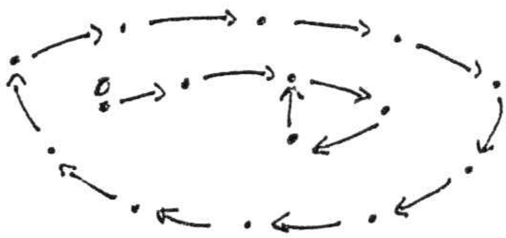
<u>axiome III</u> : deux entiers ayant même successeur sont égaux.



(j) 

(k) 

(l) 

(m) 

Passons à (d) ; nous l'éliminerons facilement en posant :

<u>axiome IV</u> : tout entier est distinct de son successeur

Avec (e) on "tourne en rond" ; empêchons cette possibilité en affirmant

<u>axiome V</u> : 0 n'est le successeur d'aucun entier.

Du coup, (f) se trouve éliminé aussi bien d'ailleur par l'axiome IV que l'axiome V. Avec (g), on tourne encore en rond et l'axiome V est impuissant, mais il y a tout de même incompatibilité avec l'axiome III.

(h) pose un problème que nous pouvons résoudre en introduisant un nouvel axiome :

<u>axiome VI</u> : tout nombre différent de 0 est le successeur d'un nombre.

Il est inutile de chercher un nouvel axiome pour éliminer (i) ; on peut utiliser II' ou III. De même (j) est incompatible avec V.

Restent (k) et (l) qui vérifient tous les axiomes précédemment énoncés. Comment les éliminer ? Nous voyons que ces schémas sont composés de deux "morceaux" dont l'un est justement (a), celui que nous voulons, mais seul. Il nous faut donc trouver un axiome affirmant qu'ils ne peuvent coexister.

Appelons M le sous-ensemble qui dans (k) et (l) est représenté comme (a). Il nous faut trouver des conditions qui expriment la séparation de M et d'affirmer alors que M est à lui seul l'ensemble des entiers naturels.

Cherchons donc à caractériser M de façon à l'isoler :

- il possède l'élément 0 (ce qui est indispensable si l'on veut pouvoir affirmer que M = N)
- lorsqu'on utilise le procédé du successeur, on reste toujours dans M ce qu'on peut exprimer en disant que tout entier de M a son successeur dans M

Nous énoncerons donc :

<u>axiome VII</u> : Soit M un sous-ensemble de N tel que :

- 0 est élément de M
- tout entier de M a son successeur dans M

Alors M = N.

Avec cet axiome, (k) et (l) disparaissent. Enfin regardons (m) ; nous pouvons trouver un sous-ensemble dont 0 soit élément et tel que tout successeur d'un élément de ce sous-ensemble s'y trouve aussi. Dira-t-on alors que ce sous-ensemble est N ? Non, car il est facile de voir que certains des axiomes précédents ne sont pas vérifiés.

D'autres axiomes sont-ils nécessaires ? Nous ne pouvons dans ce cadre prouver que non, mais le lecteur pourra constater, en inventant d'autres schémas différents de (a) que l'un au moins des axiomes précédents permet de les écarter.

II - RECHERCHE D'UN SYSTEME MINIMAL D'AXIOMES

Les axiomes précédents suffisent, mais sont-ils tous indispensables ?

La question mérite d'être posée, car si certains axiomes peuvent se déduire des autres, il sera inutile de les poser comme tels.

Nous suggérons au lecteur, avant de lire ce qui suit, d'essayer plusieurs combinaisons des axiomes ci-dessus et de rechercher celles qui permettent, avec un minimum d'axiomes d'éliminer tous les schémas sauf (a).

Les 7 axiomes précédents peuvent en fait se réduire à un système de 5 axiomes, connu sous le nom de "système de PEANO" :

"Il existe un ensemble noté N d'éléments appelés "nombres entiers" tel que :

axiome 1 : 0 est un élément de N

axiome 2 : à tout entier correspond un entier unique appelé son successeur

axiome 3 : 0 n'est le successeur d'aucun entier

axiome 4 : deux entiers ayant même successeur sont égaux

axiome 5 : tout ensemble d'entiers qui contient 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments est l'ensemble de tous les entiers".

(Précisons que si nous avons choisi de numéroter ces axiomes, c'est pour les repérer plus facilement, mais leur ordre est indifférent)

On peut énoncer ces axiomes de façon plus "moderne" en considérant que la correspondance qui à chaque entier associe son successeur est une application de N dans N. On pourra alors regrouper les axiomes 2 et 4 et énoncer :

axiome 1	$0 \in N$
axiome 2-4	il existe une application injective f, de N dans N
axiome 3	$0 \notin f(N)$
axiome 5	si M est un sous-ensemble de N tel que . $0 \in M$. $f(M) \subset N$ alors $M = N$

On peut encore rechercher d'autres énoncés plus ou moins formalisés, mais ce n'est pas là notre problème.

Voyons maintenant ce que deviennent les premiers axiomes que nous avions choisis :
les axiomes 1 et 2 reprennent I et II'
l'axiome 4 reprend III, 3 reprend V et 5 reprend VII.

* Montrons que ce que nous avons pris comme axiome IV : "tout entier est distinct de son successeur" peut être obtenu comme théorème à partir des axiomes

de PEANO.

Appelons M le sous-ensemble des entiers distincts de leurs successeurs 0 n'étant le successeur d'aucun entier (ax. 3) est différent de son successeur donc 0 **appartient** à M.

Soit n un élément de M et appelons n' son successeur ; d'après la définition de M, $n \neq n'$

Puisque n et n' sont différents, leurs successeurs le sont aussi (sinon cela contredirait l'axiome 4) ; on peut donc dire que le successeur de n est distinct du successeur de n', ce qui revient à dire que n' est distinct de son successeur et donc que n' appartient à M.

Nous voyons donc que si nous prenons un élément quelconque de M, son successeur est aussi élément de M. Comme par ailleurs 0 est élément de M, nous pouvons affirmer en vertu de l'axiome 5 que M = N, ce qui signifie en clair que la propriété d'être distinct de son successeur est une propriété vraie pour chaque entier et que donc "tout entier est distinct de son successeur"...

Ce raisonnement nous donne une idée de la force de l'axiome 5 qui sera capital dans la plupart des démonstrations ; il permet de justifier l'utilisation du raisonnement dit "raisonnement par récurrence".

Nous laissons au lecteur le soin de montrer de façon analogue que "tout entier différent de 0 est le successeur d'un entier" (ancien axiome VI).

(Il suffit de considérer l'ensemble M formé de 0 et de tous les nombres qui sont successeurs d'un nombre et d'utiliser encore une fois l'axiome 5).

III - DES NOMS POUR LES NOMBRES

Nous voici donc en présence d'un ensemble N dont, jusqu'à présent, nous n'avons pas eu besoin de désigner les éléments, sauf l'un d'entre eux : 0. Comment trouver un symbole commode pour chacun des éléments ?

Nous savons que 0 a un successeur unique que nous pouvons par exemple noter 0', ce nombre ayant reçu dans la pratique courante un symbole conventionnel : 1. 1 a lui-même un successeur unique 1' noté habituellement 2 ; 2 a un successeur noté 3.

Nous pouvons ainsi continuer et noter 4 le successeur de 3, 5 celui de 4, etc... en reprenant les symboles usuels.

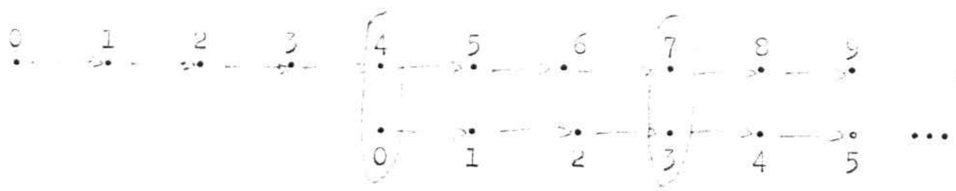
Après 9, notre système usuel n'utilise pas de nouveaux symboles, mais un codage : on se sert des premiers symboles, les "chiffres" (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), en les assemblant suivant certaines règles commodes que nous savons pratiquer. Comment justifier mathématiquement ces règles ? C'est là un problème sur lequel nous reviendrons dans l'annexe IV.

IV - STRUCTURATION DE $\mathbb{N}$

Le lecteur pourra remarquer que le système d'axiomes de PEANO ne demande pas l'existence d'un ordre sur les entiers naturels, ni l'existence d'une addition ou d'une multiplication. En fait, ces structures peuvent s'en déduire ; nous allons ici, sans entrer dans les détails techniques, donner seulement une illustration de la démarche théorique en ce qui concerne l'addition.

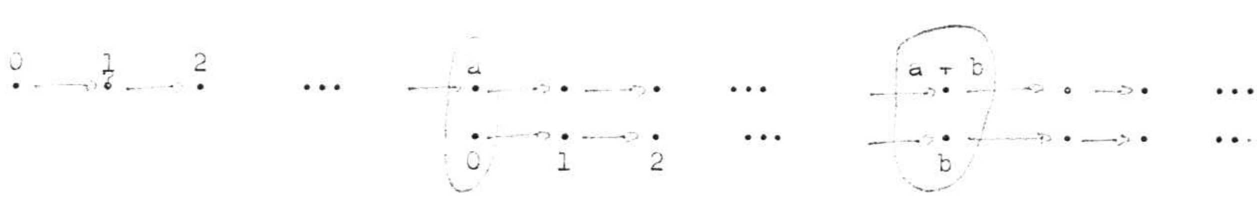
Comment définir la somme de 2 nombres telle que nous l'utilisons, en ne nous servant que des seuls termes que nous nous sommes autorisés ; les noms des nombres et "successeur" ?

Prenons un exemple : dans notre système de numération, 4+3 s'écrit encore 7. Comment pourrions-nous le retrouver si nous l'avions oublié ? Une façon simple serait de compter sur ses doigts : 1, 2, 3, 4, de conserver les doigts levés et de continuer : 1, 2, 3 puis de recompter tous les doigts levés : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Traduisons cela par un schéma :



On fait coïncider le 0 avec le 4, puis on cherche le nombre qui coïncide avec 3.

Essayons de faire de la même façon pour deux nombres quelconques a et b :

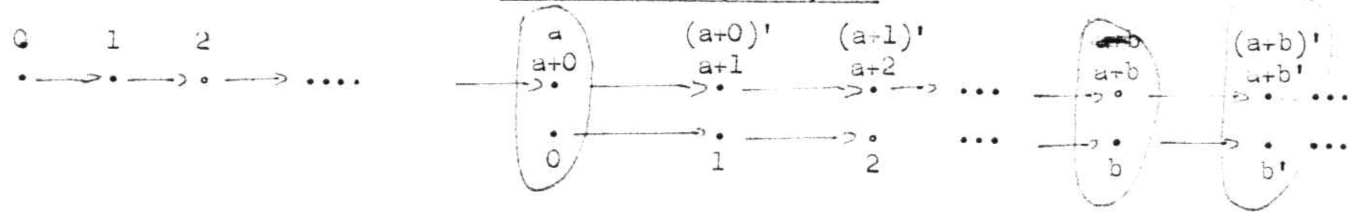


On place 0 en regard de a et on décide d'appeler a+b celui qui est en regard de b.

On remarque ainsi que $a + 0 = a$ (en reprenant la notation
$a + 1 = (a + 0)'$ pour désigner le successeu
$a + 2 = (a + 1)'$
...

et que d'une façon générale, pour un entier b quelconque,

$$a + b' = (a + b)'$$



Ceci nous donne un procédé de calcul de la somme a+b pour n'importe quels entiers a et b.

Ces observations peuvent servir de base à une définition formelle de l'addition des entiers que nous ne développerons pas ici.

On peut ensuite, sans grande difficulté, construire dans $\mathbb{N}$ <u>une multiplication</u>

(qui vérifie $a \times 0 = 0$
$a \times b' = (a \times b)+a$)

et <u>un ordre</u>

(qu'on pourra définir par : "$a \leqslant b$ si, et seulement si, il existe un naturel c tel que $b = a + c$")

ANNEXE 2

NOMBRES ORDINAUX ET NOMBRES CARDINAUX

Le but initial de ce texte était de donner dans un langage aussi simple que possible une initiation à la théorie des cardinaux et des ordinaux. Il m'a semblé alors, qu'il serait dommage de parler des cardinaux sans avoir au préalable dit quelques mots sur la construction des entiers naturels et de même qu'il pourrait être désagréable pour le lecteur d'aborder les ordinaux sans avoir rappelé quelques résultats sur les ensembles bien ordonnés. La première remarque m'a amené à citer, au début, les axiomes de la théorie des ensembles de ZERMELO-FRAENKEL : ceci permet, entre autres, de bien mettre en évidence le rôle de l'axiome de l'infini et de démontrer ce que l'on indique, en général comme les axiomes de PEANO. La seconde m'a donné envie de dire deux mots sur l'axiome du bon ordre et sur celui du choix.

Volontairement aucune démonstration n'est donnée et ceci pour plusieurs raisons. D'une part, même seulement les plus significatives d'entre elles auraient considérablement allongé le texte. D'autre part, j'ai pensé qu'il était préférable de mettre seulement le lecteur "en appétit" pour consulter les nombreux livres qui ne manquent pas dans la nature sur ce sujet, les lignes qui suivent pouvant lui servir de guide.

I - LES AXIOMES DE BASE EN THEORIE DES ENSEMBLES

On indique ici, d'une manière non formalisée, un système d'axiomes qui permet de construire la théorie des ensembles au sens de ZERMELO-FRAENKEL. Aucune difficulté théorique n'est soulevée ; en particulier on ne parlera pas de la notion d'univers et on supposera qu'il existe certains "objets" (ensembles) vérifiant les axiomes qui seront énoncés, et qu'entre ces ensembles existe une sorte de relation binaire, notée $\in$, et l'on retrouvera la notation habituellement répandue $x \in A$ (l'objet x appartient à l'objet A ou encore x est élément de l'ensemble A). La notion d'inclusion (ou de sous-ensemble) en découle. On notera au besoin $A \underset{s}{\subset} B$ pour dire que A est sous-ensemble strict de B.

1 - Axiome d'extension

Deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes éléments.

Cette "ritournelle" est en fait logiquement non triviale. Imaginons un instant, parler des êtres humains à la place des ensembles et que x et A étant deux être humains nous écrivons $x \in A$ pour traduire que x est un ancêtre de A. Alors il est vrai que si "deux êtres humains sont égaux", ils ont les mêmes ancêtres, mais évidemment la réciproque est fausse.

2 - Axiome de spécification

A chaque ensemble A et à chaque assertion en x, S(x), il correspond un ensemble B qui a exactement pour éléments les x de A tels que S(x) est vraie.

L'axiome (2) ne demande pas et n'assure pas l'unicité de B, toutefois, ceci est obtenu grâce à (1). Remarquons qu'en prenant pour S(x) l'assertion $x \notin x$ et pour A un ensemble quelconque, on peut montrer que $B = \{x \in A : x \notin x\}$ n'est pas élément de A. C'est-à-dire il n'existe pas "l'ensemble de tous les ensembles" (paradoxe de RUSSELL)

3 - Axiome des paires

Pour deux ensembles quelconques, il existe un ensemble auquel ils appartiennent tous les deux.

Les axiomes (2) et (1) montrent respectivement l'existence et l'unicité d'un ensemble ayant pour seuls éléments les deux ensembles de départ.

4 - Axiome des unions

Pour chaque famille d'ensembles, il existe un ensemble qui contient tous les éléments qui appartiennent à au moins l'un des ensembles de la collection.

On se sert comme ci-dessus des axiomes (1) et (2). On invite le lecteur à réfléchir pourquoi on a besoin d'un axiome pour les unions et pas pour les intersections.

5 - Axiome des puissances

Pour chaque ensemble il existe un ensemble qui contient parmi ses éléments tous les sous-ensembles de l'ensemble donné.

En utilisant à nouveau (1) et (2), on associe à tout ensemble A un ensemble privilégié, noté $\mathcal{P}(A)$, et appelé ensemble des parties de A.

Les axiomes précédents permettent de définir sans difficulté les notions habituelles de couples, relations binaires, applications, produits cartésiens...

II - L'ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

§ 1 - Les nombres entiers

1-1 Pour tout ensemble x, on peut définir le successeur x^+ de x par $x^+ = x \cup \{x\}$. A noter que $x \in x^+$ et $x \subset x^+$

On pose par convention $0 = \emptyset$

$$1 = 0^+ = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$$
$$2 = 1^+ = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$$

Si l'on continue "indéfiniment" ce processus, les axiomes de (I) ne nous permettent pas de dire que nous obtenons un ensemble. Aussi est-on conduit à introduire ici un nouvel axiome.

1-2 Axiome de l'infini

Il existe un ensemble contenant 0 ainsi que le successeur de chacun de ses éléments.

1-3 Un ensemble A est dit satisfaire au "principe de succession" si $0 \in A$ et si $x \in A \Rightarrow x^+ \in A$.

Il en existe au moins un d'après (1-2) et si (A_i) est une famille d'ensembles y satisfaisant, il en est de même de $\bigcap_i A_i$. En particulier, si A satisfait à ce principe, il en est de même de $\omega = \bigcap B$, $B \subset A$ et B satisfaisant au principe de succession. ω est le plus petit ensemble satisfaisant à ce principe et d'après l'axiome d'extension, caractérisé par cette propriété minimale, il est unique. Un nombre entier (naturel) est par définition un élément de ω.

§ 2 - Les axiomes de PEANO

2-1 Dire que ω est un ensemble satisfaisant au principe de succession signifie que

(1) $0 \in \omega$

(2) si $n \in \omega$, alors $n^+ \in \omega$

La propriété de minimalité de ω (1-3) entraîne que si $S \subset \omega$ et satisfait au principe de succession, alors $S = \omega$, c'est-à-dire :

(3) si $S \subset \omega$, si $0 \in S$ et si $n \in S \Longrightarrow n^+ \in S$, alors $S = \omega$

Cette dernière propriété constitue le "principe d'induction"(ordinaire) connue en général sous le nom "d'axiome de récurrence", et s'utilise ainsi : à chaque entier n, on associe une propriété $P(n)$ et l'on se propose de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n. On montre alors directement que $P(0)$ est vraie puis l'on établit que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie, et l'on conclut en prenant pour S l'ensemble des n tels que $P(n)$ soit vraie.

On établit ensuite les deux autres propriétés

(4) $n^+ \neq 0$ pour tout $n \in \omega$

(5) Si $n, m \in \omega$ et si $n^+ = m^+$ alors $n = m$.

Ces cinq propriétés constituent l'habituel système d'axiomes de PEANO. Il faut bien noter ici qu'il s'agit non pas d'axiomes mais de conséquences des axiomes introduits initialement.

2-2 Si la propriété (4) ci-dessus, est triviale il n'en est pas de même de la propriété (5) dont la démonstration passe par les deux lemmes suivants :

Aucun nombre naturel n'est sous-ensemble de l'un de ses éléments
Tout élément d'un nombre naturel est un sous-ensemble de ce naturel.

2-3 Pour tout nombre naturel n, on a $n \neq n^+$
Si $n \neq 0$ on a $n = m^+$ pour un naturel m.

Tout entier naturel ainsi que ω est un ensemble transitif.

§ 3 - Arithmétique et ordre sur les entiers

3-1 Pour construire convenablement les opérations arithémtiques sur les entiers naturels, on établit au préalable le théorème suivant, de construction par induction ou par récurrence.

Si a est un élément d'un ensemble X et si f est une application de X dans X, il existe une application u de ω dans X telle que $u(0) = a$ et $u(n^+) = f(u(n))$ pour tout $n \in \omega$.

3-2 Addition

Il résulte du théorème (3-1) que pour tout nombre naturel m il existe une application s_m de ω dans ω telle que $s_m(0) = m$ et $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$ pour tout naturel n. On note $s_m(n) = m+n$ et on remarque que $n^+ = n+1$.

Multiplication

Même méthode que précédemment avec $P_m(0) = 0$ et $P_m(n^+) = P_m(n)+m$, et on note $P_m(n) = m.n$

Exponentiation

Toujours la même méthode avec
$e_m(0) = 1$ et $e_m(n^+) = e_m(n).m$, et on note $e_m(n) = m^n$

3-3 On remarquera que l'introduction du théorème (3-1) a l'avantage, en particulier, que les constructions de (3-2) ne donnent pas cette impression "d'étalement dans le temps" qu'on leur connaît souvent, du type pour l'addition par m par exemple : "quand on a construit $m+n$ alors on définit $m+n^+$ par $(m+n)^+$ ".

3-4 Pour deux entiers naturels m et n, une et une seule des trois situations suivantes est réalisée : $m \in n$, $m = n$, $n \in m$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $m \in n$ est que $m \underset{s}{\subset} n$, et l'on note $m < n$. La relation $\leqslant$ associée est une relation d'ordre total sur ω.

§ 4 - Ensembles finis. Ensembles infinis

4-1 Deux ensembles sont dits équipotents s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. Tout ensemble est équipotent à au plus un naturel. Si un ensemble est équipotent à un nombre naturel (en fait unique d'après ce qui précède), il est dit "fini" et ce naturel est appelé le "nombre d'éléments de l'ensemble". Il est dit "infini" dans le cas contraire. L'ensemble ω est infini.

4-2 On peut alors démontrer les quelques propriétés suivantes intuitivement évidentes : Tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini et dans le cas d'une inclusion stricte, son nombre d'éléments est strictement inférieur à celui de l'autre ensemble ; un ensemble fini n'est jamais équipotent à l'un de ses sous-ensembles stricts ; la réunion de deux ensembles finie est finie et a un nombre d'éléments inférieur ou égal à la somme des nombres d'éléments de chacun des deux ensembles...

Deux résultats intéressants en ce qui concerne les ensembles infinis sont indiqués en (III-1-2).

III - ENSEMBLES BIEN ORDONNES

§ 1 - Axiome du bon ordre et axiome du choix

1-1 Un ensemble ordonné est dit "bien ordonné" si tout sous-ensemble non vide possède un plus petit élément. Un tel ensemble est évidemment totalement ordonné et c'est le cas par exemple de ω. L'axiome du bon ordre affirme que tout ensemble peut-être bien ordonné. Ceci n'est nullement évident intuitivement : si l'on peut facilement bien ordonner l'ensemble des relatifs ainsi que celui des rationnels, on ne connaît pas encore de bon ordre sur l'ensemble des réels.

1-2 L'axiome du bon ordre est équivalent à l'axiome du choix qui assure pour tout ensemble A non vide l'existence d'une application (appelée fonction de choix) $\varphi : \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\} \longrightarrow A$ telle que $\varphi(X) \in X$ pour tout $X \subset A$, et non vide. En première lecture, cet axiome semble parfaitement trivial mais il faut bien comprendre qu'étant donnée une partie X, non vide, de A aucune opération ensembliste de celles que l'on connaît jusqu'ici ne peut choisir dans X un élément plus qu'un autre. L'axiome du choix assure en fait l'existence d'une "machine" capable de réaliser ce travail.

Cet axiome permet d'établir que si un ensemble est infini, il possède un sous-ensemble équipotent à ω, (en un certain sens ω est à une bijection près, le plus petit ensemble infini possible), et qu'un ensemble est infini si, et seulement s'il est équipotent à l'un de ses sous-ensembles stricts.

1-3 Signalons encore comme curiosité qu'une forme équivalente à l'axiome du choix (précisément l'axiome de Zorn) permet de montrer que tout espace vectoriel possède une base et que deux bases sont équipotentes. Cependant, on ne connaît toujours pas de base pour l'ensemble des réels considéré comme espace vectoriel sur le corps des rationnels (bases de Hamel).

§ 2 - L'induction transfinie

2-1 Tout ensemble bien ordonné X vérifie le "principe de l'induction transfinie" *Soit* $S \subset X$ *et tel que* $s(x) \subset S \Longrightarrow x \in S$, *pour tout* $x \in X$. *Alors* $S = X$

(on désigne par $s(x)$, le segment initial de x, c'est-à-dire le sous-ensemble de X formé des éléments strictement inférieurs à x).

Ceci est la bonne formulation d'un principe d'induction dans le cas d'ensemble bien ordonné. En effet, le principe d'induction ordinaire, correct dans ω, peut être en défaut s'il est transcrit tel quel pour un ensemble bien ordonné quelconque : par exemple, considérons l'ensemble ω^+ muni du bon ordre évident ; il existe un sous-ensemble strict S de ω^+, à savoir ω, tel que $0 \in S$ et $n \in S \Longrightarrow n^+ \in S$.

2-2 Dans le cadre des ensembles bien ordonnés, on est en mesure de donner un théorème de construction par induction transfinie qui est l'extension du théorème donné en (II-3-1). Son énoncé nécessite l'introduction d'une terminologie auxiliaire. Soit W un ensemble bien ordonné et X un ensemble. Pour $a \in W$, une suite "du type a dans X" est une application φ de $s(a)$ dans X. (Par exemple, si $W = \omega$, $s(n) = n$ et φ est la donnée des $\varphi(P)$ pour $p < n$)

Une fonction de prolongement (sur W) à valeurs dans X est une application f dont la source est formée de toutes les suites de type a dans X, pour tout $a \in W$, et dont le but est X.

(Soit encore par exemple $W = \omega$ et f' une application de X dans lui-même. Alors on peut définir une fonction de prolongement f en posant :

$f(\varphi) = a$, a étant un point choisi dans X si $\varphi : s(0)\ (=\emptyset) \longrightarrow X$, et
$f(\varphi) = f'(\varphi|s(n))$ si $\varphi : s(n^+) \longrightarrow X$).

Le théorème s'énonce alors ainsi : *Soit W un ensemble bien ordonné et f une fonction de prolongement (sur W) à valeurs dans X. Alors il existe une unique fonction U de W dans X telle que $U(a) = f(U^a)$ où $U^a = U|s(a)$ pour tout $a \in W$).* (Avec les exemples donnés antérieurement on trouve qu'il existe $U : \omega \longrightarrow X$ telle que $U(0) = a$ et $U(n^+) = f'(U(n))$. C'est-à-dire, on retrouve le théorème de construction par induction ordinaire).

§ 3 - Isomorphismes d'ensembles bien ordonnés

3-1 Par isomorphisme entre deux ensembles ordonnés X et Y on entend une bijection f telle que $x \leq x' \Longleftrightarrow f(x) \leq f(x')$ pour $x, x' \in X$

3-2 Dans le cas particulier des ensembles bien ordonnés on a les résultats remarquables suivants :

(1) *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un isomorphisme entre ensembles bien ordonnés Alors f est unique*

(2) *Un ensemble bien ordonné n'est jamais isomorphe à l'un de ses segments initiaux.*

(3) *Soient X et Y deux ensembles bien ordonnés. Alors soit X est isomorphe à Y, soit l'un d'eux est isomorphe à un segment initial de l'autre.*

(4) *Chaque sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné X est isomorphe, soit à X, soit à un segment initial de X.*

IV - NOMBRES ORDINAUX ET ARITHMETIQUE ORDINALE

§ 1 - Les nombres ordinaux et les ensembles d'ordinaux

1-1 Un nombre ordinal α est un ensemble bien ordonné tel que $s(\xi) = \xi$ pour tout $\xi \in \alpha$. On remarque en particulier que tout ordinal est un ensemble transitif. Tout nombre naturel est un ordinal ainsi que ω. Le successeur α^+ de tout ordinal α est un ordinal.

1-2 Si A est un ensemble, il existe au plus une seule relation d'ordre sur A qui en fasse un ordinal, précisément la relation définie par $y < x$ si, et seulement si, $y \in x$. Si A muni de cette relation binaire n'est pas ordinal, il n'existe aucune relation d'ordre sur A qui en fasse un ordinal.

1-3 On a vu en (1-1) que les éléments de ω sont des ordinaux (finis) ; en fait on peut préciser beaucoup plus : ce sont les seuls ordinaux finis.

1-4 La notion d'isomorphisme d'ensembles ordonnés ou même bien ordonnés devient triviale dans le cas des ordinaux puisque *deux ordinaux isomorphes sont égaux*. Cette remarque essentielle conduit au théorème fondamental suivant de comparaison d'ordinaux :

Si α et β sont deux ordinaux, on est dans l'une des deux situations suivantes : $\alpha = \beta$ ou $\alpha \in \beta$ (dernière assertion qui est ici équivalente à $\alpha \underset{s}{\subset} \beta$)

1-5 Le théorème énoncé en (1-4) conduit naturellement à poser la relation suivante entre ordinaux : $\alpha < \beta$ si, et seulement si, $\alpha \in \beta$. Sur un ensemble d'ordinaux, elle induit une structure de bon ordre.

On peut faire les quelques remarques suivantes :

Si α est un ordinal ayant un prédécesseur immédiat β (pour la relation d'ordre ci-dessus) alors $\alpha = \beta^+$. Un ordinal sans prédécesseur immédiat est appelé un "ordinal limite", c'est le cas, par exemple de ω.

Tout ensemble d'ordinaux est bien ordonné pour la relation d'inclusion et possède une borne supérieure en ce sens qu'il existe un ordinal supérieur ou égal à tous ceux de l'ensemble considéré et que tout autre ordinal ayant cette même propriété lui est supérieur ou égal.

Il résulte immédiatement de cette dernière remarque qu'il n'existe pas "l'ensemble de tous les ordinaux".

1-6 Les diverses propriétés des ordinaux énoncées dans cette partie, conduisent au résultat fondamental suivant : *Tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal unique.*

(signalons ici et uniquement pour être précis du point de vue logique que la démonstration de ce résultat nécessite l'introduction d'un nouvel axiome en théorie des ensembles, appelé l'axiome de substitution. Il dit en gros que tout ce que l'on peut faire de sensé avec les éléments d'un ensemble engendre un ensemble. Plus précisément : Si $S(a, b)$ est une assertion telle que pour tout a dans un ensemble A on peut former l'ensemble $\{b : S(a, b)\}$ alors il existe une fonction de source A telle que $F(a) = \{b : S(a, b)\}$ pour tout $a \in A$)

1-7 Le principe d'induction transfinie (III-2-1) s'utilise comme suit dans le cadre des ordinaux : soit ξ un ordinal et pour tout ordinal $\alpha < \xi$ on considère une propriété $P(\alpha)$ et l'on se propose de démontrer que $P(\alpha)$ est vraie pour tout $\alpha < \xi$. On montre alors directement que $P(0)$ est vraie, puis que pour α, avec $\alpha^+ < \xi$, si $P(\alpha)$ est vraie alors $P(\alpha^+)$ est vraie, et enfin que si $\alpha < \xi$ est un ordinal limite tel que $P(\beta)$ est vraie pour tout $\beta < \alpha$, alors $P(\alpha)$ est vraie. Le principe d'induction permet alors de conclure.

On remarque par exemple que l'axiome de récurrence standard (II-2-1) est un cas particulier du précédent en prenant $\xi = \omega$. Il est clair que la dernière des trois conditions précédentes à vérifier est caduque dans ce cas.

§ 2 - Arithmétique ordinale

2-1 Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. On définit la "somme ordinale de E et de F" comme l'ensemble somme E+F muni du bon ordre défini par $a < b$ si, et seulement si, $a \in E$, $b \in F$ ou bien $a, b \in E$ (resp : F) avec $a < b$ dans E (resp : F). (La construction de la somme ensembliste E+F ne suppose en rien que E et F soient disjoints).

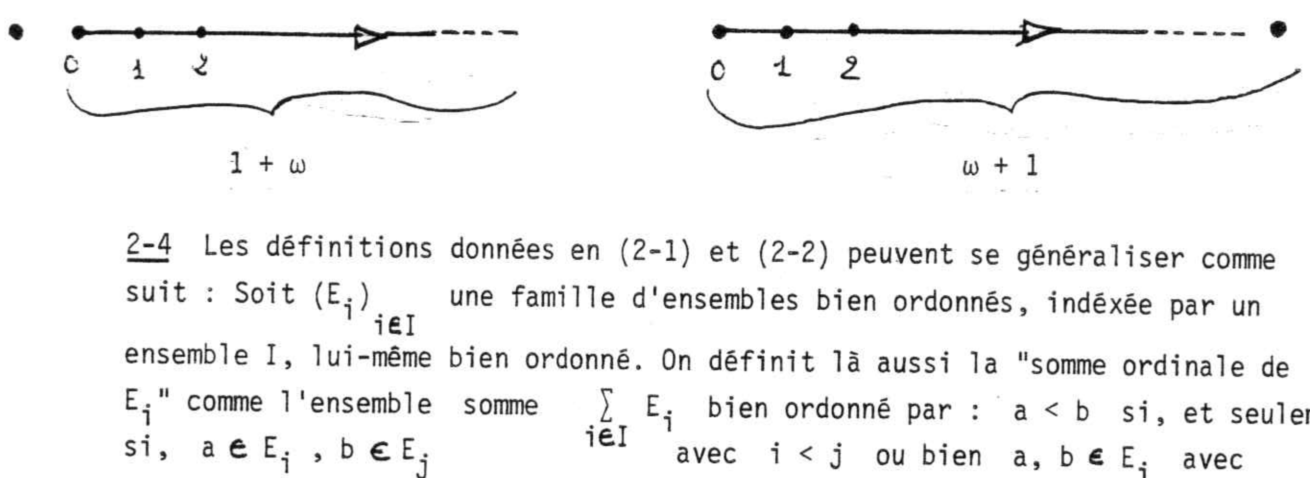
2-2 Soient α et β deux ordinaux. Désignons par E et F deux ensembles quelconques bien ordonnés (éventuellement α et β eux-mêmes) respectivement isomorphes à α et β . D'après (2-1) on sait construire l'ensemble bien ordonné E+F qui, d'après (1-6), est isomorphe à un ordinal unique que l'on note ord(E+F). On définit alors l'ordinal somme de α et β , noté $\alpha + \beta$, comme ord(E+F). Il y a lieu évidemment, pour s'assurer que cette définition est cohérente, de montrer que le résultat est indépendant du choix de E et F.

2-3 La somme d'ordinaux vérifie les propriétés suivantes :

(1) Pour les ordinaux finis, elle coïncide avec la somme des entiers naturels définie en (II-3-2)

(2) $\alpha + 0 = \alpha$
$0 + \alpha = \alpha$
$\alpha + 1 = \alpha^+$
$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

(3) La commutativité est en défaut ; par exemple $1 + \omega = \omega$ et $\omega + 1 \neq \omega$ (plus précisément $\omega < \omega + 1$)



2-4 Les définitions données en (2-1) et (2-2) peuvent se généraliser comme suit : Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles bien ordonnés, indéxée par un ensemble I, lui-même bien ordonné. On définit là aussi la "somme ordinale de E_i" comme l'ensemble somme $\sum_{i \in I} E_i$ bien ordonné par : $a < b$ si, et seulement si, $a \in E_i$, $b \in E_j$ avec $i < j$ ou bien $a, b \in E_i$ avec $a < b$ dans E_i. Maintenant, si $(\alpha_i)_{i \in I}$ désigne une famille d'ordinaux indéxée par l'ensemble bien ordonné I, soit A_i un ensemble bien ordonné quelconque isomorphe à α_i. On construit alors l'ensemble bien ordonné $\sum_{i \in I} A_i$ et l'on pose $\sum_{i \in I} \alpha_i = \mathrm{Ord}\,(\sum_{i \in I} A_i)$

<u>2-5</u> Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. On définit le "produit ordinal de E et de F" comme le produit cartésien $E \times F$ muni du bon ordre défini par : $(a, b) < (a', b')$ si, et seulement si, $b < b'$ dans F ou $b = b'$ et $a < a'$ dans E. (C'est l'ordre inverse de l'ordre lexicographique).

On peut aussi, à l'aide de l'extension donnée en (2-4), regarder le produit ordinal $E \times F$ d'une autre façon fort commode : on considère la famille $(E_b)_{b \in F}$ (c'est-à-dire "F copies de E") dont on fait la somme ordinale.

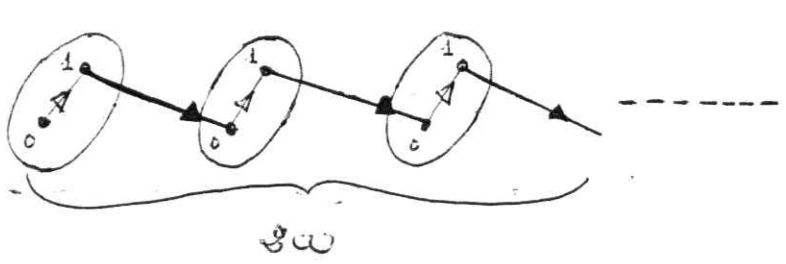
<u>2-6</u> Soient α et β deux ordinaux et à nouveau E et F deux ensembles bien ordonnés quelconques, respectivement isomorphes à α et β . Construisant le produit ordinal $E \times F$, on définit l'ordinal produit de α et β , noté $\alpha . \beta$ comme $\mathrm{Ord}(E \times F)$.

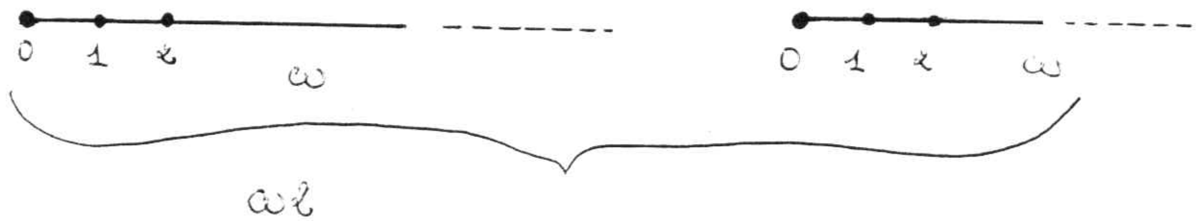
<u>2-7</u> Le produit d'ordinaux vérifie les propriétés suivantes :

(1) Pour les ordinaux finis, il coïncide avec le produit d'entiers naturels défini en (II-3-2).

(2) $\alpha.0 = 0$
$0.\alpha = 0$
$\alpha.1 = \alpha$
$1.\alpha = \alpha$
$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

(3) La commutativité est en défaut ; par exemple $2\omega = \omega$ et $\omega 2 \neq \omega$ (plus précisément $\omega < \omega 2$)





(4) La distributivité à droite est en défaut ; par exemple
$(1+1).\omega = 2.\omega = \omega \neq \omega.2 = \omega + \omega = 1.\omega + 1.\omega$

2-8 Pour définir l'exponentiation de deux ordinaux α et β , soit α^β , on peut procéder à l'aide d'une extension du produit ordinal un peu comme il a été fait en (2-4) pour la somme ordinale. Mais ici, la généralisation n'est pas aussi simple. Elle conduit cependant à une exponentiation d'ordinaux vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\alpha^0 = 1$; $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta.\alpha$; si β est un ordinal limite α^β est la borne supérieure des α^γ avec $\gamma < \beta$. (Par exemple 2^ω est la borne supérieure de la famille d'ordinaux : $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$, c'est-à-dire, est égal à ω).

(2)
$$0^\beta = 0 \ (\beta \geqslant 1)$$
$$1^\beta = 1$$
$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta.\alpha^\gamma$$
$$\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$$

(3) En général, $(\alpha\beta)^\gamma$ est différent de $\alpha^\gamma\ \beta^\gamma$; par exemple
$(2.2)^\omega = 4^\omega = \omega$ et $2^\omega.2^\omega = \omega.\omega \neq \omega$

2-9 Il faut remarquer que la notation exponentielle ordinale ne coïncide pas avec la notation ensembliste usuelle. Par exemple, comme il a été indiqué en (2-8), 2^ω en tant qu'ordinal est égal à ω, alors qu'en tant qu'ensemble, c'est l'ensemble des applications de ω dans 2. On vérifiera plus tard que ce dernier ensemble n'est pas équipotent à ω et est de cardinal strictement supérieur.

2-10 Commençons à écrire à titre d'amusement la "suite" des ordinaux. On commence avec 0, 1, 2,... puis vient ω et ensuite $\omega+1$, $\omega+2$, ... puis vient $\omega 2$; on continue avec $\omega 2+1$, $\omega 2+2$... puis vient $\omega 3$. On obtient ainsi ω, $\omega 2$, $\omega 3$, ... puis vient ω^2 et ainsi de suite : ω^2+1, ω^2+2, ... , $\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1$, $\omega^2+\omega+2$,... $\omega^2+\omega.2$, $\omega^2+\omega.2+1$, $\omega^2+\omega.2+2$, ... , $\omega^2+\omega.3$, ..., $\omega^2+\omega.4$, ... $\omega^2.2$,..., $\omega^2.3$, ... $\omega^2.4$, ..., ω^3, ... , ω^4, ... , ω^ω, $\omega^\omega+1$, $\omega^\omega+2$, ..., $\omega^\omega+\omega$, ... , $\omega^\omega+\omega.2$, ... $\omega^\omega+\omega^2$, ... $\omega^\omega+\omega^3$, ..., $\omega^\omega.2$, ... $\omega^\omega.3$, ... $\omega^{\omega+1}$, ..., $\omega^{\omega+2}$, ..., $\omega^{\omega.2}$, ..., $\omega^{\omega.3}$, ..., $\omega^{(\omega^2)}$, ... $\omega^{(\omega^3)}$, ..., $\omega^{(\omega^\omega)}$, ..., $\omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}$ et ainsi de suite en puissances. Il vient alors après un nouveau saut un ordinal que nous notons ε , puis on reprend avec $\varepsilon+1$, $\varepsilon+2$, ... $\varepsilon+\omega$, ... $\varepsilon+\omega.2$, ... , $\varepsilon+\omega^2$, ..., $\varepsilon+\omega^{\omega}$, ..., $\varepsilon.2$, ..., $\varepsilon.\omega$,..., $\varepsilon\omega^2$, ..., $\varepsilon\omega^{\omega}$, ..., ε^2, ε^2+1, ..., ε^3, ..., ε^{ω}, ...

On remarquera que tous les ordinaux écrits ci-dessus et à partir de ω sont équipotents à ω.

V - NOMBRES CARDINAUX ET ARITHMETIQUE CARDINALE

§ 1 - Théorème de BERNSTEIN - Théorème de CANTOR

1-1 Pour deux ensembles X et Y on écrit $X \preccurlyeq Y$ pour traduire que X est équipotent à une partie de Y. Cette relation entre ensembles est évidemment réflexive et transitive. Le théorème de BERNSTEIN assure de plus qu'elle est antisymétrique en ce sens que $X \preccurlyeq Y$ et $Y \preccurlyeq X$ impliquent que X et Y sont équipotents, ce que l'on note $X \equiv Y$.

Il n'est pas évident, à priori, que pour deux ensembles donnés X et Y on ait soit $X \preccurlyeq Y$, soit $Y \preccurlyeq X$ et pourtant ceci est bien le cas. On peut le voir en pensant que X et Y peuvent être bien ordonnés (III-1-1) puis en utilisant le théorème (III-3-2) de comparaisons des ensembles bien ordonnés.

Pour préciser que X est équipotent à une partie de Y, mais n'est pas équipotent à Y, on note $X \prec Y$.

1-2 Un ensemble X est dit dénombrable si $X \preccurlyeq \omega$. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable et un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

1-3 Si X est un ensemble fini de n éléments, on sait facilement montrer que $\mathcal{P}(X)$ est aussi fini, a 2^n éléments et que $n < 2^n$. Dans ce cas, X est bien sûr toujours équipotent à une partie de $\mathcal{P}(X)$, mais ne lui est jamais équipotent Le théorème de CANTOR assure que ce résultat demeure sans l'hypothèse de finitude sur X. C'est-à-dire $X \prec \mathcal{P}(X)$, pour tout ensemble X, ou sous une autre forme $X \prec 2^X$, où 2^X désigne l'ensemble des applications de X dans 2, qui est équipotent à $\mathcal{P}(X)$.

§ 2 - Nombres cardinaux

2-1 Il arrive parfois que pour "définir" rapidement la notion de cardinal d'un ensemble, on procède comme suit : X étant un ensemble, on définit Card (X) comme étant la famille des ensembles équipotents à X. Malheureusement, cette présentation est incohérente dans le cadre de la théorie des ensembles, la famille des ensembles équipotents à un ensemble donné ne constituant pas un ensemble. La bonne méthode consiste au contraire à savoir exhiber dans la famille des ensembles équipotents à l'ensemble X un ensemble privilégié qui sera le cardinal de X. Plusieurs méthodes sont employées : par exemple, le procédé utilisé par BOURBAKI consiste à choisir dans la famille considérée, un ensemble particulier grâce à une sorte d'axiome du choix masqué derrière le τ de HILBERT. Nous allons ici procéder différemment en utilisant ce que nous savons déjà sur les nombres ordinaux.

2-2 Soit X un ensemble. Si la famille des ensembles équipotents à X est quelque chose de "trop gros" dans le cadre de la théorie des ensembles, on peut essayer de se restreindre à la famille des ordinaux équipotents à X. On a alors le résultat essentiel suivant : *la famille des ordinaux équipotents à X constitue un ensemble.*

2-3 On convient de dire qu'un cardinal est un nombre ordinal α tel que si β est un ordinal équipotent à α on a $\alpha \leqslant \beta$. Par exemple, tout entier naturel est un cardinal, ω est aussi un cardinal ; par contre l'ordinal $\omega+1$ qui est équipotent à ω n'est pas un cardinal.

On remarque que tout cardinal infini est un ordinal limite, mais la réciproque est fausse ; par exemple, $\omega 2$ est un ordinal limite et qui n'est pas un cardinal : il est équipotent à ω et lui est strictement supérieur.

2-4 Si X est un ensemble, on définit Card (X) (Cardinal de X) comme le plus petit élément de l'ensemble des ordinaux équipotents à X. Tout d'abord cette définition a bien un sens d'après (2-2) et (IV-1-5). Ensuite, la propriété d'élément minimum de Card (X) assure qu'il s'agit bien d'un cardinal.

2-5 La notion de cardinal d'un ensemble vérifie les propriétés suivantes :

(1) $X \equiv Y \Longleftrightarrow$ Card(X) = Card(Y)

(2) Si X est fini, alors Card(X) = n, le seul entier équipotent à X.

(3) $X \propto Y \Longleftrightarrow$ Card(X) $<$ Card(Y)

(4) Card(Card X) = Card(X)

§ 3 - Arithmétique cardinale

3-1 Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux indexée par un ensemble I. Pour tout $i \in I$, soit A_i un ensemble quelconque équipotent à a_i et $\sum_{i \in I} A_i$ la somme ensembliste des A_i. On définit la somme cardinale des a_i, notée $\sum_{i \in I} a_i$, par Card ($\sum_{i \in I} A_i$). Il y a bien sûr lieu de s'assurer de l'indépendance du choix des A_i.

De même, le produit cartésien $\prod_{i \in I} A_i$ permet de définir le produit cardinal des a_i, noté $\underset{i \in I}{X} a_i$, par Card ($\prod_{i \in I} A_i$).

Enfin, a et b étant deux cardinaux et A et B deux ensembles quelconques respectivement équipotents à a et b, on définit le cardinal a^b par Card (A^B).

3-2 Les opérations précédentes sur les cardinaux vérifient les propriétés agréables usuelles, dont certaines faisaient défaut en ce qui concerne les ordinaux.

$a+b = b+a$; $ab = ba$; $a(b+c) = ab + ac$; $a^{b+c} = a^b.a^c$, $(ab)^c = a^c b^c$

3-3 Remarquons que a étant un cardinal et A un ensemble équipotent à a, on a :

$$2^a = \text{Card}(2^A) = \text{Card}\ (\mathcal{P}(A) > \text{Card}(A) = a$$

ce qui généralise au cas de n'importe quel cardinal l'inégalité classique $2^n > n$ sur les entiers naturels. (Rappelons que la première inégalité stricte provient de (1-3) et (2-5)).

3-4 Attention au fait que dans la plupart des cas, les opérations cardinales et ordinales ne coïncident pas, bien qu'un usage établi depuis longtemps ne fait pas de distinction au niveau des notations. En voici quelques exemples :

opération cardinale	opération ordinale :
$\omega + 1 = \omega$	$\omega < \omega + 1$
$\omega.2 = \omega$	$\omega < \omega.2$
$2^{\omega} > \omega$	$2^{\omega} = \omega$

Toutefois si α et β désignent deux ordinaux on a les règles suivantes :

$$\mathrm{Card}(\alpha+\beta) = \mathrm{Card}(\alpha) + \mathrm{Card}(\beta)$$
$$\mathrm{Card}(\alpha.\beta) = \mathrm{Card}(\alpha).\ \mathrm{Card}(\beta)$$

où les opérations dans les membres de gauche sont les opérations ordinales et où celles dans les membres de droite sont les opérations cardinales.

§ 4 - L'hypothèse du continu

ω est le plus petit ordinal transfini et par conséquent $\mathrm{Card}(\omega) = \omega$, noté en tant que cardinal pour la commodité de ce qui suit et en accord avec l'usage. $\aleph_0$ (aleph zéro). Le résultat de Cantor (1-3) dit en particulier que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ et donc $2^{\aleph_0}$ n'est pas dénombrable. Comme tout ensemble d'ordinaux est bien ordonné (IV-1-5), il existe le plus petit ordinal non dénombrable ; c'est un cardinal que l'on note $\aleph_1$ et l'on a donc $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$

La dernière inégalité pose deux problèmes : Tout d'abord, s'agit-il d'une inégalité stricte et si oui, ensuite existe-t-il un cardinal a tel que $\aleph_1 < a < 2^{\aleph_0}$?

L'hypothèse du continu consiste à affirmer que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Puisque l'on peut établir que Card $(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ (où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels) l'hypothèse du continu revient à prétendre que toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est équipotente soit à l'ensemble des naturels, soit à celui des réels.

Depuis le début du siècle, on a cherché en vain à démontrer cette hypothèse. En 1962, le mathématicien américain COHEN établit que cette hypothèse était indécidable et que l'on pouvait ajouter au système actuel d'axiomes en Mathématiques aussi bien l'hypothèse du continu que sa négation.

ANNEXE 3

DE LA CONSTRUCTION NAIVE DU CARDINAL... A LA CONSTRUCTION BOURBAKISTE

Les travaux de PIAGET ont servi pour une large part à la nouvelle introduction du "nombre" à l'école élémentaire. Comment procède-t-on ? Voici un extrait des instructions officielles (cycle préparatoire 77).

> *"Exercices de mise en correspondance terme à terme, notion de autant que...*
> *Classement de collections d'objets en utilisant la correspondance terme à terme. On attachera la propriété "nombre" aux classes ainsi obtenues".*

Cette introduction du nombre préconisée à l'école élémentaire n'est pas sans analogies avec la construction bourbakiste de la notion de cardinal. Ces analogies sont cependant naïves. Pour s'en convaincre, traduisons en langage plus mathématiques ces instructions :

- nous dirons que deux ensembles X et Y sont équipotents (X éq Y) s'il existe une bijection de X sur Y. (Cela traduit la correspondance terme à terme). Il est facile de montrer les propriétés suivantes :

Si X, Y, et Z sont trois ensembles

1) $X \text{ eq } X$
2) $X \text{ eq } Y \Longrightarrow Y \text{ eq } X$
3) $\left.\begin{array}{l} X \text{ eq } Y \\ Y \text{ eq } Z \end{array}\right\} \Longrightarrow X \text{ eq } Z$

Cette relation "être équipotent à" semble être une relation d'équivalence (dans le sens usuel) et est considérée comme telle par les instructions officielles, ce qui permet d'appeler Card X "l'ensemble" des ensembles Y équipotents à X.

Mais l'assertion "Y est équipotent à X" n'est pas collectivisante en Y, c'est-à-dire ne définit pas un ensemble. Dès lors, nous voyons que la difficulté réside dans le fait que la "famille" des ensembles équipotents à X constitue en quelque sorte un "objet" mathématique qui sort du cadre de la théorie des ensembles. Le donner comme définition de Card X est donc incohérent dans un langage ensembliste.

BOURBAKI place la théorie des Cardinaux à l'intérieur de sa théorie des ensembles, définie axiomatiquement, certains axiomes laissant une place restreinte à l'intuition (contrairement à l'axiomatique de PEANO relative aux entiers naturels).

<u>Précisons un peu la démarche bourbakiste</u> :

Etant donné un ensemble X on dispose d'une technique abstraite (utilisation du symbole τ de HILBERT) qui permet de construire un ensemble privilégié équipotent à X ; on dit que c'est un cardinal et on le note Card X.

On peut montrer immédiatement que cette construction satisfait à la propriété essentielle suivante : pour deux ensembles X et Y on a l'équivalence

$$X \text{ eq } Y \Longleftrightarrow \text{Card } X = \text{Card } Y$$

On constate que la relation "Y est un cardinal" n'est pas collectivisante en Y. Autrement dit, pas plus qu'il n'existe "l'ensemble de tous les ensembles" il n'existe pas non plus "l'ensemble des cardinaux".

Pour deux cardinaux α et β on définit $\alpha + \beta$ comme Card($A \cup B$) où $A \cup B$ désigne ici la réunion disjointe de deux ensembles quelconques de cardinaux respectifs α et β. (Il y a évidemment lieu de s'assurer que cette définition est indépendante du choix des ensembles A et B).

Si on désigne Card $\{\emptyset\}$ par 1, on conviendra de dire qu'un cardinal α est fini si $\alpha \neq \alpha+1$, ou encore que ce cardinal α est un nombre naturel. On prolonge cette définition en disant qu'un ensemble X est fini si Card X est fini.

On peut ici se poser deux questions en apparence assez disjointes :

1) Existe-t-il des ensembles infinis ? (c.a.d. non finis)
2) Est-ce que cette fois, il existe "l'ensemble des nombres naturels" ?

(ou sous une autre forme, la relation "α est un cardinal fini" est-elle collectivisante en α ?)

Curieusement on ne peut répondre ni à la question 1 ni à la question 2 et plus précisément, ne pouvant pas construire d'ensemble infini, on ajoute à ce stade un axiome supplémentaire appelé axiome de l'infini qui affirme l'existence d'ensembles infinis. On peut alors répondre "oui" à la question 2, ce qui fournit l'existence de $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels.

On peut alors démontrer les propriétés élémentaires de $\mathbb{N}$ dont certaines sont introduites comme axiomes dans des théories plus naïves (par exemple : système de PEANO) y compris "l'axiome de récurrence" qui devient plus exactement ici le "théorème de récurrence".

ANNEXE 4

CODAGE DES NOMBRES : LES SYSTEMES DE NUMERATION A BASE

Nous avons vu dans le chapitre I comment se sont élaborés au cours des siècles, des systèmes d'écriture des nombres.

Les règles de fonctionnement du système que nous utilisons aujourd'hui nous sont familières : nous savons reconnaître les écritures qui désignent des nombres, nous savons comparer ces nombres à l'aide de leurs écritures, nous savons trouver l'écriture du suivant d'un nombre,...

Nous sommes convaincus de la valeur de ces règles sur le plan pratique. Cette conviction repose sur le fait que ces règles peuvent être dégagées de l'expérience, une expérience simple qu'on peut mettre en oeuvre à travers des activités de groupement ou d'échange, l'utilisation d'abaques, de planches à compter, de bouliers, à partir de collections d'objets matériels ou représentés. Les règles de notre numération peuvent ainsi recevoir une justification expérimentale et c'est ce type de justification qu'on cherche à mettre en oeuvre à l'école élémentaire.

Mais nous pouvons aussi nous poser la question : comment justifier ces règles d'écriture des nombres sans se référer à une expérience pratique, comment les resituer à l'intérieur d'un discours mathématique cohérent d'où seront absents les objets matériels, jetons, abaques... ?

C'est pourquoi, après avoir recensé les principales règles de fonctionnement de notre système de numération, et plus généralement des systèmes de numération dits "à base", nous essaierons de voir comment on peut les justifier sur le plan expérimental et sur le plan théorique.

I - LES REGLES D'ECRITURE DES NOMBRES DANS LES SYSTEMES DE NUMERATION A BASE

Essayons de dégager les règles essentielles de fonctionnement des systèmes de numération à base. Nous envisagerons le cas général avec quelques exemples.

Exemples

Soit a un nombre entier	a = dix	a = trois	a = douze	a = 60
Un système de numération de base a se présente de la façon suivante :				
- a symboles appelés "chiffres" ces chiffres servent aussi à désigner les nombres inférieurs à a	les chiffres en usage aujourd'hui sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	On peut prendre n'importe quels symboles pour plus de simplicité nous utiliserons les trois premiers chiffres usuels : 0, 1, 2	Pour désigner les nombres jusqu'à 9 nous prendrons les symboles usuels. Mais il nous faut aussi un symbole particulier pour désigner dix et un autre pour désigner 11, prenons par exemple : 0,1,2,3, 4,5,6,7,8,9,&, §	Il nous faut cette fois 60 symboles distincts ; pour plus de simplicité, nous imiterons les babyloniens et prendrons comme chiffres les écritures usuelles en base dix des nombres inférieurs à 60. Pour plus d'homogénéité, nous prendrons deux signes pour chaque chiffre. Nous aurons ainsi 60 chiffres : 00, 01,02,03,...57, 58,59.
- On obtient l'écriture d'un nombre en écrivant un ou plusieurs chiffres les uns à la suite des autres.	2705, 6, 499 sont des écritures correctes $2^{7}_{5}0$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{4}$, 4§78, sont des écritures incorrectes.	10, 11122, 0, sont des écritures correctes $\genfrac{}{}{0pt}{}{02}{10}$, 230, &1 sont des écritures incorrectes.	7&0, 88§9&4, 614, &, §0, sont des écritures correctes. $0/^{78}$, 5≡§4, sont des écritures incorrectes	Pour plus de clarté, nous ajouterons la convention de placer un point entre deux chiffres. Ainsi, 42.05, 06.00.37, 21.00 sont des écritures correctes. 42.5.3, 4604, sont des écritures incorrectes.
Lorsque le premier chiffre est celui qui représente 0, l'écriture obtenue en supprimant ce chiffre désigne le même nombre. On convient de ne conserver que l'écriture ne commençant pas par le chiffre 0.	278, 000278, 0278 désignent le même nombre On l'écrit : 278	001221, 1221, 000001221 désignent le même nombre On l'écrit : 1221	0&17, 0000&17, &17 désignent le même nombre On l'écrit : &17	00.05.45.30, 00.00.00.05. 45.30.05.45.30 désignent le même nombre On l'écrit : 05.45.30

.../...

.../...

- On obtient l'écriture du suivant d'un nombre de la façon suivante : . Si le dernier chiffre n'est pas le chiffre représentant le prédécesseur de a, on le remplace par son suivant . Si le dernier chiffre est le chiffre représentant le prédécesseur de a, on le remplace par le chiffre du 0 ; puis on regarde l'avant-dernier chiffre et on réitère le procédé.	le prédecesseur de 10 (neuf) est désigné par (9) le suivant de 7 : 8 suivant de 624 : 625 de 8700 : 8701 de 19 : 20 de 799 : 800 de 9999 : 10000	le prédecesseur de trois (deux) est désigné par : 2 suivant de 1 : 2 de 120 : 121 de 111 : 112 de 12 : 20 de 122 : 200 de 2222 : 10000	le prédecesseur de douze (onze) est désigné par : § suivant de 9 : & de 720 : 721 80& : 80§ de 7§ : 80 de &6§§ : &700 de §§§§ : 10000	le prédecesseur de soixante (cinquante neuf) est désigné par : 59 suivant de 07 : 08 de 27.21.00 : 27.21.01 de 59.37 : 59.38 de 09.59 : 10.00 de 17.59.59 : 18.00.00 de 59.59.59. : 01.00.00.00.00.
<u>remarque</u> : a s'écrit toujours avec le chiffre désignant un suivi du chiffre désignant 0	dix s'écrit 10	trois s'écrit 10	douze s'écrit 10	soixante s'écrit 01.00
- pour comparer deux nombres, on procède de la façon suivante : . Si leurs écritures n'ont pas le même nombre de chiffres, le plus grand est celui qui a le plus de chiffres . Si leurs écritures ont le même nombre de chiffres, on compare les chiffres de même rang à partir de la gauche jusqu'à ce qu'ils soient différents ; le plus grand correspond alors au plus grand des deux nombres.	627 < 1810 27 < 31 2618 < 2659 3989 < 4012	12 < 210 10 < 21 11202 < 11211 202 < 210	4§ < 5&9 79§ < 801 &999 < &9§8 992& < 99&2	37.54 < 01.01.01.28 17.21.12 < 30.58.00 02.27.53 < 02.27.58
- tout nombre peut s'écrire sous forme d'un polynôme des puissances de a dont les coefficients sont des nombres inférieurs à a. Ces coefficients sont les nombres correspondant aux chiffres de l'écriture "canonique" du nombre considéré.	2907 = 2×100 + 9×100 + 0×10 + 7	1021 = 1×1000 + 0×100 + 2×10 + 1	96&0 = 9×1000 + 6×100 + &×10 + 0	17.02.12.54 = 17×01.00.00.00 + 02×01.00.00 + 12×01.00 + 54

II - JUSTIFICATION EXPERIMENTALE

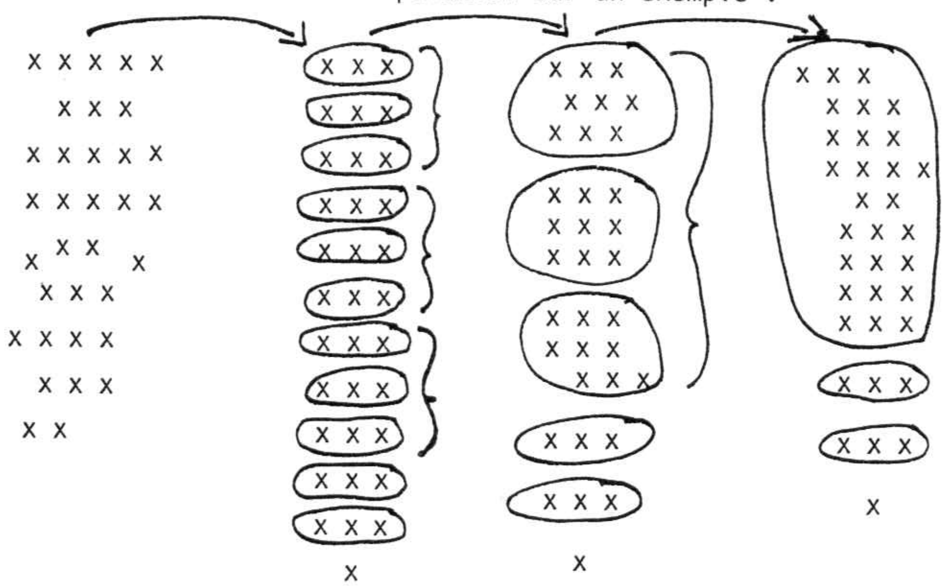
Ces règles que nous avons mises en évidence, nous sommes convaincus de leur validité. Cette conviction ne repose pas sur la démonstration d'un quelconque théorème mathématique, mais sur la confiance en une analyse expérimentale simple et connue dont nous donnerons une rapide description à partir d'un exemple.

Voyons comment justifier les règles de numération en base trois. Nous sommes capables de reconnaître les collections ayant au plus trois éléments ; pour celles en ayant moins, nous disposons de trois symboles : 0, 1, 2.

Pour donner un codage du nombre d'éléments d'une collection quelconque, nous pouvons procéder comme suit :

disposant des éléments de cette collection (ou d'une collection ayant autant d'objets), on fait tous les groupements possibles de trois objets. Il restera alors un nombre d'objets isolés éventuellement nul, mais de toutes façons inférieur à trois. Si le nombre de groupements n'est pas inférieur à trois, on les regroupe eux-mêmes par trois ; on obtient alors de nouveaux groupements qu'on va à leur tour grouper par trois, et ainsi de suite...

Schématisons cette manipulation sur un exemple :



On écrit alors successivement de droite à gauche : le chiffre correspondant au nombre d'éléments isolés, puis le chiffre correspondant au nombre de groupements de la première manipulation, puis le chiffre correspondant au nombre de groupements de la seconde manipulation, etc...

Dans l'exemple ci-dessus, on obtient le codage : 1021

...	groupements 3° type	groupements 2° type	groupements 1° type	éléments isolés
	X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X X		XXX XXX	x
codage	1	0	2	1

- Pour plus de commodité, on peut représenter la manipulation à l'aide d'un tableau du style de la planche à compter.

Ce type de manipulation peut se réaliser en utilisant d'autres types de matériel cubes emboîtables, bouliers, abaques, etc... et pour n'importe quelle base.

Dans tous les cas, on obtient un codage obéissant, de par sa construction, aux règles de fonctionnement que nous avons énoncées plus haut.

III - JUSTIFICATION THEORIQUE

1 - Position du problème

Revenons maintenant dans le cadre des théories mathématiques évoquées dans les précédentes annexes. Dans chacune de ces théories, on définit les nombres entiers et les opérations sur les nombres entiers indépendamment de tout système de codage.

Un problème se pose alors : les codages que nous utilisons couramment ont-ils droit de citer dans le discours mathématique ? Nous, nous doutons que oui ; encore va-t-il falloir en donner une justification qui ne repose pas sur des manipulations d'objets, mais sur la seule logique du discours mathématique lui-même.

* Dans l'explicitation des règles des numérations à base, nous avons vu que nous pouvions exprimer n'importe quel nombre à l'aide des nombres inférieurs ou égaux à la base et des opérations usuelles, sans référence à d'autres règles de codage.

Ainsi par exemple, 839 (base dix) peut s'écrire :

$$8 \times 10^2 + 3 \times 10 + 9$$

Sachant que ce même nombre peut encore s'écrire :

$$1 \times 3^6 + 0 \times 3^5 + 1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 0 \times 3, 1 + 2$$

nous l'écrivons en base trois : 101100

Sachant encore qu'il s'écrit :

$$2 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 0 \times 7 + 6$$

nous l'écrirons 2306 en base sept.

On pourrait ainsi continuer de façon analogue, et seules les décompositions suivant les puissances de 0 ou de 1 seraient impossibles.

Pratiquement donc, nous utilisons la connaissance de l'écriture d'un nombre sous forme d'un polynôme des puissances de a à coefficients inférieurs à a pour trouver immédiatement un codage de ce nombre dans la base a.

Nous pouvons donc raisonnablement penser que pour justifier les règles de codage des nombres dans une base donnée, il nous suffira de montrer :

. que tout nombre peut s'écrire sous forme d'un tel polynôme
. que cette décomposition est unique (pour être sûr que dans une base donnée, il n'existe pour un nombre donné qu'un seul codage possible).

* Comment procéderons-nous pour en arriver là ? Sans pour autant la prendre comme justification, nous pouvons nous inspirer de la manipulation décrite dans le II.

Lorsque nous faisons des groupements de trois et que nous nous intéressons aux éléments isolés qui restent, nous sommes en présence d'une situation qui relève du modèle mathématique de la division euclidienne : le nombre d'éléments isolés, c'est le reste de la division euclidienne par trois du nombre d'éléments de la collection considérée, le quotient étant le nombre de groupements obtenus. Plus précisément, nous avions 34 éléments ; comme $34 = 3 \times 11 + 1$, nous aurions pu prévoir, sans manipulation, en utilisant seulement notre connaissance de la base dix et de la division, qu'il serait resté un élément isolé et que nous aurions 11 groupements de 3. Dans la deuxième étape, sachant que $11 = 3 \times 3 + 2$, nous aurions pu aussitôt conclure à 3 nouveaux groupements et 2 petits groupements isolés, etc...

On peut ainsi penser que l'utilisation de la division euclidienne sera particulièrement adaptée dans ce que nous cherchons à démontrer.

2 - Le théorème fondamental

Soit a un entier naturel supérieur à 1 Tout entier naturel x s'écrit de manière unique sous la forme : $x_n a^n + \dots + x_i a^i + \dots + x_1 a + x_0$ avec $i \in \{0, \dots, n\}$, $0 \leqslant x_i < a$ pour tout i, et $x_n \neq 0$

* Montrons d'abord l'existence du développement.

Pour plus de clarté, nous mènerons de pair, l'étude de deux exemples (dans lesquels, le maniement de la base dix est supposé connu).

Mais il faut bien se rendre compte que ces exemples n'apportent rien à la démonstration elle-même ; celle-ci s'appuie sur la division euclidienne qui, répétons-le, se définit sur les nombres indépendamment de tout système de codage.

Si nous avons choisi de présenter malgré tout ces exemples en parallèle, c'est parce que, une fois reconnue, la validité des systèmes de numération, la démonstration nous permet de mettre en évidence un algorithme simple pour les changements de base et en particulier, pour écrire dans une base donnée un nombre dont on connaît l'écriture en base dix.

Deux cas peuvent se présenter :

		$a = 3$ $x = 572$	$a = 60$ $x = 61468$
$x < a$ On pose alors $x_0 = x$	$x \geqslant a$ La division euclidienne de x par a permet d'écrire : (1) $x = q_1 . a + x_0$ avec $0 \leqslant x_0 < a$ et $q_1 \neq 0$	$572 \geqslant 3$ (1) $572 = 190.3 + 2$	$61468 \geqslant 60$ (1) $61468 = 1024.60 + 28$
$q_1 < a$ On pose $x_1 = q_1$ et $x = x_1 a + x_0$ est le développement cherché	$q_1 \geqslant a$ La division euclidienne de q_1 par a permet d'écrire : (2) $q_1 = q_2 a + x_1$ avec $0 \leqslant x_1 < a$ et $q_2 \neq 0$ D'où, par substitution dans (1), on obtient : $x = (q_2 a + x_1)a + x_0$ (3) $x = q_2 a^2 + x_1 a + x_0$	$190 \geqslant 3$ (2) $190 = 63.3 + 1$ (3) $572 = 63.3^2 + 1.3 + 2$	$1024 \geqslant 60$ (2) $1024 = 17.60 + 4$ (3) $61468 =$ $17.60^2 + 4.60 + 28$
$q_2 < a$ on pose $x_2 = q_2$ et $x = x_2 a^2 + x_1 a + x_0$ est le développement cherché	$q_2 \geqslant a$ la division euclidienne de q_2 par a permet d'écriree: (4) $q_2 = q_3 a + x_2$ avec $0 \leqslant x_2 < a$ et $q_3 \neq 0$ Par substitution dans (3): (5) $x = q_3 a^3 + x_2 a^2 + x_1 a + x_0$	$63 \geqslant 3$ (4) $63 = 21.3 + 0$ (5) $572 = 21.3^3 + 0.3^2 + 1.3 + 2$	$17 < 60$ Donc (3) est le développement cherché
....		.....	

En réitérant le procédé, nous obtenons une suite de quotients :

$$(q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots) \quad \text{avec} \quad q_1 \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad i$$

Intuitivement, nous voyons bien que cette suite n'est pas illimitée et que pour un x et un a donnés, il y aura un dernier quotient non nul. Nous ne pouvons pourtant pas l'affirmer a priori et il est nécessaire de le montrer. On va voir qu'il nous suffit pour cela de montrer que cette suite de quotients est strictement décroissante.

En effet, chaque q_i est tel que $q_i = q_{i+1}{}^a + x_i$

donc $q_i \geqslant q_{i+1}{}^a$

et comme $a \geqslant 2$, $q_i > q_{i+1}$

La suite des quotients est donc strictement décroissante. Il existe donc un dernier quotient non nul q_n

Ce dernier quotient est nécessairement inférieur à a :

en effet, si on avait $q_n \geqslant a$, on pourrait écrire, par division euclidienne de q_n par a : $q_n = q_{n+1}{}^a + x_n$ et donc $q_n > q_{n+1}$ avec $q_{n+1} \neq 0$ et q_n ne serait pas, dans ce cas, le dernier quotient non nul.

On obtient donc finalement un dernier quotient non nul q_n, inférieur à a, et tel que : $x = q_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \ldots + x_i a^i + \ldots x_1 a + x_0$

En posant $x_n = q_n$, on obtient le développement cherché.

Ainsi, dans l'exemple avec $a = 3$ et $x = 572$, on a :

$$572 = 2.3^5 + 1.3^4 + 0.3^3 + 0.3^2 + 1.3 + 2$$

* Montrons maintenant l'<u>unicité du développement</u> ainsi trouvé

Pour cela, supposons qu'un naturel x admette deux développements possible

$x = x_0 + \ldots + x_i a^i + \ldots + x_n a^n$ $\qquad$ $x = y_0 + \ldots + y_i a^i + \ldots + y_p a^p$

avec $0 \leqslant x_i < a$ et $x_n \neq 0$ $\qquad$ avec $0 \leqslant y_i < a$ et $y_p \neq 0$

Nous allons montrer d'une part que $n = p$, d'autre part que les coefficients sont les mêmes, c'est-à-dire que pour tout i, $x_i = y_i$

- montrons d'abord que $n = p$

$x_0 < a$ donc $x_0 \leqslant a - 1$

$x_1 < a$ donc $x_1 \leqslant a - 1$ d'où $a.x_1 \leqslant a^2 - a$

...

$x_i < a$ donc $x_i \leqslant a - 1$ d'où $a^i.x_i \leqslant a^{i+1} - a^i$

...

$x_n < a$ donc $x_n \leqslant a - 1$ $a^n.x_n \leqslant a^{n+1} - a^n$

En "ajoutant membre à membre" toutes ces inégalités, nous obtenons :

$$x_0, a.x_1 + \ldots + a^i x_i + \ldots + a^n x_n \leqslant a^{n+1} - 1$$

c'est-à-dire $x \leqslant a^{n+1} - 1$

d'où $x < a^{n+1}$

Or, de $x = x_0 + \ldots + x_n a^n$ on déduit facilement $x \geqslant a^n$

Comme nous venons de montrer que $x < a^{n+1}$, c'est donc que n est le plus grand entier tel que $x \geqslant a^n$

On peut raisonner de façon tout à fait analogue avec l'autre développement de x et montrer que p est le plus grand entier tel que $x \geqslant a^p$

Et ceci implique : $n = p$

- montrons maintenant que les coefficients sont les mêmes ($x_i = y_i$ pour tout i) pour cela, nous procéderons par récurrence sur i :

• x_0 est le reste de la division euclidienne de x par a ; de même pour y_0. Comme le reste d'une division euclidienne est unique, $x_0 = y_0$

• Supposons que jusqu'à l'ordre i, les coefficients soient les mêmes :

$$x_0 = y_0, \ldots \; x_i = y_i$$

comme

$$x_0 + \ldots + x_i a^i + x_{i+1} a^{i+1} + \ldots + x_n a^n = y_0 + \ldots + y_i a^i + y_{i+1} a^{i+1} + \ldots + y_n a^n$$

on peut écrire, après simplification ;

$$x_{i+1}a^{i+1} + \dots x_n a^n = y_{i+1} + \dots + y_n a^n$$

puis $\quad x_{i+1} + \dots + x_n a^{n-i-1} = y_{i+1} + \dots + y_n a^{n-i-1}$

d'où $\quad x_{i+1} + a\,(x_{i+2} + \dots + x_n a^{n-i-2}) = y_{i+1} + a\,(y_{i+2} + \dots y_n a^{n-i-2})$

avec $\quad 0 \leqslant x_{i+1} < a \qquad$ et $\quad 0 \leqslant y_{i+1} < a$

x_{i+1} et y_{i+1} sont donc l'un et l'autre le reste dans la division euclidienne d'un même nombre par a, donc $x_{i+1} = y_{i+1}$

On peut donc lire que pour tout i, $x_i = y_i$ ce qui signifie que le développement de x est unique.

* Nous avons pu voir que c'est essentiellement sur la division euclidienne que s'appuie la démonstration, le problème étant de mettre en évidence les restes et quotients de divisions successives.

C'est ainsi que la recherche du développement d'un nombre peut se faire facilement à l'aide d'un algorithme simple de divisions successives qu'on peut mettre en oeuvre commodément de la façon suivante (en reprenant les deux exemples ci-dessus) ;

```
572 | 3                                      61468 | 60
27  | 190 | 3                                 14   | 1024 | 60
 02 |  10 | 63 | 3                             146  |  424 | 17
 2  |   1 | 03 | 21 | 3                         268 |    4 |
    |     |  0 |  0 | 7 | 3                      28 |
    |     |    |    | 1 | 2
```

(les coefficients du polynôme ont été entourés)

3 - <u>Le codage des nombres</u>

Nous savons donc que si a est un entier naturel supérieur à 1, tout nombre x s'écrit de façon unique :

$$x_0,\ x_1 a + \dots + x_n a^n \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x_i < a \quad \text{et} \quad x_n \neq 0$$

Tous les x_i sont strictement inférieurs à a. Il nous suffit donc de choisir un symbole (chiffre) pour chaque nombre inférieur à a. Alors chacun des x_i pourra être désigné par l'un de ces symboles et on conviendra d'écrire x sous la forme suivante : on écrit de gauche à droite le symbole représentant x_n, puis le symbole représentant x_{n-1}, etc... le symbole représentant x_1 et enfin le symbole représentant x_0

Ainsi par exemple, si nous choisissons pour la base trois, des symboles des nombres inférieurs à trois analogues à ceux utilisés en base dix, nous aurons pour le nombre qui s'écrit 572 en base dix, l'écriture en base trois suivante :

210012

Si nous choisissons pour la base soixante des symboles tels que ceux décrits dans I, nous aurons pour le nombre qui en base dix s'écrit 61468, l'écriture en base soixante suivante :

17.04.28

Ajoutons enfin qu'en utilisant la signification polynomiale de l'écriture les nombres dans une base donnée, on peut justifier toutes les règles que nous avions énoncées dans le I.

CONCLUSION

Au long de ce document, nous avons essayé de comprendre comment peut se construire et se développer l'idée de nombre, tant sur le plan des sociétés que celui des individus.

A la question "qu'est-ce qu'un nombre ?", plusieurs types de réponses sont possibles suivant le point de vue auquel on se place. Il reste que le nombre est le produit d'une activité intellectuelle, d'une certaine mathématisation de la réalité. Il n'est pas une idée mathématique ayant une existence en soi, dépendante ou non de la réalité et qui ne pourrait être que "découverte" Le nombre est une création ; il est, comme tout concept mathématique, un outil construit et utilisé par l'homme dans des conditions déterminées, historiques, techniques, économiques, sociales, politiques, religieuses, intellectuelles, idéologiques...

C'est ainsi qu'on voit la pratique des nombres naître d'une nécessité de comparer des biens, des avoirs se présentant sous forme de collections (comme des troupeaux par exemple...) ; se développer différemment suivant la valeur technique des systèmes de numération, les préoccupations des peuples ou leur influence politique, servir de modèle d'explication du monde, devenir un champ d'application pour une activité intellectuelle gratuite ou non, spéculative ou pratique, s'enrichir lorsqu'apparaissent de nouvelles nécessité (cf les extensions de la notion de nombre à partir des problèmes de mesure ou de proportion), se chercher des justifications internes dans le domaine mathématique, etc...

Instrument créé par l'homme, lui assurant un pouvoir par son utilisation, le nombre n'est pas un savoir que le maître d'école doit transmettre aux enfants, il est un outil qu'avec son aide l'enfant doit réinventer. Du coup, le problème pour le maître n'est pas d'expliquer ou de laisser découvrir, il est de proposer à l'enfant des situations suffisamment riches et bien choisies et, à partir de là, d'être *"celui qui aide l'élève à acquérir un pouvoir en apprenant à forger, à comprendre et utiliser des instruments mathématiques"*(1), qu'il s'agisse du nombre ou de tout autre outil mathématique.

(1) B. CHARLOT "Les contenus non-mathématiques dans l'enseignement des mathématiques" in Bulletin de liaison n°7 - IREM de NANTES.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Tobias DANTZIG "le nombre, langage de la science" A. BLANCHARD 74

(2) G. GUITEL "histoire comparée des numérations écrites" FLAMMARION 75

(3) J.P. COLETTE "histoire des mathématiques"

(4) M. BELL "histoire des mathématiques" PUF Que sais-je? 74

(5) P. DEDRON et J. ITARD "mathématiques et mathématiciens" MAGNARD 59

(6) R. TATON "histoire du calcul" PUF Que sais-je ? 69

(7) "Mots" publication de l'A.P.M.E.P.

(8) C. BOUCHER "les nombres, leur histoire"

(9) CHEVALIER et GHEERBRANT "dictionnaire des symboles" SEGHERS 73

(10) G. BARBARIS "dieu est-il mathématicien ?" ASTRA ED 1942

(11) DHOMBRES "études épistémologique et historique des idées de nombre, de mesure et de continu" NANTA IREMICA

(12) BOURBAKI "éléments d'histoire des mathématiques"

(13) J. PIAGET et A. SZEMINSKA "la genèse du nombre chez l'enfant" DELACHAUX et NIESTLE

(14) Cahiers pédagogiques n°78, intuition et construction de l'espace (INRP 64)

(15) GRECO GRIZE PIAGET "problèmes de la construction du nombre" PUF

(16) FREUDENTHAL "mathematics as an educational task" 1973

(17) Bulletin de psychologie (nov. 64)

(18) "Bulletin P.E.N. n°3 I.R.E.M. de RENNES

(19) Stella BARUCK "Fabrice ou l'école des mathématiques" SEUIL

(20) Evolution et critique des enseignements de mathématique J. KUNTZMANN CEDIC 1976

(21) GOUMY "l'arithmétique et la géométrie à l'école primaire" VERDUN 33

(22) "Recueil de monographies pédagogiques" tome 4 1889 IMPRIMERIE NATIONALE

(23) "La nouvelle législation de l'enseignement primaire" HACHETTE 1889

(24) CHARRIER "pédagogie vécue" NATHAN 1925

(25) "Actualités pédagogiques et morales" Conférences faites à la Sorbonne 5ème série NATHAN 1927

(26) Revues pédagogiques n°7 Juillet 1923 DELAGRAVE

(27) Instructions du 20 Septembre 1938 VUIBERT

(28) "La mathématique à l'école élémentaire" A.P.M.E.P. 1972

(29) "Initiation au calcul" BOURRELIER 1950

(30) BRACHET "l'enfant et le nombre" DIDIER 1955

(31) DIENES "ensembles, nombres et puissances"

(32) TOUYAROT "itinéraire mathématique" CP livre du maître 1967 NATHAN

(33) PICARD "activités mathématiques I" 1970 OCDL

(34) ERMEL "apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - cycle préparatoire" 1977 OCDL

(35) N spécial cycle préparatoire IREM de GRENOBLE

(36) Cahier de l'IREM de BORDEAUX novembre 1976

(37) L'addition au C.P. IREM de BORDEAUX.

ISBN 2-86300-003-9