IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

NANTA IREMICA N° 12

Introduction à la géométrie et propositions pour la classe de 4^{e}

Monique CUILLAC
Hélène JOUVET
Jean-Pierre LETOURNEUX
Noël SARO

1976

ERRATA

Dans l'introduction ligne 20 remplacer "intéressant" par "inintéressant"

page 60 ligne 13 remplacer "$y = x + \beta$" par $y = \alpha x + \beta$

page 62 compléter la figure en notant P" l'intersection de v_0 et de la droite de $\mathcal{D}^+$ issue de P

compléter la figure en notant Q" l'intersection de v_0 et de la droite de $\mathcal{D}^+$ issue de Q

page 63 ligne 3 remplacer $(P'P) = m_{2,o}$ par $(P''P) = m_{2,o}$

page 78 ligne 4 remplacer "k^*" par "k"

page 80 ligne 11 ajouter "si $\alpha = o$ on notera $ox = \vec{o}$"

ligne 12 remplacer "k^*" par "k"

ligne 18 remplacer "k^*" par "k"

page 83 ligne 7 dans la définition remplacer "une base $(x_o, \vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n)$ de X" par "une base $(x_o, \vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n)$ de $\hat{X}$"

page 87 ligne 18 dans la proposition remplacer "$x \cdot 1$" par "$x \longrightarrow 1$"

Il reste sans doute encore des erreurs. *Nous nous en excusons auprès du lecteur et lui laissons le soin de les rectifier.*

UNIVERSITÉ DE NANTES

I.R.E.M. DE NANTES

INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE
et
PROPOSITIONS POUR LA CLASSE DE 4e

par
Monique CUILLAC
Hélène JOUVET
Jean-Pierre LETOURNEUX
Noël SARO

NANTA IREMICA
Volume N° 12
octobre 1976

SOMMAIRE

Fidèle au but de la collection Nanta Iremica, ce volume ne prétend pas être une référence universelle. Notre but est de favoriser chez chacun, une synthèse personnelle favorisant l'accès à des ouvrages plus complets que notre modeste contribution.

Nous avions au départ trois objectifs :

1) Fournir un document théorique montrant comment une démarche axée sur les transformations et des configurations géométriques permettait de construire la géométrie affine réelle.

2) Démontrer explicitement l'équivalence de plusieurs présentations de la géométrie affine et replacer celle-ci par rapport à la géométrie euclidienne à la géométrie projective et à l'algèbre linéaire.

3) Illustrer sur une progression effectivement suivie en 4è, comment les idées théoriques dégagées au cours des deux premières phases ont influencé, voire déterminé, une progression en 4è.

Autour de ces trois objectifs, deux groupes IREM ont fonctionné en 1975-1976. Ce volume est un compte rendu de leur travail.

Par rapport aux objectifs initiaux, nous avons réalisé les objectifs 1) et 3) et partiellement le point 2). Le point 2) nous apparaissait très important et insuffisamment développé par le travail de l'année 1975-1976. Nous pensons au cours de cette année y consacrer un volume sans doute en collaboration avec un groupe travaillant cette année sur la géométrie dans le second cycle. Le travail réalisé l'an dernier nous a conduit à dégager en cours de route un autre aspect : la recherche d'exercices et surtout de situations exploitables en 4è. Nous avons donc ajouter à ce volume les résultats les plus significatifs que nous avons eus dans cette direction. Ces résultats ne sont que des ébauches mais le livre s'adressant à des professeurs et non à des élèves de caractère semi fini du produit, ne nous semble pas intéressant.

Ce volume a été conçu pour être accessible sans aucun prérequis et nous avons démontré au fur et à mesure les résultats dont nous avons eu besoin. Cet a priori nous a conduit bien entendu à allonger le texte.

C'est en tenant compte des programmes actuels que ce volume a été écrit notamment dans le but d'être utile à des enseignants du 1er et du second cycle.

Il va de soi que pour nous, ce travail sur les fondements de la géométrie ne saurait être assimilé à toute la géométrie, tendance néfaste et présente malheureusement dans l'enseignement. Ce travail n'est qu'une première étape dans un prochain volume nous montrerons comment sur cette base ont peut poursuivre utilement un programme de géométrie.

Même si l'écriture du document définitif a été faite par deux d'entre nous, ce volume est le fruit d'un travail collectif.

Nous pensons que la collaboration étroite que nous avons entretenue nous a permis d'utiliser, au mieux, les compétences diversifiées que nous avions. Nous espérons avoir évité la coupure à notre avis stérile entre approfondissement théorique et préoccupations pédagogiques

En terminant cette introduction, nous tenons à remercier les stagiaires de l'I.R.E.M. avec qui, depuis Septembre 1974, nous avons eu de nombreuses discussions et qui ont eux aussi une part importante dans ce document.

- Monique CUILLAC
- Hélène JOUVET
- Noël SARO
- Jean Pierre LETOURNEUX

Nous remercions également Mademoiselle Catherine LESAULT qui a assuré la frappe du document.

CHAPITRE 0

STRUCTURES ET ISOMORPHISMES

Etant donné un ensemble, on dit que cet ensemble est muni d'une structure s'il existe des relations données entre des éléments ou des parties de cet ensemble.

Par exemple si G est un ensemble vérifiant :

$$(\forall x \in G) \quad (\forall y \in G) \quad (\exists ! z \in G) \quad (x * y = z)$$

$$(\forall x \in G) \quad (\forall y \in G) \quad (\forall z \in G) \quad ((x * y) * z = x * (y * z))$$

$$(\exists e \in G) \quad (\forall x \in G) \quad (x * e = e * x = x)$$

$$(\forall x \in G) \quad (\exists x' \in G) \quad (x * x' = x' * x = e)$$

On dit que $(G, *)$ est un groupe.

Lorsque l'on s'intéresse a des ensembles munis de la même structure, on s'intéressera aux applications compatibles avec cette structure ; ces applications seront les morphismes de la structure.

Par exemple si $(G, *)$ et (G', T) sont deux groupes, les morphismes de groupes de $(G, *)$ vers (G', T) sont les applications $f : G \longrightarrow G'$ vérifiant :

$$(\forall x \in G) \ (\forall y \in G) \quad (f(x * y) = f(x) \ T \ f(y))$$

Un cas particulièrement important est celui où le morphisme f est bijectif et où l'application f^{-1} est-elle aussi un morphisme.

On dit alors que f est un isomorphisme pour la structure considérée.

Enfin il arrive souvent qu'un même ensemble soit muni de plusieurs structures de nature différente ; il nous faudra alors regarder si ces structures sont compatibles entre elles.

Par exemple $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné et ces deux relations sont compatibles donc $(\mathbb{R}\ +\ +\ \leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

Par contre sur $\mathbb{Z}$ la relation d'ordre (a divise b) n'est pas compatible avec la structure de groupe de $(\mathbb{Z}\ +)$.

§ 1 *UN EXEMPLE : LES ENSEMBLES ORDONNES (RESP. TOTALEMENT ORDONNES)*

DEFINITION

On appelle ensemble ordonné un couple $(X, \mathcal{R})$ où X est un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur X.

Si la relation d'ordre $\mathcal{R}$ est totale $[$i.e $(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)\ (x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x)]$ on dit que $(X, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Exemple

($\mathbb{N}$, $\leqslant$) est un ensemble totalement ordonné

($\mathbb{N}$, ... divise ...) n'est pas un ensemble totalement ordonné mais est un ensemble ordonné.

Les morphismes de la structure d'ensemble ordonné sont les applications croissantes :

DEFINITION

On dira qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ où $(X, \mathcal{R})$ et $(Y, \mathcal{S})$ sont deux ensembles ordonnés est une application croissante si

$$(\forall x_1 \in X)\ (\forall x_2 \in X)\ (x_1 \mathcal{R} x_2 \Longrightarrow f(x_1)\ \mathcal{S} f(x_2))$$

Pour deux ensembles ordonnés $(X, \mathcal{R})$ et $(Y, \mathcal{S})$ un isomorphisme d'ensemble ordonné est une application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant :

1) f est une bijection

2) f est une application croissante

3) f^{-1} est une application croissante.

Lorsque deux ensembles ordonnés sont isomorphes en tant qu'ensemble ordonné on dit qu'ils sont semblables.

REMARQUES

1) Un morphisme bijectif n'est pas nécessairement un isomorphisme $1_{\mathbb{N}}$ est une application croissante bijective de ($\mathbb{N}$, ... divise ...) dans ($\mathbb{N}$ $\leqslant$) mais ce n'est pas un isomorphisme d'ensemble ordonné.

2) ($\mathbb{N}$ $\leqslant$) et ($\mathbb{Z}$, $\leqslant$) ne sont pas isomorphes en tant qu'ensemble totalement ordonné (on dit aussi semblable).
Dans ($\mathbb{N}$ $\leqslant$) toute partie a un plus petit élément, cette propriété n'est pas vraie dans ($\mathbb{Z}$, $\leqslant$).

3) ($\mathbb{Z}$, $\leqslant$) et ($\mathbb{Q}$, $\leqslant$) ne sont pas semblables. Dans $\mathbb{Q}$ il y a toujours un nombre c compris entre deux nombres distincts a et b ; cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{N}$).

4) Si $(X, \mathcal{R})$ est un ensemble (totalement) ordonné, et si Y est une partie de X alors Y muni de $\mathcal{R}/Y$ est un ensemble (totalement) ordonné. L'inclusion canonique $i : Y \xrightarrow{\subseteq} X$ est une application croissante.

5) Plus généralement si X est un ensemble muni d'une structure (par exemple de groupe) on s'intéresse aux sous-ensembles de X stable pour les axiomes définissant la structure ; c'est-à-dire tel que l'inclusion canonique soit un morphisme.

6) Si $(X,\mathfrak{R})$, $(Y,\mathfrak{S})$ et $(Z,\mathfrak{T})$ sont trois ensembles ordonnés, $f : X \longrightarrow Y$ une application croissante $g : Y \longrightarrow Z$ une application croissante alors $g \circ f \; X \longrightarrow Z$ est une application croissante.

7) Si $(X,\mathfrak{R})$ est un ensemble ordonné alors $1_X : X \longrightarrow X$ est une application croissante. $x \longrightarrow x$

8) Lorsque nous aurons des ensembles muni d'une structure il nous faudra nous poser des question analoques aux remarques 6) et 7).

Une démarche essentielle des mathématiques est de décrire complètement à isomorphisme près les objets vérifiant une structure donnée.

En ce qui concerne les ensembles totalement ordonnés dénombrables, on va démontrer qu'ils sont à isomorphisme d'ensemble ordonné près des sous-ensembles de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ordonné par $\leqslant$.

Auparavant, la proposition ci-dessous va nous permettre de montrer que si on restreint notre étude aux ensembles totalement ordonnés, alors les applications croissantes bijectives sont les isomorphismes.

PROPOSITION

Soit $(X,\mathfrak{R})$ et $(Y,\mathfrak{S})$ deux ensembles ordonnés, f une application croissante bijective de X dans Y.

Si $(X,\mathfrak{R})$ est totalement ordonné alors $(Y,\mathfrak{S})$ est aussi totalement ordonné et f est un isomorphisme.

DEMONSTRATION

1) Soit y_1 et y_2 deux éléments de Y. f étant bijective, il existe x_1 et x_2 dans X tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Comme $(X,\mathfrak{R})$ est totalement ordonné

$$x_1 \,\mathfrak{R}\, x_2 \quad \text{ou} \quad x_2 \,\mathfrak{R}\, x_1$$

Comme f est croissante

$$y_1 \,\mathfrak{R}\, y_2 \quad \text{ou} \quad y_2 \,\mathfrak{S}\, y_1$$

donc $(Y,\mathfrak{S})$ est totalement ordonné.

2) f étant croissante on a :

$$x_1 \,\mathfrak{R}\, x_2 \Longrightarrow y_1 \,\mathfrak{S}\, y_2 \qquad (1)$$

$$\text{et} \quad x_2 \,\mathfrak{R}\, x_1 \Longrightarrow y_2 \,\mathfrak{S}\, y_1 \qquad (2)$$

(2) est équivalent à (2')

non $(y_2 \,\mathfrak{S}\, y_1) \Longrightarrow$ non $(x_2 \,\mathfrak{R}\, x_1)$ (2') comme x et y sont totalement ordonnés

(2') est équivalent à (3) : $y_1 \,\mathfrak{S}\, y_2 \Longrightarrow x_1 \,\mathfrak{R}\, x_2$

f étant bijective la relation (3) traduit que f^{-1} est une application croissante.

COROLLAIRE

Si $(X, \mathcal{R})$ et $(Y, \mathcal{S})$ sont deux ensembles totalement ordonnés

f est un isomorphisme $\Longrightarrow f$ est une application croissante bijective de X dans Y

PROPOSITION

Tout ensemble totalement ordonné dénombrable est semblable à un sous-ensemble de $(\mathbb{Q}, \leqslant)$

DEMONSTRATION

Si X est fini alors X étant totalement ordonné a un plus grand élément x_n ; si $n = \text{card } X$.

Il suit que $X - \{x_n\}$ a un plus grand élément x_{n-1}. En itérant ce procédé $(X, \leqslant)$ est semblable à $([n], \leqslant)$.(1)

Si X est infini X étant dénombrable, on peut l'écrire sous la forme

$x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

Définissons $f(x_o) = 0$

On va par récurrence construire une application croissante et injective f de X dans $\mathbb{Q}$. $(X, \leqslant)$ étant totalement ordonné on a :

$$x_o < x_1 \quad \text{ou} \quad x_1 < x_o$$

Si $x_o < x_1$ on choisit $f(x_1) = r$ tel que $0 < r_1$

Si $x_1 < x_o$ on choisit $f(x_1) = r_1$ tel que $r_1 < o$

Supposons la fonction f défini jusqu'à x_n.

Si x_{n+1} est plus petit que tous les $x_o, x_1 \dots x_n$ on choisit $r_{n+1} = f(x_{n+1})$ tel que r_{n+1} soit strictement plus petit que $r_o, r_1 \dots r_n$

Si x_{n+1} est plus grand que tous les $x_o \dots x_n$ on choisit $r_{n+1} = f(x_{n+1})$ plus grand strictement que les $r_o, r_1 \dots r_n$.

Enfin, si aucun des 2 cas ne se produit on prend x_k le plus grand des $x_i (i \leqslant n)$ tel que $x_i < x_{n+1}$ et x_m le plus petit des x_j $(j \leqslant n)$ tel que $x_j > x_{n+1}$.

On peut alors prendre pour

$$r_{n+1} = \frac{r_k + r_m}{2}$$

Par construction f est une application injective croissante de X dans Q donc un isomorphisme de X sur $f(X)$.

(1) on notera $[n] = \{1, 2, 3 \dots n\}$

§ 2 DEUX MOTS SUR LES ENSEMBLES MUNIS DE PLUSIEURS STRUCTURES

Sur un ensemble X plusieurs structures peuvent être définies en même temps. Il s'agit de préciser si elles sont compatibles entre elles.

Exemple :

Si G est un groupe multiplicatif (par exemple) sur lequel une relation d'ordre a été définie. On souhaite que la multiplication soit compatible avec la relation d'ordre totale, c'est-à-dire :

$$a \geqslant b \Longrightarrow ac \geqslant bc$$
$$a \geqslant b \Longrightarrow ca \geqslant cb$$

Ces deux relations entrainent que si $a > 1$ et $b > 1$ (1 est l'élément neutre de G) alors $ab > 1$. Si on pose $S = \{a : a > 1\}$. Pour que $>$ soit compatible avec la structure de groupe il faut que :

$$\boxed{S.S \subset S \qquad (1)}$$

Si $a > 1$ alors $a\,a^{-1} > a^{-1}$ d'où $1 > a^{-1}$ la relation $\geqslant$ étant une relation d'ordre totale alors G est l'union disjointe : $\boxed{S \cup \{1\} \cup S^{-1} \quad (2))}$ et pour tout $b \in G$ on a pour $a \in S$ $ba > b$ d'où $b\,a\,b^{-1} > 1$.

Donc nécessairement : $\boxed{b\,S\,b^{-1} \subset S \qquad (ii)}$

On demontre que ces 3 conditions sont suffisantes et que la relation $a > b$ est équivalente à $a\,b^{-1} \in S$

Par exemple : $(\mathbb{R}\ +\ \leqslant)$ est un groupe ordonné

$(\mathbb{R}_+\ \times\ \leqslant)$ est un groupe ordonné

$(\mathbb{R} - 0,\ \times\ \leqslant)$ n'est pas un groupe ordonné.

Nous reviendrons plus tard en détail sur la notion de corps ordonné, contentons nous d'en donner ici la définition.

Un corps k est ordonné s'il existe une partie P tel que

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ k = P \cup (-P) \cup 0 \\ 2)\ P + P \subset P \end{array}\right\} \quad (k, +) \text{ est un groupe ordonné}$$

3) $P.P \subset P$ (un produit d'éléments positifs est positif)

Démontrons que si k est un corps ordonné tout carré est positif. En effet si x $k - 0$

Si $x \in P$ d'après 3 $x^2 \in P$

Si $x \notin P$ alors d'après 1 $-x \in P$ donc $(-x)\ (-x) = x^2 \in P$

Si l'on réfléchit un peu sur la construction des nombres, il faut remarquer que "l'amélioration" obtenue sur une structure entraine des "modifications", voire la disparition de la compatibilité avec les autres structures.

$(\mathbb{N}, +, ., \leqslant)$ est un monoïde ordonné +

est un monoïde ordonné pour .

La relation $\leqslant$ est une relation de G en ordre (i.e tout sous-ensemble non vide a un plus petit élément).

$(\mathbb{Z}, +, . \leqslant)$ est un anneau ordonné

son ordre est discret mais la relation $\leqslant$ n'est plus une relation de bon ordre.

$(\mathbb{Q}, +, . \leqslant)$ est un corps ordonné

Son ordre est dense (i.e si $a < b$ $\exists c : a < c < b$) mais il y a des "trous" (coupure ouverte

on construit alors

$(\mathbb{R}, +, . \leqslant)$ qui est un corps ordonné dont l'ordre est continu (pas de "trous")

Sur le plan algébrique R n'est guère plus "intéressant" (1) que $\mathbb{Q}$ il y a des polynômes $(x^2 + 1)$ qui n'ont pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Pour parfaire algébriquement $\mathbb{R}$ on construit

$(\mathbb{C} + .)$ qui est algébriquement clos (tout polynôme sur admet une racine)

mais cette dernière étape en améliorant la structure algébrique de corps nous interdit d'espér d'avoir un corps ordonné $(i^2 = -1)$.

---

(1) Notons cependant que la caractérisation des polynômes premiers sur $\mathbb{R}$(i.e n'ayant pas de racines dans $\mathbb{R}$) est plus simple que la caractérisation des polynômes premiers sur $\mathbb{Q}$.

CHAPITRE 1

LE GROUPE DES DILATATIONS

Le but de ce chapitre est de dégager les propriétés d'une structure dont la seule notion est celle de direction. Cette notion étant définie par les seuls axiomes d'incidence.

Conformément aux idées développées dans le chapitre 0, nous nous intéressons d'abord aux bijections du plan dans lui-même qui pertubent "le moins" la notion de direction.

C'est pourquoi, nous nous intéressons aux dilatations qui sont les applications bijectives σ(transformations) du plan dans lui-même telle que si l est une droite l et $\sigma(l)$ ont même direction.

§ 1 *POINTS DE DEPART*

L'observation dans le plan physique conduit naturellement à étudier les propriétés d'un objet mathématique vérifiant les axiomes d'incidence.

Un plan est la donnée d'un ensemble non vide π et d'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}(\pi)$ ne contenant pas l'ensemble vide, vérifiant les 3 axiomes suivants :

AXIOME 1

Etant donné deux points (éléments) P, Q distincts de π il existe une et une seule droite l(élément) de $\mathcal{D}$ telle que P soit sur l (appartienne à l) et Q soit sur (appartienne à) l.

DEFINITION

Deux droites l_1 et l_2 de $\mathcal{D}$ seront dites parallèles au sens strict si $l_1 \cap l_2 = \emptyset$

Deux droites l_1 et l_2 seront dites parallèles si elles sont confondues ou parallèles au sens strict.

AXIOME 2

Etant donné un point P et une droite l il existe une droite m et une seule telle que P soit sur m et l parallèle à m (notation $l//m$)

PROPOSITION 1-1

Le parallélisme est une relation d'équivalence

DEMONSTRATION

- La relation est réflexive. Toute droite est confondue avec elle même
- La relation est symétrique car l'intersection de deux ensembles est symétrique
- La relation est transitive. En effet :

Supposons $l_1 \,//\, l_2$ et $l_2 \,//\, l_3$. Si $l_1 \cap l_3 = \emptyset$ alors $l_1 \,//\, l_3$ par définition. Si $P \in l_1 \cap l_3$ alors l_1 et l_3 sont deux parallèles à l_2 passent par P d'après l'Axiome 2 $l_1 = l_3$ et dans ce cas encore $l_1 \,//\, l_3$

DEFINITION

Une classe d'équivalence de droite parallèles est appelée un faisceau de droites parallèles. Un faisceau de droites parallèles définit une direction de droites.

Pour s'assurer de l'intérêt de la notion de parallélisme que nous venons de définir (i.e pour que la géométrie ne soit pas celle de la droite) il nous faut nous assurer qu'aucune droite n'est la partie pleine de π, c'est le sens de l'axiome suivant.

AXIOME 3

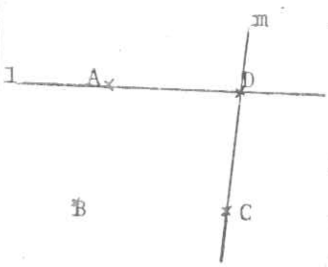
Il existe 3 points A, B, C non alignés.

Les quelques résultats qui vont suivre ont pour but de préciser comment une droite est inclus dans le plan.

PROPOSITION 1-2

Un ensemble vérifiant les 3 axiomes ci-dessus a au moins quatre points.

DEMONSTRATION



D'après l'axiome 3, il existe 3 points non alignés : A,B,C

D'après l'axiome 2, il existe une droite et une seule l passant par A et parallèle à (BC).

D'après le choix de A, B, C non alignés, l et (BC) sont strictement parallèles.

De même, d'après l'axiome 2, il existe une droite et une seule m passant par C et parallèle à (A,B). A, B, C étant non alignés m et (AB) sont strictement parallèles. On a donc : $l \cap (BC) = \emptyset$ et $m \cap (AB) = \emptyset$.

Il en résulte que $l \cap m \cap \{A, B, C\} = \emptyset$.

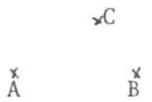
l et m appartenant à deux faisceaux distinct de droites parallèles ne sont pas parallèles donc $l \cap m \neq \emptyset$. Il suit qu'il existe $D \in l \cap m$ $D \notin \{A, B, C\}$.

PROPOSITION 1-3

Dans une géométrie vérifiant les 3 axiomes précédents, il y a au moins 3 directions de droites distinctes.

DEMONSTRATION

D'après l'axiome 3, il existe 3 points non alignés A, B, C



D'après l'axiome 1, il existe les droites (AC), (AB) et (BC)
Le faisceau engendré par la droite (AC) est distinct de ceux engendrés par (AB) et (BC) car $(AC) \cap (AB) \neq \emptyset$ et $(AC) \cap (CB) \neq \emptyset$ d'une part, d'autre part $(AC) \neq (AB)$ et $(AC) \neq (CB)$ car A, B, C ne sont pas alignés.

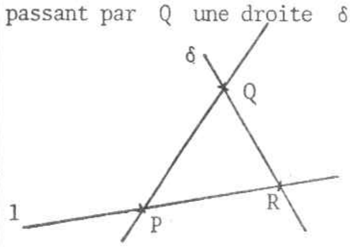
Pour les mêmes raisons (AB) et (BC) engendrent des faisceaux distincts entre eux.

PROPOSITION 1-4

Sur toute droite il y a au moins deux points distincts.

DEMONSTRATION

Soit l une droite $l \neq \emptyset$,donc il existe P appartenant à l d'après axiome 3, il existe $Q \notin l$. D'après la proposition 1-3 et l'axiome 2, il existe passant par Q une droite δ non parallèle à l et non parallèle à (PQ).



Il en résulte $\delta \cap l \neq \emptyset$ et $\delta \cap l \not\ni P$.

l a donc au moins deux points P et $R = \delta \cap l$.

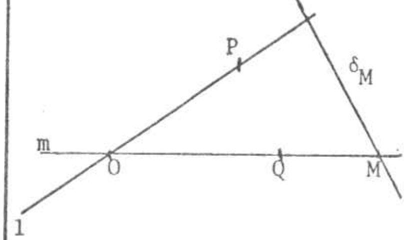
PROPOSITION 1-5

Soient l et m deux droites, il existe une bijection de l sur m.

DEMONSTRATION

1) si l et m sont confondues, c'est évident.

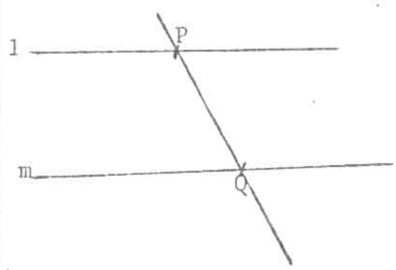
2) supposons l et m distinctes envisageons d'abord le cas ou l et m ne sont pas parallèles. D'après la proposition 1-4, si O est le point d'intersection de l et de m, il existe des points P et Q distincts et distincts de O appartenant respectivement à l et m.



La droite (PQ) engendre un faisceau différent des faisceaux engendrés par l et m.

D'après l'axiome 2 l'application qui a tout point de l associe $M = m \cap \delta_M$ où δ_M est la parallèle à (PQ) passant par M

3) Si l et m sont strictement parallèles alors il existe sur l et m deux points P et Q. On applique l'axiome 2 au faisceau engendré par la droite (PQ).



COROLLAIRE 1-6

Soient l une droite et $\mathcal{M}$ un faisceau de droites parallèles, il existe une bijection de m sur l.

DEMONSTRATION

1) Compte-tenu de 1-5 on peut supposer $l \notin \mathcal{M}$. En effet, si $l \in \mathcal{M}$, il existe $m \notin \mathcal{M}$ et d'après proposition 1-5 l et m sont en correspondance bijective

2) Si $l \notin \mathcal{M}$ d'après l'axiome 2 l'application qui a toute droite $m \in \mathcal{M}$ associe $m \cap l$ est bijective.

PROPOSITION 1-7

La plus petite géométrie vérifiant les 3 axiomes possèdent 4 points. Elle est déterminée de façon unique : les droites sont les sous-ensembles ayant 2 éléments.

DEMONSTRATION

1) D'après proposition 1-2, il faut un ensemble ayant au moins 4 points pour que soient vérifiés les axiomes 1, 2, 3.

2) D'après la proposition 1-4, l'ensemble $\mathcal{D}$ est nécessairement inclus dans l'ensemble des parties ayant deux éléments.

3) D'après l'axiome 1 et l'axiome 2 $\mathcal{D}$ est nécessairement exactement l'ensemble des parties ayant deux éléments.

4) Si E a 4 éléments et si on prend pour $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de E ayant 2 éléments alors il est évident que $(E, \mathcal{D})$ satisfait aux axiomes 1, 2, 3.

Remarquons que cette dernière proposition montre que, sous-réserve de la non contradiction de la Théorie des ensembles (ayant un nombre fini d'éléments), la théorie que nous construisons à l'aide des axiomes 1, 2, 3, est non contradictoire.

Rappelons que si k est un corps un système de deux équations à deux inconnues : (x, y)

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma' = 0$$

possède une solution unique si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$ n'a aucune solution si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0$

et s'il n'existe par $\lambda \in k^*$ tel que : $\alpha = \lambda\alpha'$, $\beta = \lambda\beta'$, $\gamma = \lambda\gamma'$

Ce système a une infinité de solutions si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0$ et si il existe $\lambda \in k$ tel que $\alpha = \lambda\alpha'$, $\beta = \lambda\beta'$, $\gamma = \lambda\gamma'$

Si l'on impose α ou β non nul alors :

1) l'ensemble des points $(x, y) \in k^2$ vérifiant $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est non vide
2) cet ensemble est distinct de k^2

DEFINITION

On appelle droite de k^2, où k est un corps, l'ensemble des points de k^2 vérifiant une relation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où $(x, y) \in k^2$ et où α, β, γ sont des éléments de k tels que α ou β soient non nul.

D'après le rappel, il est clair que k^2 muni de cet ensemble de droites vérifie les axiomes 1, 2, 3.

La question qui se pose a nous est la suivante :

Etant donné un ensemble π ayant une structure vérifiant les axiomes 1, 2, 3 peut-on construire un corps k tel que l'on puisse "interpréter" π comme k^2 muni de la structure affine définie ci-dessus ?

La réponse est non si on n'ajoute pas d'axiomes. Mais nous allons montrer que sous la seule réserve que la géométrie ait assez de transformations conservant la direction, il en est ainsi.

§ 2 *DILATATIONS - CLASSIFICATION*

Dès que nous avons un couple $(\pi, \mathcal{D})$ vérifiant les axiomes 1, 2, 3 la seule notion que nous pouvons déterminer est celle de direction de droites.

Nous allons donc nous intéresser, conformément à l'esprit du chapitre 0, aux transformations (i.e les applications bijectives) de π dans π conservant la direction.

DEFINITION

Une dilatation σ est une transformation du plan π sur lui-même vérifiant :
Si P, Q sont deux points distincts, si P' et Q' sont leurs images par σ alors $(P'Q')$ est parallèle à (PQ)

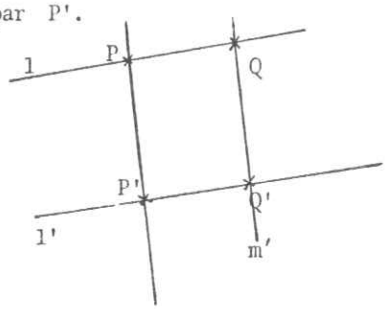
L'ensemble des dilatations n'est pas vide car l'application identique en est une.

PROPOSITION 1-8

Si σ est une dilatation et 1 une droite alors 1 et $\sigma(1)$ sont 2 droites parallèles

DEMONSTRATION

Soit 1 une droite P un point de 1 d'après la définition d'une dilatation et l'axiome 2, $\sigma(1)$ est inclus dans la parallèle à 1 passant par $P' = \sigma(P)$. Réciproquement, soit un point Q' de $1'$ qui est la parallèle à 1 passant par P'.



Soit m' la parallèle à (PP') passant par Q' ; soit $Q = 1 \cap m'$. Comme σ est une dilatation l'image $\sigma(Q)$ de Q est sur $1'$ et sur m' donc $Q' = \sigma(Q)$

Ce qui établit que $1'$ est inclus dans $\sigma(1)$. D'où $1' = \sigma(1)$.

PROPOSITION 1-9

Une dilatation σ est complètement déterminée par les images P' et Q' de deux points distincts P et Q.

DEMONSTRATION

1) Si R n'est pas aligné avec P et Q les droites (RP) et (RQ) sont distinctes. D'après la proposition 1-8, R' est l'intersection des parallèles à (RP) et (RQ) passant respectivement par P' et Q'.

2) Si R est aligné avec P et Q d'après l'axiome 3, il existe S non aligné avec R et P. D'après 1 on peut construire S'. En appliquant 1) à P et S on construit R'.

PROPOSITION 1-10

Si σ est une dilatation et P n'est pas un point fixe de σ alors la droite $(P\,\sigma(P))$ est globalement invariante par σ.

DEMONSTRATION

Posons $P' = \sigma(P)$. Soit Q un point de (PP') ; $Q' = \sigma(Q)$ est sur la parallèle à (PQ) passant par P'. D'après l'axiome 2 $(P'Q')$ et (P, Q) sont confondues.

DEFINITION

On appelle trace d'une dilatation σ toute droite globalement invariante par σ.

D'après les propositions 1-9 et 1-10, on constate :

1) Une dilatation qui a deux points fixes est l'identite

2) Toute dilatation admet des traces.

PROPOSITION 1-11

Si l et m sont deux traces distinctes d'une dilatation σ. Si $l \cap m \neq \emptyset$ alors $P = l \cap m$ est un point fixe de σ. Réciproquement si P est un point fixe de σ alors toute droite passant par P est une trace de σ.

DEMONSTRATION

1) Si l et m sont deux traces de σ par définition $\sigma(l \cap m) \in l$ et $\sigma(l \cap m) \in m$ d'où $\sigma(l \cap m) = l \cap m$

2) Si $\sigma(P) = P$ soit l une droite passant par P.
Si $Q \in l$ alors $(P\ \sigma(Q))$ est parallèle à l passant par P d'après l'Axiome 2 $(P\ \sigma(Q)) = l$. Donc l est une trace de σ.

Il résulte de ces propositions que nous avons la classification suivante des dilatations en fonction de leurs points fixes et de l'ensemble de leur traces.

2 points fixes : c'est l'identite, toute droite est une trace

1 point fixe : les traces sont les droites passant par ce point

0 point fixe : toutes les traces sont parallèles. Mieux, d'après les propositions 1-10 et 1-11, ce sont toutes les droites d'un faisceau de droites parallèles.

DEFINITION

On appelle translation, une dilatation qui est l'application identique ou qui n'a pas de point fixe. Si une translation τ est différente de l'identité, ses traces déterminent une direction de droite. On dit que cette direction est la direction de la Translation τ

PROPOSITION 1-12

Une translation τ est complètement déterminée par l'image d'un point P

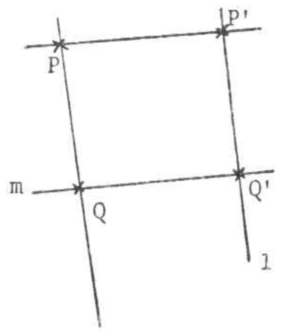
DEMONSTRATION

Posons $\tau(P) = P'$

1) si $\tau(P) = P$ alors τ est l'identité

2) Si $P' \neq P$ la droite (PP') est une trace de τ et détermine la direction de τ.

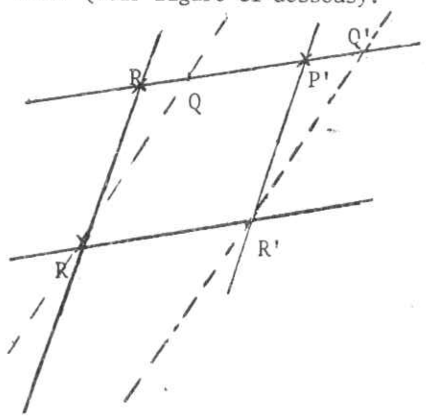
Soit Q un point. Si $Q \notin (PP')$ alors $\sigma(Q) = Q'$ vérifie :



- $(P'Q') \,//\, (PQ)$ car est une dilatation.
- $(PP') \,//\, (QQ')$ car (PP') et (QQ') sont deux traces de la translation τ.

Il résulte de ceci et de l'axiome 2 que $Q' = 1 \cap m$ où 1 est la parallèle à (PQ) passant par P' et m la parallèle à (PP') passant par Q.

Si Q est un point de (PP') on pose d'après l'axiome 3 par l'intermédiaire d'un point R non aligné et l'on applique la démonstration précédente deux fois. (voir figure ci-dessous).



Soient D et T les ensembles des dilatations et des translations, comme $1_\pi \in T$ ces ensembles sont non vide.

L'ensemble des transformations d'un ensemble dans lui même est un groupe pour la loi de composition.

Nous allons montrer que D et T sont des sous-groupes du groupe des transformations du plan dans lui même. Auparavant, nous inclurons un cours rappel d'algèbre générale.

§ 3 GROUPE - SOUS-GROUPE - RELATION D'EQUIVALENCE

Rappelons sans démonstration que si $(G, *)$ est un groupe, un sous ensemble H est un sous-groupe de G si et seulement si

1) $H \neq \emptyset$

2) $\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad x * y^{-1} \in H.$

ou encore si et seulement si :

1) $H \neq \emptyset$

2') $\forall x \in H \qquad x^{-1} \in H \qquad (x^{-1}$ inverse de x dans $G)$

2'') $\forall x \in H \qquad \forall y \in H \qquad x * y \in H.$

Si $(G,.)$ est un groupe et R une relation d'équivalence, on dit que R est compatible à droite (resp à gauche) (resp à droite et à gauche) si : $(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ (\forall z \in G)\ (x\, R\, y \Longrightarrow x.z\, R\, y.z)$

[resp $(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ (\forall z \in G) \qquad (x\, R\, y \Longrightarrow z.x\, R\, z.y)$]

[resp $(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ (\forall z \in G)\ (x\, R\, y \Longrightarrow (x.z\, R\, y.z$ et $z.x\, R\, z.y)$]

PROPOSITION 1-13

Si R est une relation d'équivalence compatible à droite (resp à gauche) avec la structure de groupe de $(G\ .)$

1) $H = \{x\, R\, e\ ;\ x \in G\}$, où e est l'élément neutre de G est un sous-groupe de G

2) $x\, R\, y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$ (resp $x\, R\, y \Longleftrightarrow y^{-1}x \in H$)

DEMONSTRATION

Nous rédigeons la démonstration dans le cas de la compatibilité à droite. Une démonstration analogue est à faire pour la compatibilité à gauche.

1) H est un sous-groupe.

D'après la réflexivité de $R \qquad H \neq \emptyset$

Si $x \in H$ on a d'après la compatibilité à droite $e\, R\, x^{-1}$ d'après la symétrie, il suit $x^{-1} \in H$.

Si $y \in H$ alors d'après la compatibilité à droite $xy\, R\, y$ d'après la transitivité et la symétrie $xy \in H$ donc H est un sous-groupe de G.

2) Si $x\, R\, y$ alors d'après la compatibilité $xy^{-1} \in H$.

Si $xy^{-1} \in H$ alors d'après la compatibilité (et l'associativité) $x\, R\, y$.

COROLLAIRE 1-14

Si H est un sous-groupe de G les relations

$$(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ (x\, R_1\, y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H)$$

$$(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ (x\, R_2\, y \Longleftrightarrow y^{-1}x \in H)$$

sont des relations d'équivalence. R_1 est compatible à droite et R_2 est compatible à gauche.

DEMONSTRATION

1) il est évident que R_1 et R_2 sont deux relations d'équivalence
2) d'après la proposition 1-13 R_1 est compatible à droite et R_2 compatible à gauche.

Il résulte de ce corollaire que l'on peut identifier les relations d'équivalence compatible à droite (resp à gauche) aux sous-groupes de G.

PROPOSITION 1-15

Avec les notations du corollaire 1-14 et de la proposition 1-13, une relation d'équivalence définie par le sous-groupe H est compatible à droite et à gauche si, et seulement si, les relations R_1 et R_2 sont égales.
Cette condition est équivalente à $(\forall x \in G)\ (x H x^{-1} = H)$
On dit alors que H est un sous-groupe normal de G (on dit aussi distingué)

DEMONSTRATION

1) D'après la proposition 1-13 Si R est compatible à gauche et à droite, alors $R = R_1 = R_2$
2) Si H est un sous-groupe tel que $R_1 = R_2 = R$ alors d'après le corollaire 1-14 R est compatible à droite et à gauche.
3) Si R est compatible à droite et à gauche on a :

$$(\forall x \in G)\ (\forall y \in H)\ \ (x\, y\, x^{-1} \in H)$$

d'où $(\forall x \in G)\ (x\, H\, x^{-1} \subset H)$

et également $(\forall x \in G)\ (x^{-1}\, H\, x \subset H)$

d'où $(\forall x \in G)\ (x\, H\, x^{-1} = H)$

4) Si H vérifie $(\forall x \in G)\ (x\, H\, x^{-1} = H)$ alors $(\forall x \in G)\ (x\, H = H\, x)$ donc $R_1 = R_2 = R$ est une relation d'équivalence compatible à droite et à gauche.

Soit l'ensemble quotient G/R une question naturelle se pose : peut-on munir G/R d'une structure de groupe tel que l'application canonique

$$G \xrightarrow{\varphi} G/R$$
$$x \longrightarrow \bar{x}$$

soit un homomorphisme de groupe ?

PROPOSITION 1-16

On peut munir G/R d'une structure de groupe telle que φ soit un homorphisme de groupe si, et seulement si, R est compatible à droite et à gauche (c'est-à-dire si, et seulement si H est un sous-groupe normal de G). Dans ce cas, la structure est unique.

DEMONSTRATION

1) Unicité de la structure

Pour que φ soit un homomorphisme, il est nécessaire que $\overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$

2) Existence d'une structure de groupe sur G/R si R est compatible à droite et à gauche.

Il faut montrer que si $\begin{matrix} x\,R\,x' \\ y\,R\,y' \end{matrix}$ alors $x\,y\,R\,x'y'$

on a $x' = x\,h_1 = h_2\,x$ avec $h_1 \in H$, $h_2 \in H$

$y' = y\,h_3 = h_4\,g$ avec $h_3 \in H$, $h_4 \in H$

il suit que :

$$xy(x'y')^{-1} = xy(y'^{-1}\,x'^{-1}) = x(yy'^{-1})\,x'^{-1} = x(yy^{-1})h_4^{-1}\,x'^{-1}$$

$$= x(h_4^{-1}\;h_1^{-1})\;x^{-1} = x\,h\,x^{-1} \in H$$

d'où R est compatible à droite et à gauche.

3) Si $(\forall x \in G)$ $(\forall y' \in G)$ $(\forall x' \in G)$ $(\forall y' \in G)$ $\left(\begin{matrix} x\,R\,x' \\ y\,R\,y' \end{matrix} \Longrightarrow xy\,R\,x'y'\right)$

On va montrer que R est compatible à droite et à gauche. Il suffit de faire $y = y'$ (resp $x = x'$) dans la relation précédente.

Nous venons de démontrer un résultat extrêment important; pour que la relation d'équivalence permette de définir une structure de groupe sur le quotient, il faut et il suffit que H soit un sous-groupe normal. D'après la proposition 1-15, on peut noter $G/R = G/H$. Il n'y a aucune ambiguïté ; les classes à gauche étant égales aux classes à droite.

§ 4 *LE GROUPE DES DILATATIONS - LE GROUPE DES TRANSLATIONS*

PROPOSITION 1-17

L'ensemble D des dilatations muni de la composition des applications est un groupe (D, o)

DEMONSTRATION

1) $D \neq \emptyset$

2) D'après la transitivité de la relation de parallèlisme si

. $\sigma_1 \in D$ et $\sigma_2 \in D$ $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in D$

3) Si σ est une dilatation alors d'après la symétrie du parallélisme et le fait qu'une dilatation est définie par l'image de 2 points, σ^{-1} est une dilatation.

Il résulte de ceci que D est un sous-groupe du groupe des transformations du plan dans lui-même.

PROPOSITION 1-18

L'ensemble T des translations est un sous-groupe normal de (D, o).

De plus, pour toute dilatation σ et toute translation

$$\tau \neq 1_\pi \quad \text{et} \quad \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \quad \text{ont même direction.}$$

DEMONSTRATION

1) $1_\pi \in T$ donc $T \neq \emptyset$

2) Si $\tau \neq 1_\pi$ alors pour tout P $\tau(P) = P' \neq P$

or si $\tau^{-1}(Q) = Q$ alors $Q = \tau(Q)$ ce qui est absurde, donc τ^{-1} n'a pas de point fixe.

3) Si $\tau_1 \circ \tau_2(P) = P$ alors $\tau_2(P) = \tau_1^{-1}(P)$

mais une translation étant définie par son action sur un point il en résulte que :

$\tau_1 \circ \tau_2$ a un point fixe si, et seulement si, $\tau_1 \circ \tau_2 = 1_\pi$ sinon $\tau_1 \circ \tau_2$ n'a pas de point fixe.

Il suit que (T, o) est un sous-groupe de (D, o)

4) (T, o) est un sous-groupe normal de (D, o). En effet $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(P) = P$ implique que $\sigma^{-1}(P)$ est un point fixe de τ; si $\tau \neq 1$

$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ n'a donc pas de point fixe.

Si $\tau = 1_\pi$ alors $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = 1_\pi$. Il suit que (T, o) est un sous-groupe normal de (D, o).

5) Si l est une trace de $\tau \neq 1$:

$\sigma^{-1}(l)$ est une droite parallèle à l donc une trace de τ d'où :

$$\tau \circ \sigma^{-1}(l) = \sigma^{-1}(l) \qquad \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(l) = \sigma \circ \sigma^{-1}(l) = l$$

Ce qui établit que $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ est une translation ayant la même direction que τ

D'après le paragraphe précédent, il résulte de cette proposition que D/T peut être munie d'une structure de groupe multiplicatif.

PROPOSITION 1-19

Les translations ayant une direction donné et l'identité forment un groupe pour la loi $\circ$.

DEMONSTRATION

Si 1 est une trace de τ_1 c'est aussi une trace de τ_2 donc aussi une trace de $\tau_2 \circ \tau_1$, car $\tau_1(1) = 1$ et $\tau_2(1) = 1$ implique que $\tau_2 \circ \tau_1 (1) = 1$.

Il suit que $\tau_2 \circ \tau_1 = 1_\pi$ ou $\tau_2 \circ \tau_1$ n'a pas de point fixe et a pour trace celles de τ_1 et de τ_2.

Si 1 est une trace de τ_1 alors 1 est une trace de τ_1^{-1} .

Comme l'ensemble contient 1_π il n'est pas vide et il en résulte que c'est un sous-groupe de T

A la fin de ce chapitre, nous pouvons énoncer le théorème suivant qui dit que, si il y a assez de translation alors (T, o) est commutatif.

PROPOSITION 1-20

S'il existe des translations ayant des directions différentes alors, le groupe (T, o) est commutatif.

DEMONSTRATION

1) si τ_1 et τ_2 n'ont pas même direction alors

$$(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1}) \circ \tau_2^{-1} = \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1})$$

a même direction que τ_1 et τ_2 ou est l'identité comme τ_1 et τ_2 ont des directions différentes $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1} = 1_\pi$

d'où $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$

2) si τ_1 et τ_2 ont même direction, alors il existe τ_3 ayant une direction différente.

$\tau_2 \circ \tau_3$ n'a pas la direction de τ_1 car s'il en était ainsi, $\tau_2^{-1} \circ (\tau_2 \circ \tau_3) = \tau_3$ aurait la direction de τ_1.

Il résulte de ceci que

$$\tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3) = (\tau_2 \circ \tau_3) \circ \tau_1 = \tau_2 \circ (\tau_3 \circ \tau_1) = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_3$$

d'où par régularité $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

A ce stade, nous pouvons affirmer en conclusion les résultats suivants :

1) (D, o) est un groupe

2) (T, o) est un groupe. C'est un sous-groupe distingué de (D, o) ; donc (D/T, o) est un groupe

3) (T, o) est un groupe commutatif, si il existe deux directions distinctes de Translations (condition suffisante).

§ 5 *UN EXEMPLE LA GEOMETRIE A 4 POINTS*

Nous avons déjà remarquer qu'il existait qu'une seule structure vérifiant les axiomes 1, 2, 3 sur un ensemble à 4 éléments {A, B, C, D}. Nous allons déterminer le groupe de dilatation.

PROPOSITION 1-21

Dans une géométrie à 4 points une dilatation ayant un point fixe est l'identité.

DEMONSTRATION

Soit A le point fixe, les droites {A, B} , {A, C} , {A, D} sont globalement invariantes par σ

Comme $\sigma(A) = A$ et comme σ est une bijection il en résulte que $\sigma(B) = B$ $\sigma(C) = C$ $\sigma(D) = D$ donc σ est l'identité.

Il résulte de cette proposition que D = T. D'après la proposition 1-12, une translation est déterminée par l'image d'un point. Il suit qu'il y a au plus 4 éléments dans le groupe des dilatations qui sont :

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} A, B, C, D \\ A, B, C, D \end{pmatrix} \quad ; \tau_1 = \begin{pmatrix} A, B, C, D \\ B, A, D, C \end{pmatrix} \quad ; \tau_2 = \begin{pmatrix} A, B, C, D \\ C, D, A, B \end{pmatrix} \quad ; \tau_3 = \begin{pmatrix} A, B, C, D \\ D, C, B, A \end{pmatrix}$$

soit $\Delta = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ la table de groupe de Δ est :

$\circ$	τ_0	τ_1	τ_2	τ_3
τ_0	τ_0	τ_1	τ_2	τ_3
τ_1	τ_1	τ_0	τ_3	τ_2
τ_2	τ_2	τ_3	τ_0	τ_1
τ_3	τ_3	τ_2	τ_1	τ_0

CHAPITRE 2

CONSTRUCTION DU CORPS DE BASE

A partir de ce chapitre, nous supposerons que (T, o) est commutatif. Rappelons que pour cela, il suffit qu'il existe deux directions distinctes de translations.

Sur l'ensemble T deux notions existent :

- d'une part (T, o) est un groupe commutatif
- d'autre part si $\tau \neq 1_\pi$ τ a une direction.

Nous allons ici, nous intéresser à l'ensemble k des endomorphismes de T qui conservent ces deux notions, c'est-à-dire, à l'ensemble des applications :

$$\alpha : T \longrightarrow T$$

qui vérifient :

- α est un homomorphisme de groupe
- si l est une droite globalement invariante par τ alors ℓ est globalement invariante par $\alpha(\tau)$

On va montrer que cet ensemble a une structure de corps si impose à la géométrie de satisfaire a un axiome supplémentaire.

§ 1 *CONSTRUCTION DE L'ANNEAU (k, +, .)*

Les paragraphes précédents nous on permis de définir deux notions (deux structures) sur l'ensemble (T, o) des translations.

1) (T, o) est un groupe commutatif

2) Si $\tau \neq 1_\pi$ le faisceau des traces de τ détermine une direction. Si $\tau = 1_\pi$ alors toute droite de π est une trace.

Nous allons donc tout naturellement nous intéresser aux applications de T dans lui même, compatible avec ces deux notions :

$$k = \{\alpha : T \longrightarrow T \quad / \text{est un homomorphisme de groupe, les traces de } \tau \text{ sont des traces de } \alpha(\tau)\}$$

Donnons quelques exemples de telles applications, ce qui prouvera que $k \neq \emptyset$

1) $$\begin{aligned} 0 : T &\longrightarrow T \\ \tau &\longmapsto 1_\pi \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 1 : T &\longrightarrow T \\ \tau &\longmapsto \tau \end{aligned}$$

3) $-1 : T \longrightarrow T$

$\tau \longrightarrow \tau^{-1}$

En effet T est commutatif et l'ensemble des translation ayant une direction donné, réuni avec 1_π est un groupe, ce qui a pour conséquence que : 1) $(\tau_1 \circ \tau_2)^{-1} = \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1}$ 2) τ et τ^{-1} ont même trace.

4) Si σ est une dilatation comme T est normal dans D et qu'en outre $\sigma\circ\tau\circ\sigma^{-1}$ a mêmes traces que τ il suit que :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : T &\longrightarrow T \\ \tau &\longmapsto \sigma\circ\tau\circ\sigma^{-1} \end{aligned}$$ est un élément de k

Nous allons maintenent définir sur k une opération que nous allons noter $+$

$$(\alpha + \beta)\ \tau = \alpha(\tau) \circ \beta(\tau)$$

PROPOSITION 2-1

$(k, +)$ est un groupe abélien.

DEMONSTRATION

1) <u>$+$ est une loi de composition interne</u>

Il faut vérifier que $\alpha + \beta \in k$.

Comme l'ensemble des translations ayant une direction donnée est un groupe, les traces de τ sont des traces de $(\alpha + \beta)(\tau)$

Comme $(T, \circ)$ est un groupe abélien $\alpha + \beta$ est un homomorphisme de groupe de T dans T

2) <u>La loi $+$ est associative</u>

$$\left[(\alpha + \beta) + \gamma\right](\tau) = (\alpha + \beta)(\tau) \circ \gamma(\tau) = \left[\alpha(\tau) \circ \beta(\tau)\right] \circ \gamma(\tau) = \alpha(\tau) \circ \left[\beta(\tau) \circ \gamma(\tau)\right]$$
$$= \left[\alpha + (\beta + \gamma)\right]\ (\tau)$$

3) <u>La loi $+$ est commutative</u>

Comme $(T, \circ)$ est abélien on a :

$$(\alpha + \beta)\ \tau = \alpha(\tau) \circ \beta(\tau) = \beta(\tau) \circ \alpha(\tau) = (\beta + \alpha)\tau$$

d'où la loi $+$ est commutative.

4) <u>0 est élément neutre</u>

$$(\alpha + 0)\ \tau = \alpha(\tau) \circ 0(\tau) = \alpha(\tau) \circ 1_\pi = \alpha(\tau)$$

d'où $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$

5) Tout élément a un inverse

Soit $-\alpha$ une application de T dans T définit par

$$-\alpha(\tau) = \alpha(\tau)^{-1}$$

(T, o) étant commutatif, et l'ensemble des translations ayant une direction donné, étant un groupe $-\alpha$ est une application de T dans T qui appartient à k et on a : $\alpha + (-\alpha) = 0$

Définissons sur k une autre loi qui n'est autre que la composition des applications de T dans T.

PROPOSITION 2-2

k est stable pour la loi o

DEMONSTRATION

Soient α et β deux éléments de k, $\alpha \circ \beta$ est une application de T dans T. C'est un homomorphisme de groupe car :

$$\alpha \circ \beta(\tau_1 . \tau_2) = \alpha(\beta(\tau_1) . \beta\, \tau_2) = \alpha.\beta(\tau_1) \circ (\alpha.\beta)(\tau_2)$$

En outre si α est une trace de τ c'est une trace de $\beta(\tau)$ donc une trace de $\alpha(\beta(\tau)) = (\alpha \circ \beta)(\tau)$

Notation : on notera $(k, .)$ le monoïde k muni de la loi o

PROPOSITION 2-3

$(k, +, .)$ est un anneau unitaire (non nécessairement commutatif).

DEMONSTRATION

1) Notation on notera $\alpha \circ \beta = \alpha.\beta$ ou $\alpha \circ \beta = \alpha\beta$ pour tout α et β éléments de k.

2) 1 est élément neutre pour

Par définition $1 : T \longrightarrow T$

$$\tau \longmapsto \tau$$

Il suit que $\alpha.1 = 1.\alpha = \alpha$ pour tout $\alpha \in k$

3) La loi est associative

trivial car c'est la restriction à k de la composition, des applications de T dans T.

4) La loi . est distributive par rapport à la loi +

on a :

$$\left[(\alpha + \beta)\gamma\right](\tau) = (\alpha + \beta)(\gamma(\tau)) = \alpha.\gamma(\tau) + \beta\, o\, \gamma(\tau) = (\alpha\gamma + \beta\gamma)\tau$$

et de même

$$\left[\alpha(\beta + \gamma)\right](\tau) = \alpha\left[\beta(\tau)\ o\ \gamma(\tau)\right] = \alpha.\beta(\tau)\ o\ \alpha.\gamma(\tau) = (\alpha\beta + \alpha\gamma)\tau$$

Nous savons que les éléments $\tilde{\sigma}$ de k pour $\sigma \in D$ sont inversibles dans k mais nous ne savons pas si tout élément non nul de k est un élément $\tilde{\sigma}$.

§ 2 *L'AXIOME DE DEHARGUES*

L'axiome suivant va nous permettre d'affirmer que la géométrie à laquelle nous nous intéressons, a suffisamment de translations.

AXIOME 4a

Etant donné deux points P, Q quelconques de π il existe une translation τ_{PQ} telle que $\tau_{PQ}(P) = Q$

Remarques

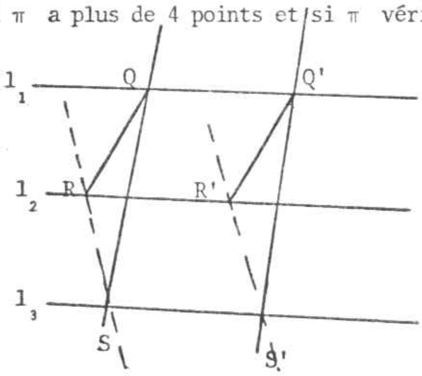
1) D'après Axiome 4a, comme il y a au moins 4 points dans notre géométrie, il existe des directions de translations distinctes donc (T, o) est commutatif.

2) Si la géométrie a 4 points, d'après § 5 du chapitre 1, l'axiome 4a est vérifié.

Nous allons montrer que cet axiome est équivalent à une configuration géométrique simple : la configurat parallèle de Dehargues, (Si le plan a plus de 4 points).

Théorème de Dehargues (cas parallèles)

Si π a plus de 4 points et si π vérifie l'axiome 4a, alors on a le résultat suivant :



Soient l_1, l_2, l_3 trois droites parallèles et distinctes Q et Q' deux points de l_1

R et R' deux points de l_2

S et S' deux points de l_3

vérifiant : $(QR) \,//\, (Q',R')$ et $(QS) \,//\, (Q',S')$

alors $(RS) \,//\, (R'S')$

DEMONSTRATION

D'après l'axiome 4a, il existe une translation $\tau_{QQ'}$ vérifiant $\tau_{QQ'}(Q) = Q'$

D'après la construction de l'image d'un point par une translation $R' = \tau_{QQ'}(R)$ et $S' = \tau_{QQ'}(S)$

Les translations conservent la direction, on a :

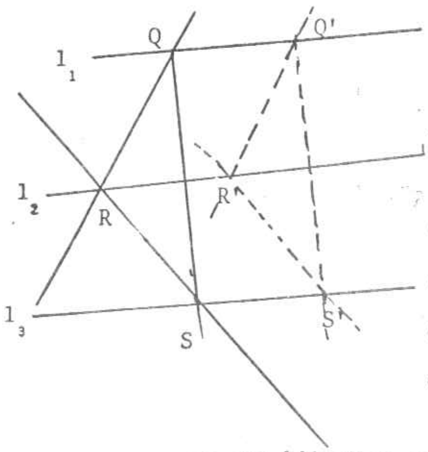
$$(R\,S) \,//\, (R'\,S')$$

Réciproquement si la configuration de Dehargues est vérifiée, alors l'axiome 4a est vérifié.

DEMONSTRATION

Soient Q, Q' deux points si $Q = Q'$ on prend $\tau_{QQ'} = 1_\pi$

Si $Q \neq Q'$ Q, Q' détermine une droite l_1



Soit R un point extérieur à l_1, on construit par R la parallèle l_2 à l_1 passant par R.

$(Q\,R)$ détermine une droite, par Q' on trace la parallèle à $(Q\,R)$ passant par Q'. Elle coupe l_2 en R'. On a ainsi définit une application.

$$\sigma_1 : \pi - l_1 \longrightarrow \pi - l_1$$

σ_1 est bijective. On définit de même :

$$\sigma_2 : \pi - l_2 \longrightarrow \pi - l_2$$

$\sigma_2(S) = l_3 \cap$ (parallèle à RS passant par R') $= S'$

D'après la configuration de Dehargues on a :

$$\sigma_2 = \sigma_1 \quad \text{pour } \pi - (l_1 \cup l_2)$$

Définissant $\sigma : \pi \longrightarrow \pi$

par : $\sigma = \sigma_1$ sur $\pi - l_1$

$\sigma = \sigma_2$ sur l_1

σ est une application bijective de π dans π ; d'après la configuration de Dehargues :

σ est une dilatation dont les traces sont les droites du faisceau déterminé par l_1 σ est donc une translation et $\sigma(Q) = Q'$. Ce qui établit la vérification de l'axiome 4a.

§ 3 *$(k, +, .)$ EST UN CORPS*

Notre géométrie sera supposer satisfaire aux axiomes 1 - 2 - 3 et 4a. On va établir que dans ces conditi
l'anneau $(k, +, .)$ est un corps.

PROPOSITION 2-4

Soient $\alpha \in k$ $\alpha \neq 0$ et P un point de π . Il existe une dilatation unique σ telle que :

$$\sigma(P) = P$$
$$\tilde{\sigma} = \alpha$$

DEMONSTRATION

1) Unicité de σ

Si σ existe alors d'après l'axiome 4a, pour tout $Q \in \pi$ on a :

$$\alpha(\tau_{PQ}) = \sigma.\tau_{PQ} . \sigma^{-1}$$

d'où, si $\sigma(P) = P$ on a :

$$\sigma(Q) = [\alpha(\tau_{PQ})] \ (P)$$

Cette relation établit l'unicité de σ

2) Construction de σ

D'après l'axiome 4a et compte tenu du fait qu'une translation est déterminée
par l'image d'un point :

$$\sigma(Q) = [\alpha(\tau_{PQ})] \ (P)$$

définit une application : $\sigma : \pi \longrightarrow \pi$

vérifiant $\sigma(P) = P$

avant de terminer cette démonstration, nous avons besoin d'un lemme sur la détermination des dilatations.

LEMME 2-5

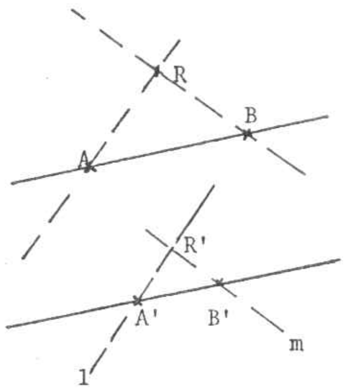
Si une application $\sigma : \pi \longrightarrow \pi$ vérifie :

1) pour tout couple (P,Q) de points distincts
$(P\,Q)$ est parralèle à une droite passant par P', Q' images de P et Q par σ

2) il existe deux points A et B distincts dont les images A' et B' sont distinctes.

Alors σ est une dilatation.

DEMONSTRATION



a) Si R n'appartient pas à la droite $(A\ B)$ alors $(R\ A)$ et $(R\ B)$ sont deux droites distinctes.

D'après 1), $\sigma(R) = R' = 1 \cap m$ où 1 est la parralèle à $(R\ A)$ passant par A' et m la parralèle à $(R\ B)$ passant par B'. Il résulte de cette construction que σ est une bijection de $\pi-(A\ B)$ sur $\pi-(A'\ B')$

b) Si $S \in (A\ B)$ il suffit de choisir un point R extérieur à $(A\ B)$ et de refaire avec le couple (B, R) une construction analogue à celle faite avec (A, B) au point a)

c) Il suit de a) et b) que σ est une application bijective de π dans π respectant les directions c'est donc une dilatation.

FIN DE LA DEMONSTRATION DE 2-4

3) σ est une dilatation

Comme $\alpha \neq o$ pour $Q \neq P$ on a :

$$\alpha(\tau_{PQ})\ (P) \neq P$$

D'après la définition de σ on a :

$$\sigma(Q) \neq P \quad \text{et} \quad \sigma(P) = P$$

On a vérifié qu'il existe deux points distincts dont les images par sont distinctes.

Montrons si Q er R sont deux points distincts $(Q'R') \,//\, (Q\ R)$

Soient Q et R deux points distincts

$$\tau_{QR} \circ \tau_{PQ} = \tau_{PR}$$

d'où : $\sigma(R) = \alpha(\tau_{QR})\ (\sigma(Q)\ )$

Soit 1 la droite passant par $\sigma(Q)$ et parallèle à $(Q\ R)$; c'est une trace de τ_{QR} donc de $\alpha(\tau_{QR})$ donc $\sigma(R) \in 1$; d'après le lemme 2-5 σ est une dilatation ayant P comme point fixe

4) $\alpha = \tilde{\sigma}$

On a : $\sigma(Q) = \left[\alpha(\tau_{PQ}) \circ \sigma\right](P)$ d'où $Q = \left[\sigma^{-1} \circ \alpha(\tau_{PQ}) \circ \sigma\right](P)$

Une translation étant déterminée par l'image d'un point il suit que :

$$\tau_{PQ} = \sigma^{-1} \circ \alpha(\tau_{PQ}) \circ \sigma$$

d'où $\alpha(\tau_{PQ}) = \sigma \circ \tau_{PQ} \circ \sigma^{-1} = \tilde{\sigma}\ (\tau_{PQ})$ mais comme $\tau = \tau_{P\tau P}$

il suit que $\alpha = \tilde{\sigma}$

Théorème 2-6

$(k, +, .)$ est un corps (non nécessairement commutatif)

DEMONSTRATION

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2-5

Remarquons que d'après la proposition 2-5 $(k - \{0\}\ ,\ .)$ est isomorphe à l'ensemble des dilatations ayant P pour point fixe muni de la loi de composition.

En effet $\alpha \in k \quad \alpha \neq 0 \quad \alpha(\tau) = \sigma_\alpha \circ \tau \circ \sigma_\alpha^{-1}$

$$\beta(\tau) = \sigma_\beta \circ \tau \circ \sigma_\beta^{-1}$$

$$\alpha\beta(\tau) = \alpha o \beta(\tau) = \alpha(\sigma_\beta \circ \tau \circ \sigma_\beta^{-1}) = (\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta)\ \tau\ (\sigma_\beta^{-1} \circ \sigma_\alpha^{-1}) = (\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta)\ \tau\ (\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta)^{-1}$$

d'après l'unicité de σ on a $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta$

§ 4 *UN EXEMPLE DE GEOMETRIE VERIFIANT LES AXIOMES 1, 2, 3, 4a*

Reprenons l'ensemble k^2 où k est un corps et où les droites sont les sous-ensembles vérifiant une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec α, β sont tous les deux nuls.

On a vu que cet ensemble vérifie alors les axiomes 1, 2, 3. Si l et l' sont deux droites d'équations respectives $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

Les deux droites sont parallèles si, et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0$

Il suit que la transformation $\tau : k^2 \longrightarrow k^2$

$$(x, y) \longmapsto (x + a, y + b)$$

est une translation pour tout couple $(a, b) \in k^2$

Si (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux points de k^2 la translation définie par $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ envoie le point (x_0, y_0) sur le point (x_1, y_1)

Il résulte de ceci que l'axiome 4a) est vérifié pour la géométrie ainsi définie sur k^2.

On peut alors se demander si toutes les géométries vérifiant les axiomes 1, 2, 3, 4a sont isomorphes aux géométries construites sur un corps k comme nous venons de le faire.

Dans le cas que nous venons d'étudier, l'ensemble T des translations est un espace vectoriel de dimensi 2 sur le corps k.

Si (a, b) et (a', b') sont deux translations différentes de l'identité de même direction, alors cela signifie qu'il existe $\lambda \in k^*$ tel que $\lambda(a, b) = (a', b')$.

§ 5 *L'ESPACE VECTORIEL DES TRANSLATIONS*

Nous retournons au cas général où la géométrie étudiée vérifie les axiomes 1, 2, 3, 4a) et où k est le corps des endomorphismes de (T, o) conservant les traces.

(T, o) est un groupe commutatif

Etudions la loi externe $\quad k \times T \longrightarrow T$

$$(\alpha, \tau) \longmapsto \alpha(\tau) = \alpha.\tau$$

on a : $\quad 1.\tau = \tau$

Si τ_1 et τ_2 sont deux translations comme α est un homomorphisme de groupe, on a :

$$\alpha(\tau_1 \circ \tau_2) = \alpha(\tau_1) \circ \alpha(\tau_2) = \alpha.\tau_1 \circ \alpha.\tau_2$$

Si α et β sont deux éléments du corps k $\quad (\alpha \circ \beta)\tau = \alpha.(\beta.\tau)$ $\quad$ d'après la définition de la composition de deux applications.

Enfin, si α et β sont deux éléments du corps k

$$(\alpha + \beta)\tau = \alpha(\tau) \circ \beta(\tau) = \alpha.\tau \circ \beta.\tau$$

Ce qui établit que $(T, o, .)$ est un espace vectoriel à gauche sur le corps k.

Sur l'ensemble $T - \{1_\pi\}$ nous avons donc deux relations d'équivalence :

$\mathcal{R}_1$: $\quad \tau_1$ et τ_2 ont même direction

$\mathcal{R}_2$: il existe $\alpha \in k^*$ tel que $\quad \tau_2 = \alpha\, \tau_1$

Nous savons que la relation $\mathcal{R}_2$ implique la relation $\mathcal{R}_1$ mais nous ne savons pas si la réciproque est vraie.

Nous allons, pour terminer ce chapitre, montrer que le groupe (T, o) opère simplement et transitivement sur π. Rappelons quelques définitions.

> DEFINITION
>
> Soient E un ensemble et G un groupe. On dit que l'on a définit une action de G sur E, si on a une application :
>
> $$G \times E \longrightarrow E$$
> $$(g, x) \longrightarrow g.x$$
>
> vérifiant : $\quad (\forall g \in G)\ (\forall g' \in G)\quad g.(g'.x) = (gg').x$
>
> $\quad (\forall x \in E)\ (1.x = x)$ ou 1 est l'élément neutre de G.

Il est clair que l'application $\quad \tau \times \pi \longrightarrow \pi$

$$(\tau, P) \longmapsto P + \tau = \tau(P)$$

est une action de groupe.

> DEFINITION
>
> On dit que le groupe G opère simplement sur E si :
>
> $$(\forall x \in E)\ (\forall g \in G)\ (g.x = x) \Longrightarrow g = 1)$$

DEFINITION

On dit que le groupe G opère transitivement sur E si :

$$(\forall x \in E)\ (\forall y \in E)\ (\exists g \in G)\ (y = gx)$$

Remarquons que si G opère simplement et transitivement pour tout x et tout y élément de E, il existe un g unique appartenant à G tel que y = gx.

PROPOSITION 2-7

Le groupe (T, o) opère simplement et transitivement dès que l'axiome 4a) est satisfait.

DEMONSTRATION

C'est l'énoncé même de l'axiome 4a.

CHAPITRE 3

PLAN AFFINE ARGUESIEN

Nous avons établi à la fin du chapitre 2 que l'ensemble des translations a une structure d'espace vectoriel à gauche, sur un corps d'endomorphismes k et opère simplement et transitivement sur π.
Nous ne savons pas qu'elle est la dimension de cet espace vectoriel.

L'objet de ce chapitre est de montrer que si on impose un axiome supplémentaire, alors T est un espace vectoriel de dimension 2 sur k.

§ 1 *DIMENSION DE $(T, 0, .)$ sur k*

Nous supposerons maintenant que la géométrie étudiée vérifie en plus des axiomes 1, 2, 3, 4a l'axiome 4b

AXIOME 4b

Pour tous P, Q, R points alignés et distincts, il existe une dilatation σ vérifiant $\sigma(P) = P$ et $\sigma(Q) = R$.

Cette axiome nous assure qu'il y a assez de dilatation laissant fixe un point. Nous excluons donc la géométrie à 4 points pour laquelle on a vu que les seules dilatations sont les translations.

Nous allons montrer dans un premier temps que cet axiome 4b est équivalent à démontrer que :

$$\tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ ont même direction} \Longleftrightarrow \exists \alpha \in k^* \quad \tau_2 = \alpha . \tau_1$$

PROPOSITION 3-1

L'axiome 4b est équivalent à :

Si τ_1 et τ_2 sont des translations distinctes ayant même direction alors, il existe $\alpha \in k^*$ tel que $\alpha(\tau_1) = \tau_2$

DEMONSTRATION

1) L'axiome 4b implique le résultat de la proposition 3-1

Soit P un point donné $\tau_1 = \tau_{PQ}$ et $\tau_2 = \tau_{PR}$

Comme τ_1 et τ_2 ont même trace, P, Q, R sont alignés ; comme $\tau_1 \neq \tau_2$ et distincts de 1_π, les points P, Q, R sont distincts. Il suit qu'il existe $\sigma : \sigma(P) = P \qquad \sigma(Q) = R$

On a : $\sigma\circ\tau_1\circ\sigma^{-1}(P) = \sigma\circ\tau_1\ (P) = \sigma(Q) = R = \tau_2(P)$

une translation étant déterminée par l'image d'un de ses point on a :

$$\tau_2 = \sigma\,\tau_1\,\sigma^{-1} = \tilde{\sigma}(\tau_1) = \tilde{\sigma}.\tau_1$$

2) Réciproquement si $\tau_2 = \alpha(\tau_1)$ alors comme τ_1 et τ_2 sont distincts de 1_π $\alpha \neq 0$ et pour P fixé il existe σ tel que $\alpha = \tilde{\sigma}$ et $\sigma(P) = P$.

Il en résulte que si P, Q, R sont distincts et alignés $\tau_1 = \tau_{PQ}$; $\tau_2 = \tau_{PR}$ ont même trace. Il existe une dilatation σ vérifiant $\sigma(P) = P$ et $\sigma\,\tau_1\,\sigma^{-1} = \tau_2$ on a : $\sigma\,\tau_1\,\sigma^{-1}(P) = \sigma\,\tau_1(P) = \sigma(Q) = \tau_2(P) = R$ ce qui établit l'axiome 4b.

La proposition suivante va établir que l'espace T est de dimension 2 sur k.

PROPOSITION 3-2

Soient τ_2 et τ_2 deux translations distinctes de l'identité et de directions différentes. Pour toute translation $\tau \in T$, il existe des éléments uniques $\alpha \in k$; $\beta \in k$ tel que $\tau = \alpha(\tau_1) \circ \beta(\tau_2) = \beta(\tau_2) \circ \alpha(\tau_1)$

DEMONSTRATION

1) La commutativité est évidente car $(T, 0)$ est commutatif.

2) <u>Unicité</u>

Si on a $\alpha(\tau_1) \circ \beta(\tau_2) = \gamma(\tau_1) \circ \delta(\tau_2)$

il suit que $\alpha(\tau_1) \circ [\gamma(\tau_1)]^{-1} = \delta(\tau_2) \circ [\beta(\tau_2)]^{-1}$

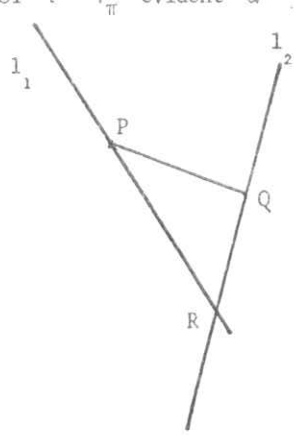
d'après la définition de $+$ dans k on a : $(\alpha + (-\gamma))(\tau_1) = (\delta + (-\beta))\tau_2$

Comme τ_1 et τ_2 n'ont pas même direction, il suit que :

$$\left.\begin{matrix} \alpha + (-\gamma) = 0 \\ \delta + (-\beta) = 0 \end{matrix}\right\} \iff \begin{matrix} \alpha = \gamma \\ \delta = \beta \end{matrix}$$

3) <u>Existence</u>

Si $\tau = 1_\pi$ évident $\alpha = \beta = 0$. On suppose $\tau \neq 1_\pi$



Soit P un point quelconque

$Q = \tau(P) = \tau_{PQ}(P)$

On trace les traces de τ_1 et τ_2 passant respectivement par P et Q. Elle se coupe en un point R. Si $R = P$ alors τ a la direction de τ_2 et d'après la proposition 3-1, il existe β vérifiant $\tau = \beta(\tau_2)$. Si $R = Q$ alors τ a la direction de τ_1 et il existe α vérifiant

$$\tau = \alpha(\tau_1)$$

Si R est distinct de P et de Q alors τ_{PR} a pour direction τ_1 et il existe α tel que $\tau_{PA} = \alpha(\tau_1)$

τ_{RQ} a pour direction τ_2 et il existe β tel que $\tau_{RQ} = \beta(\tau_2)$ d'où :

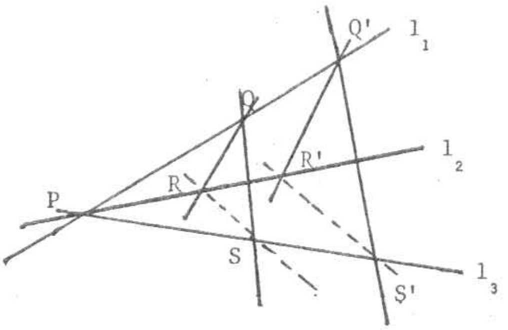
$$\tau = \tau_{PQ} = \tau_{PR} \circ \tau_{RQ} = \alpha(\tau_1) \circ \beta(\tau_2)$$

Nous pouvons dire maintenant que si une géométrie sur π vérifie les axiomes 1, 2, 3, 4a, 4b, alors

- T est un espace de dimension 2 sur k
- (T, O) opère de façon simplement transitive sur π.

§ 2 *LA CONFIGURATION DE DEHARGUES CAS SECANT*

On dit qu'une géométrie satisfait à la configuration sécante de Dehargues si :



l_1 l_2 l_3 étant 3 droites qui se coupent en P

(Q, Q'), (R, R') , (S, S')

sont deux points distincts et distinct de P respectivement sur l_1 , l_2 , l_3 .

si $QR \,//\, Q'R'$ et $QS \,//\, Q'S'$ alors $RS \,//\, R'S'$

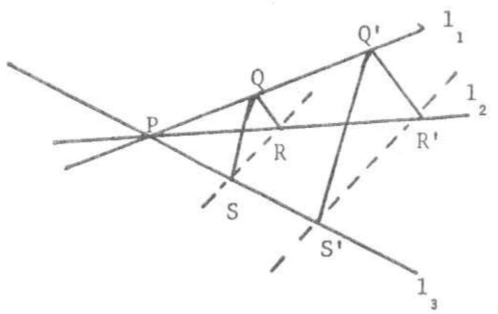
On va établir que ceci est équivalent à l'axiome 4b.

PROPOSITION 3-3

L'axiome 4b est équivalent à la configuration sécante de Dehargues.

DEMONSTRATION

1) L'axiome 4b implique Dehargues



Soit σ la dilatation définie par $\sigma(P) = P$

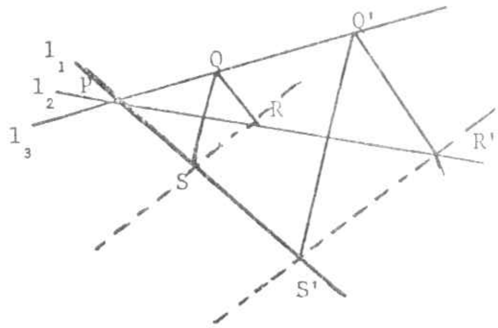
$\sigma(Q) = Q'$

Par construction

$S' = \sigma(S)$ et $R' = \sigma(R)$

d'où $(RS) \,//\, (R'S')$

2) La configuration de Dehargues sécante implique l'axiome 4b



Soit l_1 une droite passant par P, Q et Q' deux points distincts de l_1 et distincts de P.

La configuration de Dehargues permet de définir une application

$\sigma_1 : \pi - l_1 \longrightarrow \pi - l_1$

bijective.

On définit de même

$\sigma_2 : \pi - l_2 \longrightarrow \pi - l_2$

La configuration de Dehargues assure que $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $\pi - (l_1 \cup l_2)$.

On pose $\sigma : \pi \longrightarrow \pi$ défini par $\sigma = \sigma_1$ sur $\pi - l_1$

$\sigma = \sigma_2$ sur l_1

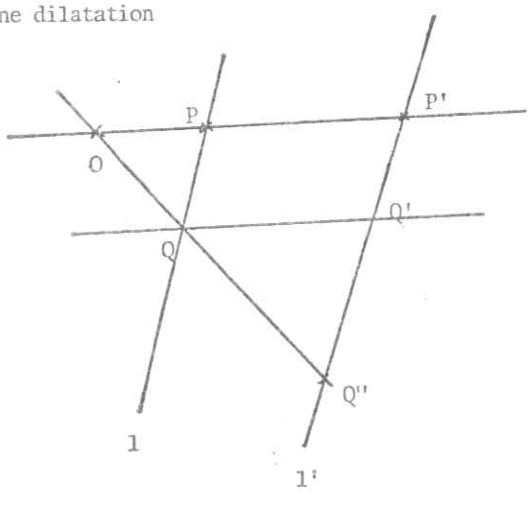
Il résulte de la configuration de Dehargues que σ est une dilatation vérifiant

$\sigma(P) = P \qquad \sigma(Q) = Q'$

§ 3 COMPLEMENT

Nous allons montrer que l'axiome 4b implique l'axiome 4a. Soient P et P' deux points distincts.

En effet, soit O un point aligné avec P et P' et distinct d'eux, d'après l'axiome 4b, il existe une dilatation



σ_1 vérifiant $\sigma_1(O) = O$

$\sigma_1(P) = P'$

Par P' on trace une droite l' distincte de la droite P P' et par P on trace la parallèle l à l'. On prend $Q \in l$ et $Q'' \in l'$ distinct de P et P' tel que

$\sigma_1(Q) = Q''$

par Q on trace la parallèle à (P P') elle coupe l' en Q'.

il existe alors une dilatation σ_2 vérifiant $\sigma_2(P') = P'$ $\qquad \sigma_2(Q'') = Q'$

on a alors pour $\sigma_2 \circ \sigma_1(P) = P' \qquad \sigma_2 \circ \sigma_1(Q) = Q'$

Comme P P' et Q Q' sont parallèles, il en résulte que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une translation. C'est la translation qui transforme P en P'. Ce qui établit l'axiome 4a.

On pourrait traduire cette équivalence en disant que les dilatations ayant un point fixe engendre le groupe des dilatations.

§ 4 OU EN SOMMES NOUS ?

Avec les notations habituelles nous pouvons dire que si π est un plan vérifiant les axiomes 1, 2, 3, 4b alors :

1) (T, o) est un groupe commutatif

2) T est un espace vectoriel à gauche de dimension 2 sur son corps d'endomorphismes k. (k n'est pas nécessairement commutatif)

3) (T, o) opère simplement et transitivement sur π

4) Nous avons fourni pour les axiomes 4a) et 4b) des interprétations géométriques simples.

Arrivé à ce stade, nous proposons quelques pistes de réflexion

1) Existe-t-il une configuration géométrique simple assurant que le corps k des endomorphismes est commutatif.

2) Peut-on prendre pour nouvelle définition d'un plan affine la suivante :

Etant donné un espace vectoriel à gauche T de dimension 2 sur un corps non nécessairement commutatif, on dit que π est un plan affine arguesien sur k, si le groupe additif de T opère simplement et transitivement sur π.

Cette définition a l'avantage de pouvoir facilement s'étendre aux dimensions autre que 2.

3) Nous nous sommes jusqu'à présent intéressés seulement aux applications bijectives d'un plan affine dans lui-même conservant la direction. Nous allons par la suite nous intéresser à des applications astreintes seulement à conserver l'alignement de deux points et le parallélisme des deux droites.

4) Dans beaucoup de démonstrations en géométrie affine, nous avons dû distinguer les configurations sécantes et les configurations parallèles. Nous verrons comment la géométrie affine s'intègre dans la géométrie projective.

5) Quelles conséquences aura sur la géométrie le caractère de corps ordonné du corps de base ?

6) Si k_1 est un sur corps de k_2 que peut-on dire des plans affines construits sur k_1 et sur k_2 ?

7) Si l'espace vectoriel est muni d'une forme bilinéaire, quelle notion peut-on définir sur le plan affine associé ?

C'est à ces diverses questions que les chapitres qui suivent vont donner des éléments de réponses.

CHAPITRE 4

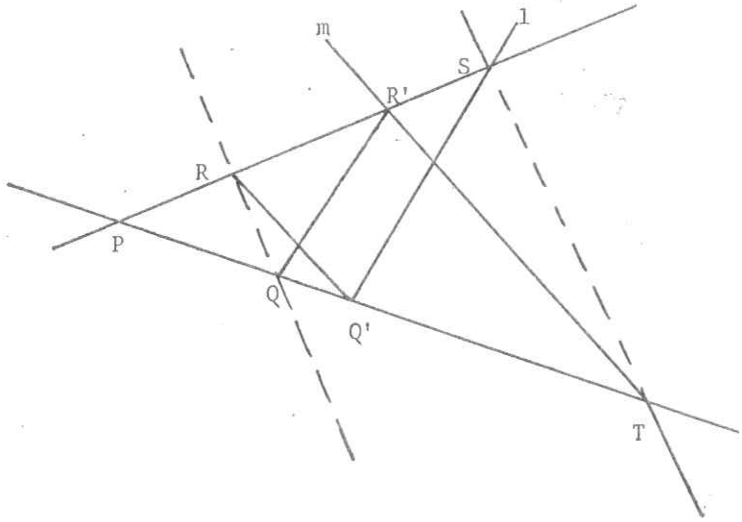
COMMUTATIVITE DU CORPS DE BASE

Nous allons établir qu'il existe une configuration géométrique simple : le théorème de Pappus, équivalente à la commutativité du corps k des endomorphismes de T.

§ 1 *LE THEOREME DE PAPPUS*

Nous avons établi dans le chapitre 2 que $(k^*.)$ était isomorphe en tant que groupe au groupe des dilatations ayant un point fixe P.

Le corps k sera donc commutatif si, et seulement si, le groupe des dilatations ayant P pour point fixe est commutatif.



Soient σ_1 et σ_2 deux dilatations ayant P comme point fixe.

σ_1 est déterminée par : $\sigma_1(Q) = Q'$

σ_2 est déterminée par : $\sigma_2(R) = R'$

$\sigma_1 \circ \sigma_2$ est déterminé par : $\sigma_1 \circ \sigma_2(R) = \sigma_1(R') = S$ où $S = (PR) \cap l$ où l est la parallèle à (QR') passant par Q'

$\sigma_2 \circ \sigma_1$ est déterminé par : $\sigma_2 \circ \sigma_1(Q) = \sigma_2(Q') = T$ où $T = (PQ) \cap m$ où m est la parallèle à (RQ') passant par R'

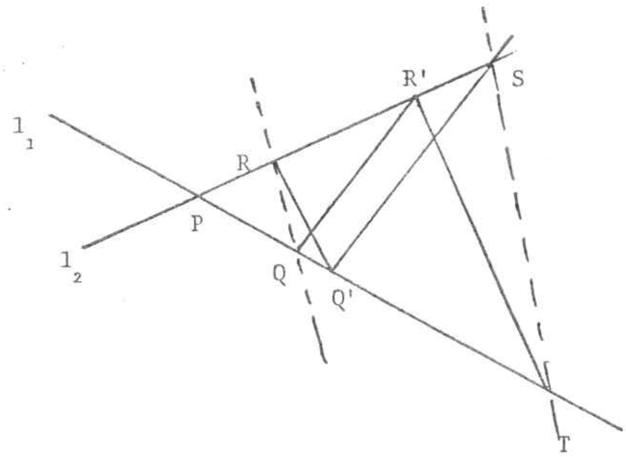
Il suit que $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ si, et seulement si, $\sigma_1 \circ \sigma_2(R) = \sigma_2 \circ \sigma_1(R) = S$ comme $\sigma_2 \circ \sigma_1(Q) = T$

ceci est équivalent à $(R\,Q) \,//\, (S\,T)$.

Comme d'après l'axiome 4b toutes les dilatations ayant le point P comme point fixe, sont déterminés par deux points alignés avec P et distincts de P. Nous pouvons énoncer le théorème de Pappus.

THEOREME DE PAPPUS

Soient l_1, l_2 deux droites concourantes en P ;



Soient Q, Q' deux points autre que P et distincts de l_1, R, R' deux points autre que P et distinct de l_2

T un point de l_1

S un point de l_2 tels que

(R Q') // (R' T)

et (R' Q) // (Q' S)

On dit que la configuration de Pappus est vraie si alors (R Q) // (S T).

Cette condition est équivalente à la commutativité du corps k.

§ 2 REMARQUES

En géométrie affine deux droites distinctes étant donné, deux cas sont possibles :

- elles sont sécantes
- elles sont parallèles.

C'est ainsi que nous avons distinguer deux cas pour la configuration de Dehargues, le cas où les droites l_1, l_2, l_3 sont parallèles et celui où les droites l_1, l_2, l_3 sont sécantes.

Dans le cas de la configuration de Pappus, nous n'avons envisager que le cas où l_1 et l_2 était sécant. En effet, la configuration correspondante dans le cas où l_1 et l_2 sont parallèles traduit seulement le fait que (T, o) est commutatif, ce qui est trivialement vérifié dès que l'axiome 4a est satisfait.

CHAPITRE 5

NOUVELLE DEFINITION D'UN PLAN AFFINE ARGUESIEN

Etant donné un espace vectoriel V de dimension 2 sur un corps K tel que $(V, +)$ agisse de façon simplement transitive sur un ensemble π on va se poser la question suivante :

Peut-on grâce à cette action de groupe, munir π d'une structure vérifiant les axiomes 1, 2, 3, 4b de tel façon que $(V, +)$ soit canoniquement isomorphe au groupe (T, o) des translations et K, soit canoniquement isomorphe au corps k des endomorphismes de (T, o) compatibles avec la notion de trace ?

Enfin après avoir répondu à cette question pour assurer de façon définitive l'équivalence des deux définitions, il nous faudra répondre à la question suivante :

Si π est un plan affine arguésien vérifiant les axiomes 1, 2, 3, 4b, l'action de (T, o) sur π définit par :

$$(\tau, M) \longrightarrow \tau(M)$$

définit-elle la même structure affine que la structure initiale.

§ 1 GROUPE OPERANT SUR UN ENSEMBLE

Rappelons une définition donnée précédemment :

DEFINITION

Soient $(G.)$ un groupe et E un ensemble, on dit que G opère sur E s'il existe une application :

$$G \quad E \longrightarrow E$$
$$(g, x) \longmapsto g.x$$

vérifiant :
1) $\forall x \in E \qquad 1.x = x$ ou 1 est l'élément de G.
2) $\forall x \in E \quad \forall g \in G \quad \forall g' \in G \; (g . g').x = g.(g'.x)$

Si E est un ensemble, on appelle $(\mathcal{S}(E), o)$ le groupe des bijections de E dans E muni de la loi o.

PROPOSITION 4-1

Le groupe $(G, .)$ opère sur E si, et seulement si, il existe un homomorphisme de groupe de $(G, .)$ dans $(\mathcal{S}(E), o)$

DEMONSTRATION

1) Si G opère sur E, considérons pour $g \in G$, l'application $\tilde{g}$ définit par :

$$\tilde{g} : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto g.x$$

Si $g.x = g.y$ alors $g^{-1}.(g.x) = g^{-1}(g.y)$ d'où $1.x = 1.y$ et par suite $x = y$.

Ce qui établit que $\tilde{g}$ est injective

Compte tenu de $1.x = g(g^{-1}x) = x$ il suit que pour tout $x \in E$, il existe $g^{-1}x \in E$ tel que $\tilde{g}(g^{-1}x) = x$ ce qui établit que $\tilde{g}$ est une bijection.

On a donc défini une application :

$$\sim \quad G \longrightarrow \mathcal{S}(E)$$
$$g \longmapsto \tilde{g}$$

Montrons que c'est un homomorphisme de groupe. Pour tout $x \in E$ on a :

$$\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2(x) = \tilde{g}_1(\tilde{g}_2(x) = \tilde{g}_1(g_2.x) = g_1.(g_2x) = (g_1.g_2).x = \widetilde{g_1.g_2}(x)$$

ce qui établit que $\tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2 = \widetilde{g_1.g_2}$ donc que $\sim$ est un homomorphisme.

Réciproquement

2) Si $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}(E)$ est un homomorphisme de groupe définissons l'application . de $G \times E$ dans E par :

$$. : G \times E \longrightarrow E$$
$$(g, x) \longmapsto \varphi(g)(x) = g.x$$

on a alors pour tout x $1.x = x$ car $\varphi(1) = 1_E$

ou d'autre part $(g_1.g_2).x = \varphi(g_1.g_2) = [\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)](x)$
$$= \varphi(g_1)\ (\varphi(g_2)(x)) = g_1.(g_2.x)$$

Ce qui établit que l'application . est une action de groupe.

DEFINITION

On dit qu'une action d'un groupe G sur un ensemble E est fidèle. L'homomorphisme $\sim$ de $(G.)$ dans $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est injectif.

§ 2 *PLAN AFFINE ARGUESIEN ASSOCIE A UNE ACTION SIMPLEMENT TRANSITIVE*

Soient un corps K, non nécessairement commutatif, $(V, +)$ un espace vectoriel à gauche de dimension 2 sur K, π un ensemble et $+$ une action simplement transitive de $(V, +)$ sur π

$$V \times \pi \longrightarrow \pi$$
$$(V, P) \longrightarrow P + V$$

Cette action définit un homomorphisme :

$$V \longrightarrow \mathcal{S}(\pi)$$
$$v \longrightarrow \tau_V$$

On appelle T l'image de V par cet homomorphisme. L'action de V sur π étant simple est fidèle et T et V sont isomorphes. Cherchons s'il existe une structure affine arguésienne tel que T en soit l'ensem des translations.

Dans toute la suite, nous supposerons que π a plus de 4 points, ce cas ayant été étudié à la fin du chapitre 1.

Nous noterons τ_{PQ} l'élément de T défini par $\tau_{PQ} = \tau_v$ où v est l'unique élément de V vérifi

$$Q = P + v$$

Pour que l'Axiome 4b soit vérifié, il est nécessaire que pour tout couple de points R, Q distincts, la droite passant par P et Q contienne tous les points R vérifiant

$$R = P + \alpha v \quad \text{où} \quad \alpha \in K$$

on est donc amené à définir pour tout couple (P, Q) de points distincts la droite (PQ) par : .

$$(PQ) = \{R \ / \ Q = P + \bar{\bar{v}} \ \text{ et } \ R = P + \alpha v \quad \text{où} \quad \alpha \in K\}$$

Avec cette définition l'axiome 1) est vérifiée car l'action $+$ est simplement transitive.

La dimension de V sur K étant 2 il en résulte que l'axiome 3 est vérifié.

Etudions l'intersection de deux droites

$$l_1 = \{P + \alpha v_1 \ / \ \alpha \in K\}$$
$$l_2 = \{Q + \alpha v_2 \ / \ \alpha \in K\}$$

$l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ si, et seulement si, il existe $\alpha_1 \in K$ et $\alpha_2 \in K$ vérifiant $P + \alpha_1 v_1 = Q + \alpha_2 v_2$ (1) posant v l'élément de V tel que $Q = P + v$ la relation (1) s'écrit encore :

$$\alpha_1 v_1 = v + \alpha_2 v_2$$

ou encore
$$\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 = v$$

Si v_1 et v_2 sont linéairement dépendants, alors $l_1 = l_2$

Si v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, alors α_1 et α_2 sont uniques et $l_1 \cap l_2$ est réduit à un point. Il résulte de ceci que :

$$l_1 \cap l_2 = \emptyset \Longleftrightarrow v_1 \text{ et } v_2 \text{ sont linéairement dépendants et } v \text{ n'a pas la direction de } v_1, v_2$$

Ceci nous montre que la parallèle à

$$l_2 = \{Q + \alpha v_2 \ / \ \alpha \in K\}$$

passant par P est

$$l = \{P + \alpha v_2 \quad \alpha \in K\}$$

ce qui montre que l'axiome 2 est vérifié.

Enfin, l'axiome 4b est vérifié car par définition, si P, Q, R sont alignés on a : $Q = P + v$ et $R = P + \alpha v$ d'où $\tau_{PR} = \tau_{\alpha v}$

Cette relation permet d'identifier K et k en posant

$$\tau_{PR} = \alpha\tau_{PQ} \Longleftrightarrow Q = P + v \quad \text{et} \quad R = P + \alpha v$$

Nous avons donc de façon unique défini, grâce à l'action de $(V\ +)$ sur π, une structure d'espace affine arguésien sur π.

§ 3 *EQUIVALENCE DES DEUX DEFINITIONS D'UN PLAN AFFINE ARGUESIEN*

Elle est maintenant évidente car on peut, d'après 4b, définir la droite passant par P et Q par :

$$l = \{R \ / \ \exists \alpha \in k \qquad \tau_{PR} = \alpha\tau_{PQ}\}$$

Ce qui établit que la structure affine initiale est la même que celle définit par l'action de $(T, \circ)$ sur π.

Nous pouvons maintenant définir un espace affine en dimension n quelconque de la manière suivante :

Etant donné V un espace vectoriel à gauche de dimension n sur un corps k (non nécessairement) commutatif, on dit que $\mathcal{V}$ est un espace affine de dimension n sur k, si on se donne une action simplement transitive de $(V\ +)$ dans $\mathcal{V}$.

Dans la suite nous n'envisagerons pour les espaces affines de dimension autre que 2, que le cas où le corps k sera commutatif.

CHAPITRE 6

COMPLEMENTS SUR LA CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DU CORPS DES ENDOMORPHISMES DE T

Le chapitre a pout but de préciser comment interpréter les lois du corps des endomorphismes par des constructions géométriques. La géométrie que nous considérons, a toujours plus de 4 points et vérifie les axiomes 1, 2, 3, 4b

§ 1 REPRESENTATION GEOMETRIQUE DU GROUPE $(k^*, .)$

Nous avons dans le chapitre 3 établit grâce à l'axiome 4b que le groupe $(k^*, .)$ est isomorphe à $(\mathcal{H}_P, o)$ groupe des dilatations ayant P pour point invariant.

DEFINITION

Si σ est une dilatation ayant un point P comme point invariant, on appelle rapport d'homothétie de σ l'élément $\tilde{\sigma} \in k^*$ défini par $\tau \longrightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$

Remarque

1) Le rapport d'homothétie de σ est égal à 1 et seulement si $\sigma = 1_\pi$

2) Etant donné un élément $\alpha \in k^*$ et un point $P \in \pi$ il existe une et une seule dilatation σ ayant P pour point fixe et α pour rapport d'homothétie. Cette remarque n'est qu'une autre façon d'énoncer la proposition.

PROPOSITION 6-1

Pour tout point P l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_P & \xrightarrow{\subset} & D & \xrightarrow{can} & D/T \\ \sigma & \longmapsto & \sigma & \longrightarrow & \sigma \circ T \end{array}$$

est un isomorphisme.

DEMONSTRATION

1) Soit $\sigma' \circ T \in D/T$ $\sigma' \circ T = T$ si, et seulement si $\sigma' \in T$ et on a alors $\sigma' \circ T = 1_\pi \circ T$ or $1_\pi \in \mathcal{H}_P$

Supposons donc que $\sigma' \circ T \neq T$ alors σ' a un point fixe Q. Il existe une translation et une seule τ_{QP} vérifiant $\tau_{QP}(Q) = P$ Définissons $\sigma = \tau_{QP} \circ \sigma' \circ \tau_{QP}^{-1}$

on a alors :

$$\sigma(P) = \tau_{QP} \circ \sigma' \circ \tau_{QP}^{-1}(P) = \tau_{QP} \circ \sigma'(Q) = \tau_{QP}(Q) = P$$

ce qui établit que $\sigma \in \mathcal{H}_P$; de plus $\sigma \circ \tau_{QP} = \tau_{QP} \circ \sigma'$

T étant un sous groupe normal de D : $\sigma \circ T = \sigma' \circ T$

Ce qui établit que l'homorphisme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}_P & \xrightarrow{\subset} & D & \xrightarrow{\text{can}} & D/T \\ \sigma & & \longrightarrow & & \sigma \circ T \end{array}$$

est surjectif

2) L'homomorphisme est bijectif car $T \cap \mathcal{H}_P = \{1_\pi\}$

COROLLAIRE 6-2

Pour tout couple de point P, Q du plan

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_P & \longrightarrow & \mathcal{H}_Q \\ \sigma & \longrightarrow & \tau_{PQ} \circ \sigma \circ \tau_{PQ}^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe

COROLAIRE 6-3

Deux dilatations σ et σ' ayant respectivement P et Q comme point fixe ont le même rapport d'homothétie si, et seulement si :

$$\sigma' = \tau_{PQ} \circ \sigma \circ \tau_{PQ}^{-1}$$

DEMONSTRATION

1) Si $\sigma' = \tau_{PQ} \circ \sigma \circ \tau_{PQ}^{-1}$

on a : $\sigma' \circ \tau \circ \sigma'^{-1} = (\tau_{PQ} \circ \sigma \circ \tau_{PQ}^{-1}) \circ \tau \circ (\tau_{PQ} \circ \sigma^{-1} \circ \tau_{PQ}^{-1}$

$$= \tau_{PQ} \circ \sigma \circ (\tau_{PQ}^{-1} \circ \tau \circ \tau_{PQ}) \circ \sigma^{-1} \circ \tau_{PQ}^{-1}$$

Comme T est commutatif on a :

$$\sigma' \circ \tau \circ \sigma'^{-1} = \tau_{PQ} \circ (\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}) \circ \tau_{PQ}^{-1}$$

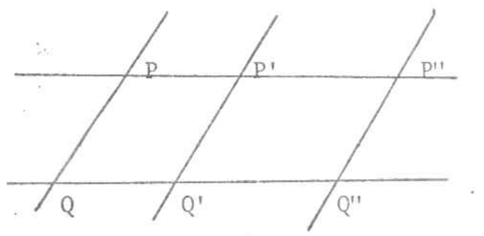
Comme $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in T$ et T commutatif, il suit que

$$\sigma' \circ \tau \circ \sigma'^{-1} = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$$

Ce qui établit que σ et σ' ont le même rapport d'homothétie

2) Supposons que σ et σ' ont même rapport d'homothétie α. Soient P et Q les points fixes pour σ et σ' respectivement d'après 1) $\sigma'' = \tau_{PQ} \circ \sigma \circ \tau_{PQ}^{-1}$ a même rapport d'homothétie que σ et appartient à $\mathcal{H}_Q$. Comme il existe une, et une seule dilatation ayant Q pour point fixe et ayant α pour rapport d'homothétie, on a $\sigma' = \sigma''$

Une dilatation laissant fixe P étant déterminé dès que l'on connait l'image d'un point autre que P, la construction géométrique de l'isomorphisme du corollaire 6-2 est la suivante :



$\sigma(P) = P$; $\sigma(P') = P''$

$\sigma'(Q) = Q$ $\quad \sigma'(Q') = Q''$

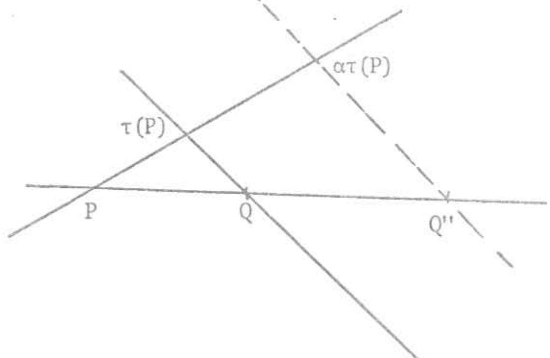
$\tau_{PQ} = \tau_{P'Q'} = \tau_{P''Q''}$

Une translation étant complètement déterminée lorsque l'on connait l'image d'un point, le corollaire 6-3 nous permet de construire géométriquement l'opération externe de k sur l'espace vectoriel T.

Soit $\alpha \in k^*$ tel que $\alpha\tau = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$

σ est définie par $\sigma(P) = P$ et $\sigma(Q) = Q'$

τ est définie par $P \longrightarrow \tau(P)$. On choisit $Q \neq \tau(P)$ ce qui est toujours possible grâce à la configuration de Dehargue.



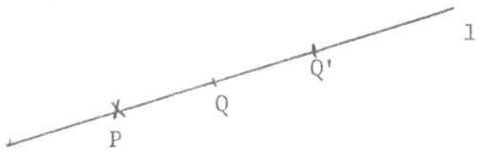
§ 2 INTRODUCTION DES COORDONNEES

PROPOSITION 6-4

Il existe une famille de bijection entre toute droite du plan et le corps k. On appelle une telle bijection une graduation.

DEMONSTRATION

1) Soit P un point d'une droite 1, une dilatation laissant P invariant, est complètement déterminée lorsque l'on connait l'image Q' d'un point Q de 1



autre que P. Il en résulte que pour tout couple de point P, Q distincts de 1, on définit :

$$f_{(P,Q)} : (PQ) - P \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_P \xrightarrow{\sim} k^*$$

$$M \longrightarrow \sigma(P) = P \longrightarrow \tilde{\sigma} \text{ (rapport d'homothétie}$$
$$\sigma(Q) = M \qquad\qquad \text{de } \sigma\text{)}$$

Si on prolonge f_{PQ} en posant : $f_{(P,Q)}(P) = 0$ (0 élément neutre de k).
On définit une bijection de 1 sur k.

PROPOSITION 6-5

Soit 1 une droite, d'ensemble des dilatations laissant globalement invariant, la droite 1 est un groupe.

DEMONSTRATION

1) Soit D_1 cet ensemble. $D_1 \neq \emptyset$ car $1_\pi \in \mathcal{H}_1$.

2) Soit $\sigma_1 \in \mathcal{H}_1$ $\sigma_2 \in \mathcal{H}_1$ alors $\sigma_1 \circ \sigma_2(1) = \sigma_1(1) = 1$ donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in \mathcal{H}_1$

3) Soit $\sigma \in \mathcal{H}_1$ $\sigma^{-1}(1) = 1$ donc $\sigma^{-1} \in \mathcal{H}_1$

Ce qui établit que $\mathcal{H}_1$ est un groupe.

PROPOSITION 6-6

Soit 1 une droite f_1 et f_2 deux graduations, alors il existe un, et un seul élément φ de $\mathcal{H}_1$ vérifiant $f_1 = f_2 \circ \varphi$

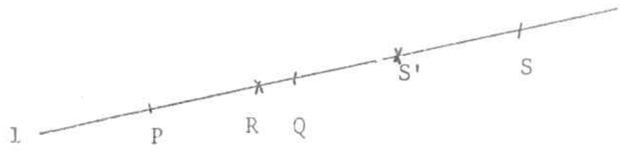
DEMONSTRATION

1) L'unicité de φ est assuré car f_1 est une bijection

2) Avec les notations de la proposition 6-4 on a :

$$f_1 = f_{PQ} \qquad f_2 = f_{RS} \qquad \text{avec P, Q, R, S alignés (éléments de l)}$$

$$P \neq Q \text{ et } R \neq S$$



Soit la translation $\tau = \tau_{PR}$ et $S' = \tau(Q)$ alors $f_{PQ} = f_{RS'} \circ \tau$ (1)

Soit σ la dilatation définie par $\sigma(R) = R \quad \sigma(S) = S'$

on a alors : $\quad f_{RS} = f_{RS'} \circ \sigma \quad$ si $\quad \sigma = (\sigma')^{-1}$

d'où $\quad f_{RS'} = f_{RS} \circ \sigma \qquad (2)$

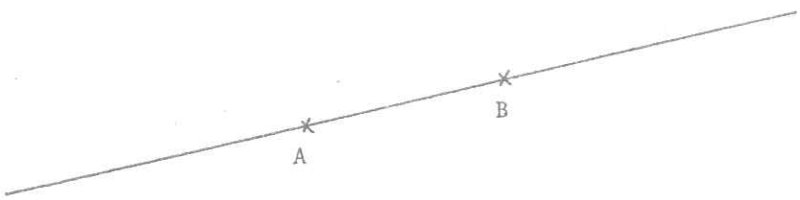
De (1) et (2) on tire

(3) $\quad f_{PQ} = f_{RS} \circ (\sigma \circ \tau)$

$\sigma \circ \tau \in \mathcal{D}_1$

Remarquons que les propositions 6-5 et 6-6 nous indiquent comment passer d'une graduation à une autre. Toutes les graduations sont connues dès qu'on connait l'une d'entre elles.

Remarquons également que c'est la façon dont agit le groupe T des translations qui détermine la famille des graduations que l'on définit sur une droite. C'est pourquoi lorsque dans le plan "physique' nous appelons droite, les configurations "dessinées" à la règle.



Nous définissons comment agit le groupe T sur le plan physique. Il en résulte que les graduations des droites du plan compatible avec cette action, sont ce que certains auteurs appelle les graduations régulières.

COROLLAIRE 6-7

Il existe canoniquement une famille de bijections entre les points d'une droite et l'espace vectoriel des translations ayant cette direction ou identique à 1_π

DEMONSTRATION

On a $f_{PQ} : 1 \longrightarrow k$

Comme τ_{PQ} est une base de l'espace vectoriel des translations qui sont, soit 1_π soit de même direction que 1, on déduit une application

$$f'_{PQ} \quad 1 \longrightarrow T_1$$

où T_1 est le groupe des translations ayant 1 pour trace.

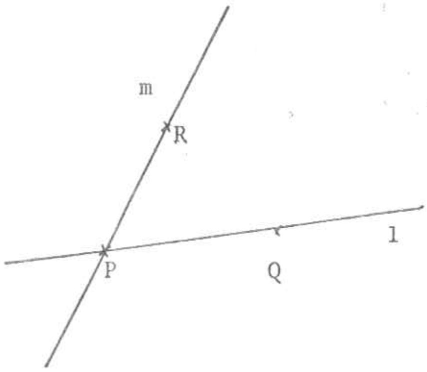
Remarque

La famille $\{f'_{PQ}\}_{P \neq Q,\ P \in 1,\ Q \in 1}$ est totalement déterminée par la connaissance de l'une d'entre elle par la composition avec un élément de D_1

PROPOSITION 6-8

Trois points non alignés définissent une bijection entre π et k^2

DEMONSTRATION



Les points P, Q, R étant non alignés, les droites (PQ) = 1 et m = (PR) ne sont pas parallèles. Les translations $\tau_1 = \tau_{PQ}$ et $\tau_2 = \tau_{PR}$ formant une base de l'espace vectoriel T.

T opèrent simplement et transitivement pour tout point M il existe une, et une seule translation $\tau = \tau_{PM}$ définie par $\tau(P) = M$.

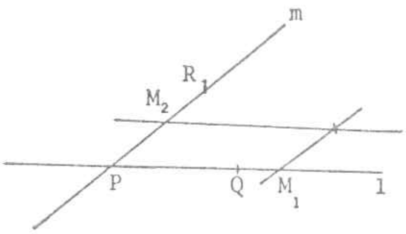
τ_1 et τ_2 étant une base de T il existe un, et un seul couple (α, β) k^2 vérifiant $\tau = (\alpha\tau_1) \circ (\beta\tau_2)$

Réciproquement à tout couple (α, β) k^2 on associe une, et une seule translation $\tau = (\alpha\tau_1) \circ (\beta\tau_2)$ donc un seul point M du plan π définit par $M = \tau(P)$. Ou bien ainsi définie une bijection $f_{(P,Q,R)}$ de π dans k^2

Remarques

1) Les trois points non alignés P, Q, R étant fixés, on sait construire géométriquement les points M et M_2 définit par $\alpha\tau_1(P) = M_1$

$$\alpha\tau_2(P) = M_2$$



en effet par définition

$(M M_1) \mathbin{//} m$ et $(M M_2) \mathbin{//} 1$

2) On a dans le plan accocié à tout triplet (P, Q, R) de points du plan non alignés, une bijection entre π et k^2. On peut alors se poser la question suivante : Etant donné un autre triplet (P', Q', R') existe-t-il une transformation f de π dans π telle que :

$$f_{(P',Q',R')} = f_{(P,Q,R)} \circ f$$

3) La restriction de $f_{(P,Q,R)}$ à la droite (P, Q) (resp à (P,Q)) est $f_{(P,Q)}$ (resp $f_{(P,R)}$)

4) Dans la définition des applications $f_{(PQ)}$ et $f_{(P,Q,R)}$ l'ordre des points est important.

DEFINITION

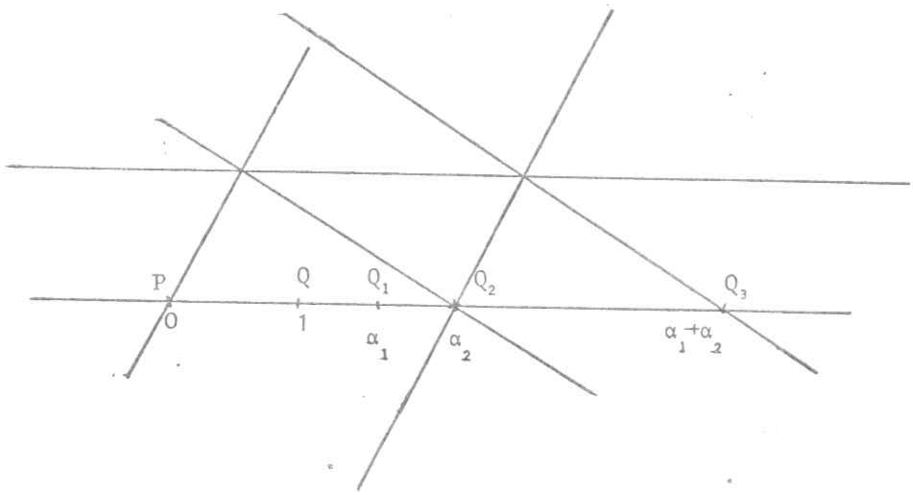
Soient 1 une droite de π on appelle repère cartésien de 1 d'origine P et de vecteur directeur τ_{PQ} un couple de point P et Q. Pour tout point M de 1 on appelle abseisse de M dans le repère cartésien (P, Q) la valeur de $f_{PQ}(M)$

DEFINITION

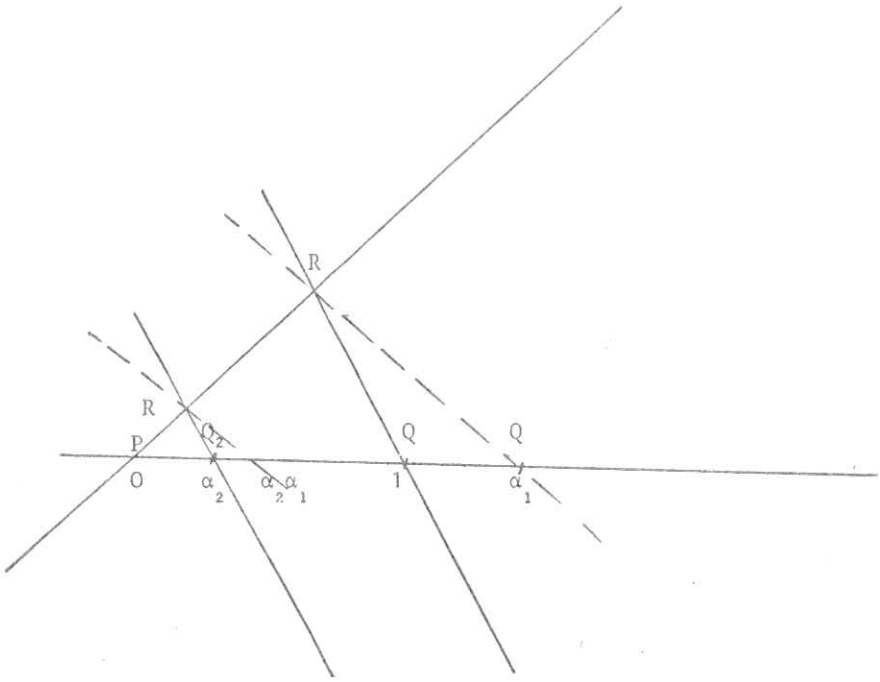
Dans le plan π on appelle repère cartésien de π d'origine P et de vecteurs directeurs τ_{PQ} , τ_{PR} un triplet (P, Q, R) de points non alignés. La valeur de $f_{(P,Q,R)}(M) \in k^2$ s'appelle les coordonnées de π dans le repère cartésien (P, Q, R).

§ 3 CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DES LOIS DU CORPS

Ayant explicite la notion de graduation, il devient très facile de construire à l'aide de parallèle la somme de deux nombres.



De même que l'addition correspond à la composition de deux translations de même direction, la multiplication correspond à la composition de deux dilatations ayant un point fixe donné.



CHAPITRE 7

A PROPOS D'AUTRES INTRODUCTIONS DE LA GEOMETRIE AFFINE PLANE

Le but de ce chapitre est de montrer comment se comportent des systèmes d'axiomes ou des présentations de la géométrie en 4è par rapport à la présentation minimale exposée ici.

§ 1 *BIPOINT - VECTEURS*

Afin d'harmoniser notre présentation de la géométrie par les transformations avec les présentations habituelles, nous allons définir les notions de bipoints, de bipoints équipollents et de vecteurs.

DEFINITION

Etant donné un plan π on appelle bipoint un couple (P, Q) de points de π

DEFINITION

On dit que le bipoint (P, Q) et le bipoint (R, S) sont équipollents, si, et seulement si : $\tau_{PQ} = \tau_{RS}$

Il en résulte que la relation d'équipollence est une relation d'équivalence.

DEFINITION

L'ensemble des bipoints du plan muni de cette relation d'équivalence s'appelle l'ensemble des vecteurs du plan ; on le notera $\vec{\pi}$

Notation

On notera le vecteur dont le bipoint (P, Q) est un représentant $\vec{PQ} = \vec{v}$

PROPOSITION 6-9

L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel sur k isomorphe à l'espace vectoriel des translations T.

DEMONSTRATION

D'après la définition de l'équipollence de deux bipoints l'application :

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \vec{\pi} \\ \tau &\longrightarrow \overrightarrow{P\,\tau(P)} \end{aligned}$$

est bijective.

Cette bijection permet de munir $\vec{\pi}$ d'une structure d'espace vectoriel sur k isomorphe à T.

Remarques

1) On définit une action simplement transitive de $\vec{\pi}$ sur π par :

$$Q = P + \vec{v} \Longleftrightarrow Q = \tau_{PQ}(P) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ}$$

2) On notera $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$ la translation τ_{PQ} : on parlera aussi de la translation $\tau_{\vec{v}}$ définie pour tout $M \in \pi$ par

$$M' = \tau_{\vec{v}}(M) \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

3) On notera additivement de groupe $(\vec{\pi}\ +)$ isomorphe à $(T, \circ)$

Pour terminer ce paragraphe, nous voudrions faire quelques remarques plus profondes.

1) L'axiome de Dehargues 4a n'est rien d'autre que la transitivité de l'équipollence

2) La relation de Chasles ne fait qu'exprimer que $(\vec{\pi}, +)$ agit sur π

3) L'axiome de Dehargues 4b est équivalent au fait que $\vec{\pi}$ est un espace vectoriel (à gauche) sur **k**.

Ces trois remarques ont pour but de montrer :

1) que présentation axiomatique et présentation vectorielle sont en définitive très proche l'une de l'autre

2) que quelque soit la méthode employée, le dessin géométrique doit avoir une place importante dans l'enseignement en 4è et 3è.

Notons enfin que ce paragraphe illustre l'équivalence que nous avons déjà démontré entre les deux définitions d'un plan affine arguésien.

§ 2 *LES AXIOMES DU MILIEU*

Proposés notamment dans l'Académie par Monsieur TAILLE, Inspecteur Pédagogique Régional, les axiomes du milieu insistent comme nous le faisons nous même (voir la progression suivie par Hélène Jouvet) sur la nécessité

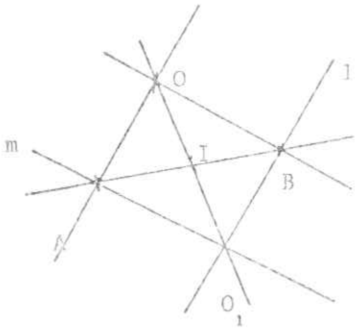
1) de commencer la géométrie dès le début de l'année

2) d'apprendre à faire des constructions.

Compte tenu de l'intérêt et de la nouveauté de cette présentation, il nous a semblé bon de montrer explicitement l'équivalence entre les axiomes du milieu et l'axiome de Dehargues, le cas où k n'est pas de caractéristique 2.

Nous avons donné ici une version constructive et géométrique des axiomes du milieu, mais nous n'avons pas vérifié si ces 3 axiomes sont indépendants.

On suppose que le plan π vérifie en outre les axiomes A_1, A_2, A_3 les 3 axiomes suivants :



$\boxed{M_1}$ Soient A, B deux points distincts, soit O un point non situé sur la droite (A, B), soient l et m les parallèles à (OA), (OB) passant respectivement par B et A. Soit $O_1 = l \cap m$; alors $(O\,O_1) \cap (AB) \neq \emptyset$

$$(OO_1) \cap (AB) = I$$

$\boxed{M_2}$ Avec les notations ci-dessus, si O' est un autre point distinct de O et non aligné avec A et B alors :

$$(O'O'_1) \cap (AB) = (O\,O_1) \cap (AB) = I$$

I s'appelle le milieu de A et de B. Si les points A et B sont confondus, le point I = A = B

$\boxed{M_3}$ Pour toute projection, le milieu des projetés est le projeté du milieu.

PROPOSITION 7-1

Dans un plan vérifiant les axiomes A_1, A_2, A_3 M_1, M_2, M_3 on a le résultat suivant :

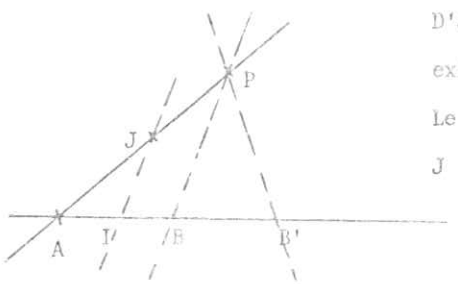
Soient 3 points alignés A, B, B'

(A, B) et (A, B') ont même milieu si, et seulement si B = B'

DEMONSTRATION

Si A = B = B' c'est terminé

Si $B \neq B'$. Soit P un point extérieur à (B B')



D'après M_1, M_2 le milieu J de A et de P existe d'après M_3

Le milieu I de A et de B est le projeté de J sur (B B') dans la direction de (PB)

Le milieu I' de A et de B' est le projeté de J sur $(B\, B')$ dans la direction de $(P\, B')$. Si $(P\, B') \neq (P\, B)$ il en résulte que $I \neq I'$.

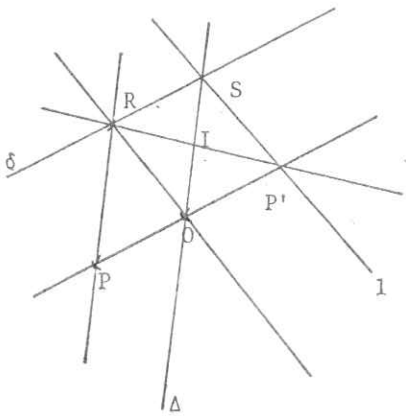
PROPOSITION 7-2

Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 7-1. Si O est un point de π pour tout point P de π il existe un, et un seul point P' tel que O, soit le milieu de P et de P'.

DEMONSTRATION

Si $O = P$ alors d'après M_2 $P' = P$

Si $O \neq P$ la droite $(O\, P)$ existe. Soit $R \notin (O\, P)$. δ est la parallèle à (OP) passant par R.



Δ est la parallèle à (PR) passant par O

$S = \Delta \cap \delta$

Soit 1 la parallèle à (RO) passant par S

$P' = 1 \cap (P\, O)$

$I = (S\, O) \cap (R\, P)$ est d'après M_1 et M_2 le milieu de R et de P' d'après M_3 O est le milieu de P et de P'.

Convention

On parlera dorénavant du milieu des deux points A et B.

DEFINITION

On appelle symétrie de centre O et l'on note s_O l'application de $\pi \longrightarrow \pi$ qui à P associe P' tel que O soit le milieu de (P, P') (π vérifie les axiomes A_1, A_2, A_3 M_1, M_2 M_3)

COROLLAIRE 7-3

Sous les hypothèses sur π de la proposition 7-1, s_O est une dilatation admettant O comme point fixe unique.

PROPOSITION 7-4

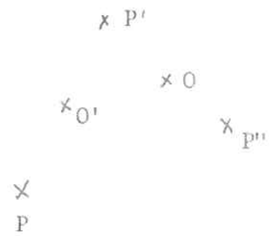
Sous les hypothèses de la proposition 7-1, si O et O' sont deux points distincts de π, $s_O \circ s_{O'}$ est une translation de direction, celle définie par la droite $(O\ O')$

DEMONSTRATION

1) l'ensemble D des dilatations étant un groupe $s_O \circ s_{O'}$ est une dilatation. Cette dilatation est distincte de l'identique, car

$$s_O \circ s_{O'}(O') = s_O(O') \neq O' \text{ car } O' \neq O. \text{ (O est l'unique point fixe de } s_O$$

2) soit P un point autre que O', alors $s_{O'}(P) = P'$ et $P' \neq O'$



O' est le milieu de P'. Soit $P'' = s_O(P')$ alors O est le milieu de $(P\ P'')$. Si $P' \neq O$ d'après M_3 la droite et la proposition 7-1, les droites $(O\ O')$ et $(P\ P'')$ sont parallèles.

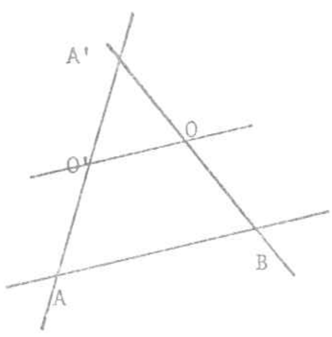
Si $P' = O$ alors $P'' = P'$ et les droites $(P\ P'')$ et $(O\ O')$ sont encore parallèles. Il en résulte que $\tau = s_O \circ s_{O'}$ admet pour traces le faisceau des droites parallèles à la droite $(O\ O')$. Comme $\tau \neq 1_\pi$ τ est une translation de direction, la direction définie par $(O\ O')$

COROLLAIRE 7-5

Si un plan π vérifie les axiomes A_1, A_2, A_3 M_1, M_2, M_3 alors il vérifie les axiomes A_1, A_2, A_3, A_{4a}

DEMONSTRATION

Soit A et B deux points distincts. O' un point non aligné avec A et B $A' = s_{O'}(A)$



Soit O le projeté de O' sur $(A'\ B)$ parallèlement à $(A\ B)$ d'après M_3 $(O\ O')\ //\ (A\ B)$

On a de plus $s_O(A') = B$ d'où $\tau(A) = B$ (*)

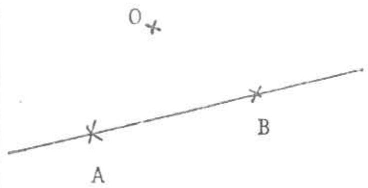
Comme d'après 7-4, τ est une translation et par suite l'axiome A_{4a} est vérifié.

(*) $\tau = s_O \circ s_{O'}$

PROPOSITION 7-6

Si un plan π vérifie les axiomes A_1, A_2, A_3, A_{4a} si son corps d'endomorphisme est de caractéristique 2, il ne vérifié pas l'axiome M_1

DEMONSTRATION



soit $O \notin (A\ B)$. Avec les notations habituelles

$$\tau_{AB} = \tau_{AO} \circ \tau_{OB}$$

Soit $O' = (\tau_{OA} \circ \tau_{OB})\ (O)$

alors $\tau_{OA} \circ \tau_{OB} = \tau_{OO'}$

$$\tau_{OO'} \circ \tau_{AB} = (\tau_{OB})^2$$

si k est de caractéristique 2 $(\tau_{OB})^2 = 1_\pi$ et $(O\ O') \mathbin{//} (A\ B)$ comme $O \notin A\ B$ l'axiome M_1 n'est pas vérifié.

COROLLAIRE 7-7

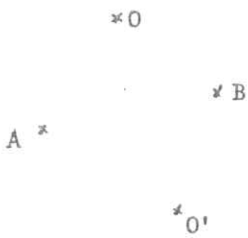
Si un plan π vérifie les axiomes A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, M_3 son corps de base est de caractéristique autre que 2.

Nous allons maintenant montrer que, réciproquement, si la caractéristique du corps $k \neq 2$ alors les axiomes M_1, M_2, M_3 sont vérifiés.

PROPOSITION 7-8

Si un plan π vérifie les axiomes A_1, A_2, A_3, A_{4a} et si la caractéristique de k est différente de 2, alors l'axiome π est vérifié.

DEMONSTRATION



on a $\tau_{OO'} \circ \tau_{AB} = (\tau_{OB})^2$

Comme la caractéristique de k est différente de 2 on a :

$$(\tau_{OB})^2 \neq 1_\pi$$

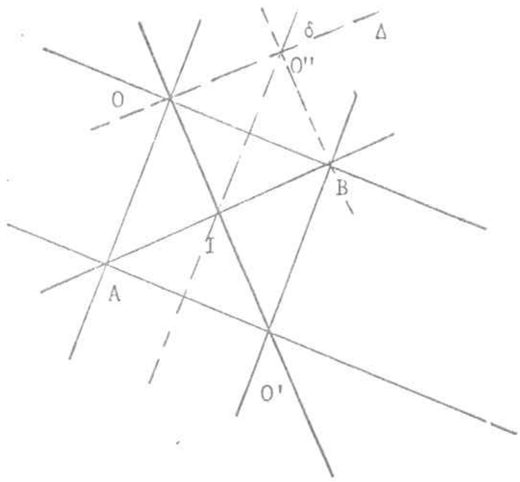
$(\tau_{OB})^2$ est une translation ayant pour direction celle de $(O\ B)$ comme $(A\ B)$ et $(O\ B)$ ont des directions différentes, il en résulte que $(O\ O')$ et $(A\ B)$ ne sont pas parallèles, ce qui établit l'axiome M_1

PROPOSITION 7-9

Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 7-8, l'axiome M_2 est vérifié.

DEMONSTRATION

Reprenons les notations de la démonstration précédente. Soit $I = (O\ O') \cap (A\ B)$



Construisons $\tau_{AI}(I)$. Pour cela, on trace

δ la parallèle à (O A) passant par I

Soit Δ la parallèle à AB passant par O

et $O'' = \delta \cap \Delta$

On a $(O\ O'') // (A\ I)$ et $(O\ B) // (A\ O')$

D'après l'axiome A_{4a} $(O''\ B) // (I\ O')$. C

qui établit que $B = \tau_{AI}(I)$

Il suit que $\tau_{AB} = (\tau_{AI})^2$.

Comme T est un espace vectoriel sur k,

cela montre que I est défini indépendamm

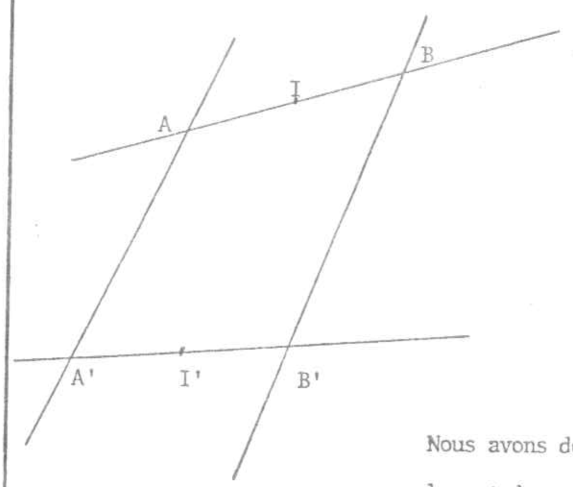
de O. Ce qui établit l'axiome M_2

PROPOSITION 7-10

Sous les mêmes hypothèses que la proposition 7-8, l'axiome M_3 est vérifié.

DEMONSTRATION

Nous allons faire cette démonstration en écriture vectorielle. Soit $A' = p(A)$
$B' = p(B)$ les projetés de A et de B dans une projection de direction donnée sur
une droite donnée. Soit I' le milieu de A' B'



I' étant le milieu de (A' B')

on a :

$$2\ \overrightarrow{I\,I'} = \overrightarrow{I\,A'} + \overrightarrow{I\,B'}$$
$$= \overrightarrow{I\,A} + \overrightarrow{A\,A'} + \overrightarrow{I\,B} + \overrightarrow{B\,B'}$$

Comme I est le milieu de (A B) on a

$\overrightarrow{I\,A}\ \ \overrightarrow{I\,B} = \vec{0}$ d'où : $2\ \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B}$

Ce qui établit que I' est le projeté

de I dans la projection p.

Nous avons donc montrer que : $M_1, M_2, M_3 \Longleftrightarrow A_{4a}$ e

k est de caractéristique différent de 2.

Remarques

1) Dans cette présentation, on se sert en fait des symétries centrale pour engendrer les translations.

2) Avec les axiomes du milieu, nous ne pouvons pas démontrer que l'espace vectoriel des translations est de dimension 2. Nous devons donc admettre ceci comme un axiome. Nous avons déjà démontrer que c'est équivalent à l'axiome 4b.

3) La remarque précédente s'applique également aux progressions n'introduisant que l'axiome 4a (cf le groupe de Monsieur ITARD au centre du Mans ou diverses équipes brestoises).

§ 3 *AXIOME DES DILATATIONS*

L'I.R.E.M. de Strasbourg propose l'axiome suivant

Pour tout quadruplet $(A\ A',\ B\ B')$ du point du plan tel que

$A \neq B$ et $A' \neq B'$

et $(A\ B)\ //\ (A'\ B')$

il existe une dilatation f transformant A en A' et B en B'.

Nous avons déjà montrer que cet axiome est équivalent aux axiomes A_4a et A_4b

CHAPITRE 8

EXEMPLE

§ 1 *LE PLAN A NEUF POINTS*

Si k est un corps , on définit un homomorphisme d'anneau unitaire de $\mathbb{Z}$ dans k en posant :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow k$$
$$n \longmapsto \underbrace{(1 + 1 - . + 1)}_{n \text{ fois}}$$

Si il existe le plus petit entier positif tel que :

$$\underbrace{(1 + 1 + \quad - 1)}_{p \text{ fois}} = 0$$

on dit que le corps k est de caractéristique p.

p est un nombre premier

En effet si $p = p_1 p_2$ on a $\alpha = \underbrace{(1 + \dots 1)}_{p_1 \text{ fois}} \neq o$

et $\beta = \underbrace{(1 + \dots 1)}_{p_2 \text{ fois}}$ et $\alpha\beta = o$ comme k est un corps on en déduit que $\beta = o$ donc $p_2 = p$. d'où p est premier.

Exemple

Les restes de la division par 3 ; $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ muni des deux lois

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

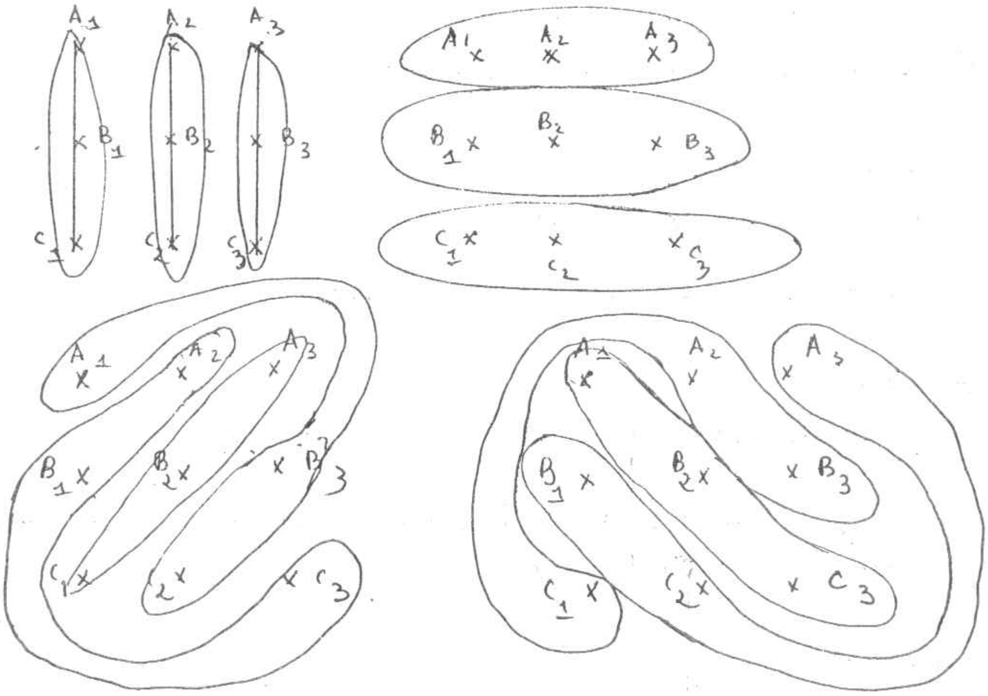
x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

est un corps de caractéristique 3

Sur $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ définissons une droite par une relation

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

où $(x,y) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ non tous nuls.



La figure ci-dessus montre les 4 directions de 3 droites que l'on peut définir :

$\beta = 0$	1ère famille
$\alpha = 0$	2ème famille
$\alpha = \beta \neq 0$	3ème famille
$\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$	4ème famille

On vérifie aisément que muni de ces droites $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ est un plan affine arguésien. Il suffit de remarquer que l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ de dimension 2 sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ opère simplement et transitivement sur lui-même.

§ 2 UN PLAN NON ARGUESIEN, LE PLAN DE MOULTON

Soit $\pi = \mathbb{R}^2$

Définissons 4 familles de sous ensembles de π

1ère famille

$$h_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{H} = \{h_\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des horizontales du plan π

2ème famille

$$v_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = \alpha \ \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{V} = \{v_\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des verticales du plan π

3ème famille

$$l_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \alpha x + \beta \quad \alpha < 0 \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{D}^- = \{l_{\alpha,\beta} \ / \ \alpha < 0 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des droites de π à pente négative. (On appelle pente de $l_{\alpha,\beta}$ définie par $y = x + \beta$ le nombre α)

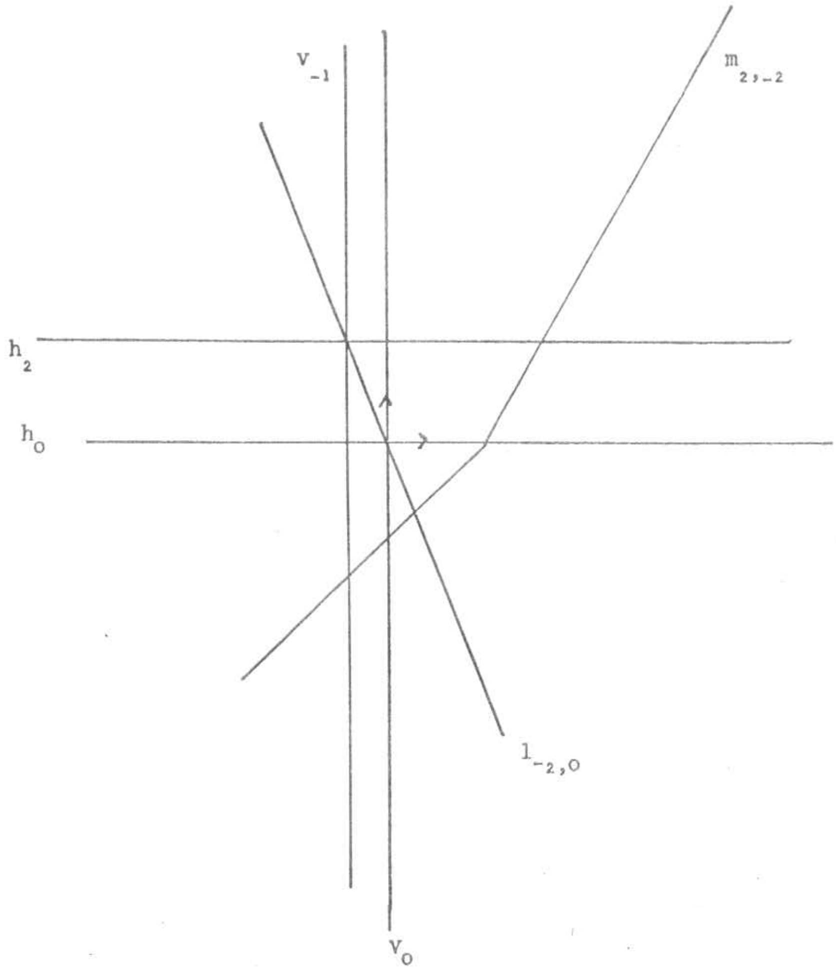
4ème famille

Les 3 premières familles sont des droites du plan affine $\mathbb{R}^2$. Nous allons définir une dernière famille de droite $m_{\alpha,\beta}$ obtenu de la manière suivante.

$$m_{\alpha,\beta} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \begin{array}{l} y = \alpha x + \beta \ \text{ si } \ x \geqslant -\frac{\beta}{\alpha} \\ y = \frac{\alpha}{2} x + \frac{\beta}{2} \ \text{ si } \ x < -\frac{\beta}{\alpha} \\ \alpha > 0 \ \text{ et } \ \beta \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{D}^+ = \{m_{\alpha,\beta} \ / \ \alpha > 0 \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$

Dans un système d'axe orthonormé, le dessin suivant illustre des éléments de chacune des 4 familles précédem[ment] décrite.



Posons $\mathcal{D} = \mathcal{H} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{D}^- \cup \mathcal{D}^+$

Nous allons montrer que $(M, \mathcal{D})$ vérifie les axiomes A_1, A_2, A_3 mais pas l'axiome A_{4a}. Il est clair que l'axiome A_3 est vérifié.

Car pour tout $d \in \mathcal{D}$ $d \neq \pi$

Soit $M_1 = (x_1, y_1)$ $M_2 = (x_2, y_2)$ deux points de π.

Si $y_1 = y_2$ alors M_1 et M_2 déterminent une et une seule droite de $\mathcal{D}$ la droite h_{y_1}

Si $x_1 = x_2$ alors M_1 et M_2 déterminent une et une seule de $\mathcal{D}$ la droite v_{x_1}

Si $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < o$ alors M_1 et M_2 déterminent encore une droite et une seule de $\mathcal{D}$.

Si y_1 et y_2 sont positifs ou nuls tous les deux, (resp négatifs ou nuls) alors M_1 et M_2 déterminent une droite de $\mathcal{D}^+$ et une seule.

Si y_1 et y_2 sont de signes contraires, supposons $y_1 > 0$ et $y_2 < 0$

On a alors a résoudre le système linéaire

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta$$
$$y_2 = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{2}\beta$$

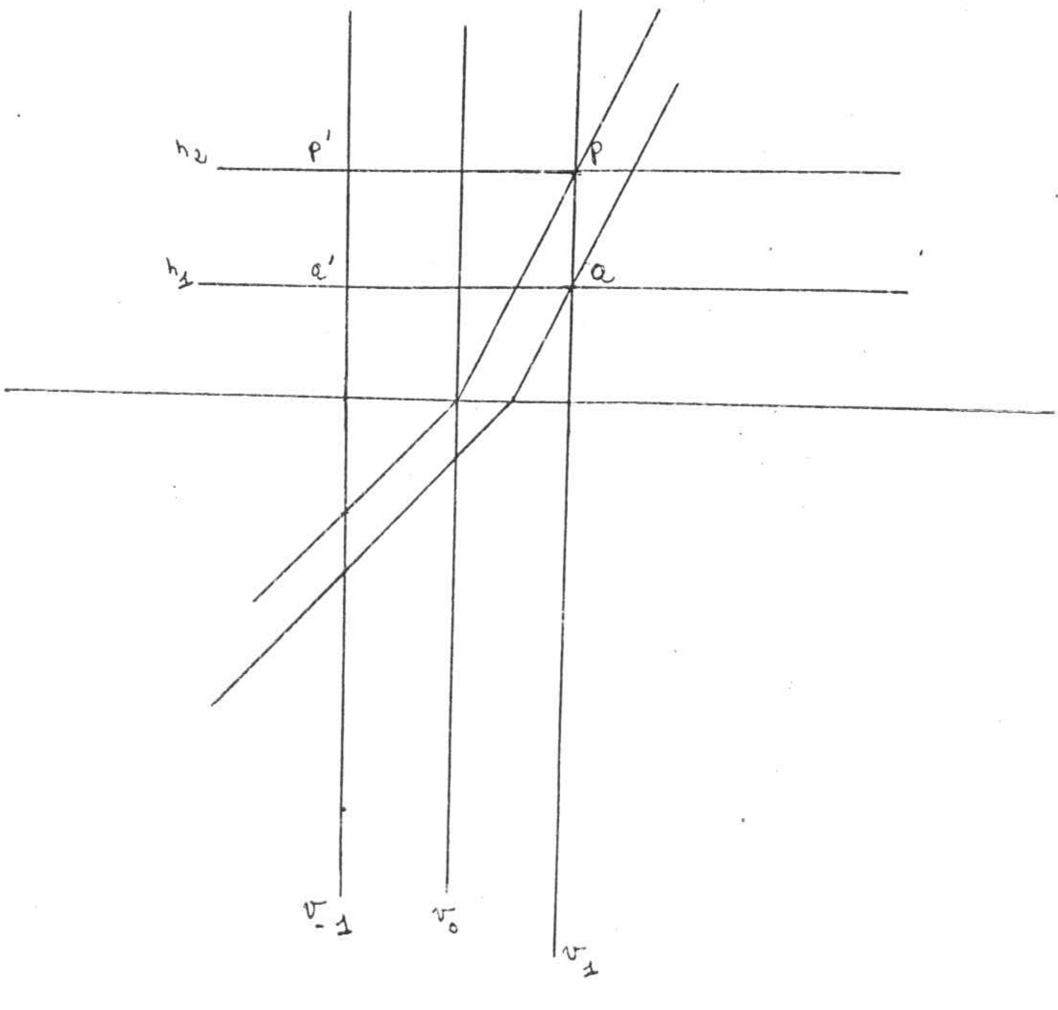
Le déterminant de ce système est $\frac{x_1 - x_2}{2} > 0$

il y a donc une solution et une seule.

$$\alpha = \frac{\frac{y_1}{2} - y_2}{\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}}$$ est positif, ce qui établit que M_1 et M_2 définissent une droite de $\mathcal{D}^+$ et une seule.

Cela nous permet donc de dire que $(\pi, \mathcal{D})$ vérifie l'axiome A_1 :

La vérification de l'axiome A_2 est immédiate. Il nous reste à montrer que l'axiome A_{4a} n'est pas vérifié, ou encore que la configuration de Dehargue est fausse pour $(\pi, \mathcal{D})$.



Considérons les droites parallèles v_1 , v_{-1} , v_0 choisissons sur v_1 , v_{-1} , v_0 respectivement les couples de points (P, Q), (P', Q') , (P", Q") tels que (P' P) = h_2 , (Q', Q) = h_1

(P' P) = $m_{2,0}$ (Q" Q) = $m_{2,1/2}$.

Il en résulte que (P' P") = $1_{-2,0}$ et (Q' Q") $\neq 1_{-2,\frac{1}{2}}$ ce qui établit que (P' P") et (Q' Q") ne sont pas parallèles.

CHAPITRE 9

GEOMETRIE AFFINE REELLE

Dans ce chapitre, nous allons caractériser la géométrie affine réelle.

§ 1 GEOMETRIE EN CARACTERISTIQUE NULLE

On dit que k est de caractéristique 0 si

$$(\forall p \in M - \{o\}) \qquad ((\underbrace{1 + 1 + \quad 1}_{p \text{ fois}}) \neq o)$$

Comme dans un espace vectoriel à gauche sur un corps k

$$\alpha V = o \Longleftrightarrow \alpha = o \text{ ou } v = o$$

on en déduit que

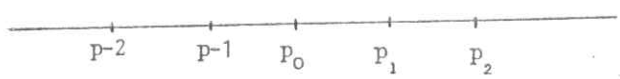
$$\boxed{k \text{ est de caractéristique zéro} \Longleftrightarrow (\forall \tau \in T.\{1_n\}) \ (\forall n \quad M - \{o\}) \ (T^n \neq 1_\pi)}$$

§ 2 UNE PREMIERE MANIERE D'INTRODUIRE $\mathbb{R}$

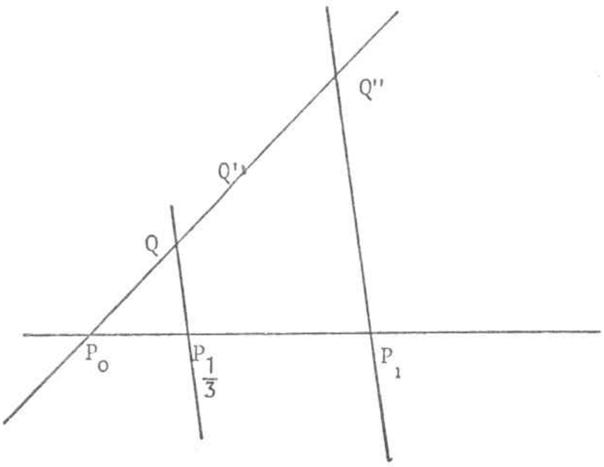
Ajoutons au plan π vérifiant les axiomes A_1 A_2 A_3 A_4

A_5	Pour toute translation τ et tout entier n positif $\tau^n \neq 1_n$

Alors sur toute droite on a alors comme il a été fait pour le corps k dans le chapitre VI une injection (ou plutôt une famille d'injection de $\mathbb{Z}$ dans la droite



Mieux, on sait étendre géométriquement cette injection d'une injection de $\mathbb{D}$ ensemble des décimaux ou plus naturellement en vue injection de $\mathbb{Q}$ dans la droite.



$\tau(P_o) = Q$

$\tau(Q) = Q'$

$\tau(Q') = Q''$

Le fait que T soit un espace vectoriel sur un corps k permet d'être assuré que $P_{\frac{1}{3}}$ ne dépend pas du point intermédiaire Q choisi. En effet, on a $(\tau_{P_o P_{\frac{1}{3}}})^3 = \tau_{P_o P_1}$

On peut alors rattacher la "construction" de R faite en algèbre comme ensemble des suites décimales illimitée (n'admettant pas que des 9 à partir d'un certain rang) en supposant que l'algorithme de la division d'une translation en dix décrit ci-dessus peut se prolonger indéfiniment en définissant une bijection de R avec la droite. On serait tenter de formuler l'axiome suivant :

$\boxed{A_6}$	Toute injection de D dans une droite 1 provenant d'une inclusion canonique de Z dans 1 par l'algorithme de division par 10 d'une translation se transforme en une bijection de $\mathbb{R}$ sur 1 en appliquant une infinité de fois cet algorithme.

Cette introduction de $\mathbb{R}$ a le mérite d'être économique et de coller à l'introduction de $\mathbb{R}$ faite en algèbre.

Il est clair que dès que les translations ont été étudiées, on peut définir la notion de bipoint, équivallent et raisonner sur les vecteurs si l'on préfère la notation additive.

Pour terminer je voudrais développer une introduction de $\mathbb{R}$ faisant intervenir l'ordre sur la géométrie.

Auparavant, je voudrais faire remarquer que lorsqu'on a fixé la façon dont agit le groupe des translations, on n'a plus de liberté pour graduer les droites du plan. L'action de T induit sur chaque droite une structure affine parfaitement déterminée. Le théorème de Thalès établit que les projections sont des bijections affines permettant de passer d'une droite à une autre. Nous fixons la façon dont agit le groupe T dans le plan "physique" en désignant par droite les sous ensembles obtenus avec une règle ou encore en appellant bipoint ce que nous représentons par

La terminologie de graduation "régulière" renferme pas mal d'ambiguïté. Il serait préférable de procéder comme je l'ai fait ici, c'est-à-dire de montrer que canoniquement, on peut définir sur chaque droite une famil de bijection et compte-tenu de la représentation choisie, alors, les graduations en résultant sont "régulières c'est-à-dire compatibles avec l'action du groupe des translations.

§ 3 *CORPS ORDONNES*

DEFINITION

Un corps k est dit ordonné s'il existe un sous-ensemble P d'élément positifs vérifiant :

1) $k = (-P) \cup \{o\} \cup P$
2) $P + P \subset P$
3) $P \,.\, P \subset P$

La relation d'ordre sur k est alors définie par :

$$a \lesssim b \Longleftrightarrow b - a = 0 \quad \text{ou} \quad b - a \quad P$$

$P = \{a \ / \ o < a\}$

On démontre alors que :

$$(\forall c \in k) \ (\forall a \in k) \ (\forall b \in k) \ (a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c)$$
$$(\forall c \in P) \ (\forall a \in k) \ (\forall b \in k) \ (a < b \Longleftrightarrow a c < b c \quad \text{et} \quad c a < c b)$$
$$(\forall c \in -P) \ (\forall a \in k) \ (\forall b \in k) \ (a < b \quad b c < a c \quad \text{et} \quad c b < c a)$$

Il résulte que : $(\forall a \in k) \ (a^2 \in P)$

d'où en particulier $1 \in P$

D'après la condition 2) cela entraine que $n = 1 + \ldots 1 \in P$ Donc que k est de caractéristique zéro. Il suit que $\mathbb{Q}$ est un sous corps de k et que l'ordre induit par k sur Q est l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ a donc un seul ordre compatible avec sa structure de corps c'est l'ordre habituel.

Géométriquement la notion que nous rencontrons naturellement est une relation ternaire du type :

C est entre A et B

Dans le cas d'un ensemble ordonné, nous pouvons définir pour n éléments $a_1 \ldots a_n$ la notion suivante, nous dirons que les éléments $a_1 \ldots a_n$ constituent l'arrangement $(a_1 \ldots a_n)$ si $a_1 < a_2 \ldots < a_n$ ou $a_1 > a_2 \ldots > a_n$

DEFINITION

On dira qu'un corps k est faiblement ordonné si il existe une relation d'ordre total sur k et si :

1) l'application $\begin{array}{l} k \longrightarrow k \\ x \longrightarrow x + a \end{array}$ conserve les arrangements pour tout a

2) l'application $\begin{array}{l} k \longrightarrow k \\ x \longrightarrow xa \end{array}$ conserve les arrangements pour tout a

Si le corps est $Z/2Z$ alors toute bijection conserve les arrangements et le corps peut être faiblement ordonné sans être ordonné. On va démontrer qu'en dehors de ce cas exceptionnel, un corps faiblement ordonné est ordonné.

PROPOSITION 9-1

Si $k \neq Z/2Z$ alors si k est faiblement ordonné, il est ordonné.

DEMONSTRATION

1) Soit 0, a, b 3 éléments, les arrangements possibles sont $(0, a, b)$ ou $(a, 0, b)$

Si k est de caractéristique 2 dans le premier cas on obtient les arrangements

$(a, 0, a + b)$ en ajoutant a

$(b, a + b, 0)$ en ajoutant b qui est encore l'arrangement $(0, a + b, b)$ ce qui nous conduit à l'arrangement $(a, 0, a + b, b)$ ce qui contredit l'arrangement $(0, a, b)$

De même, en partant de l'arrangement $(a, 0, b)$ on obtient les arrangements $(0, a, a + b)$ et $(a + b)$ $b, 0)$ qui conduit à l'arrangement $(0, a, b)$ ou $(0, b, a)$ ce qui contredit l'arrangement initial.

Il suit que k n'est pas de caractéristique 2.

2) k n'étant pas de caractéristique 2 pour $a \in k^*$, $\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$ sont distincts et distincts de 0.

Si on a l'arrangement

$(-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$ on a alors $(0, \frac{a}{2}, a)$ en additionnant $\frac{a}{2}$

on a alors $(-a, \frac{a}{2}, 0)$ en additionnant $-\frac{a}{2}$

d'où $(-a, 0, a)$ en ajoutant a on a l'arrangement $(0, a, 2a)$. Si on a l'arrangement $(0, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ on obtient $(\frac{a}{2}, a, 0)$ et $(-\frac{a}{2}, 0, -a)$ d'où encore l'arrangement $(a, o, -a)$ qui conduit à $(2a, a, 0) = (0, a, 2a)$.

3) Montrons que si on a l'arrangement $(0, a, b)$ alors $a + b$ est du même côté que a et b par rapport à zéro, on a : $(0, 2a, a + b)$.

d'où $a + b$ est du même côté que a et b par rapport à zéro.

4) Désignons par P l'ensemble des éléments sui sont du même côté que 1 par rapport à zéro.

On a alors $k = -P \cup \{o\} \cup P$

On a en effet pour $a \in k^*$ l'arrangement $(-a, 0, a)$

De plus si a, b P on a d'après 3) $a + b \in P$. Enfin si $a, b \in P$ on a $(0, 1, b)$ ou $(0, b, 1)$ en multipliant par a on a $(0, a, ab)$ ou $(0, ab, a)$ comme on a aussi $(0, 1, a)$ ou $(0, a, 1)$ dans tous les cas on a $(0, 1, ab)$ ou $(a, ab, 1)$ ce qui établit que k est un corps ordonné.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons caractériser une classe particulière de corps ordonné : les corps archimédiens.

DEFINITION

Un corps ordonné est dit archimédien si pour tout $a \in k$ on peut trouver un entier n tel que $a < n$. (On entend par entier $n = n.1 = 1 + 1 \ldots +1$)

Soit k un corps archimédien a k. Il existe deux entiers m et n vérifiant $-a < m$ et $a < n$ ce qui établit que $-m < a < n$.

$\mathbb{Q}$ est inclus dans k et est muni comme on l'a déjà vu de son ordre naturel.

Soit $C = \{r \in \mathbb{Q} \;/\; r > a\}$ $\qquad n \in C$

$\qquad D = \{r \in \mathbb{Q} \;/\; r < a\}$ $\qquad -m \in D$

C et D sont donc non vide et définissent une coupure de Dédékind sur $\mathbb{Q}$. Cette coupure définie un nombre réel $f(a)$

On définit ainsi une application $\quad f : k \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a \longrightarrow f(a)$$

Nous allons montrer que f est strictement croissante de k dans $\mathbb{R}$ muni de son ordre naturel.

Si $b > a$ alors il existe un entier m : $m > (b-a)^{-1}$

comme $b - a > 0$ on en déduit $m\,b - m\,a > 1$

Soit n le plus petit entier tel que $n > m\,a$. On a alors : $m\,a \geqslant n - 1 > n - (m\,b - m\,a) = n - m\,b + m\,a$

d'où $0 > n - m\,b$ ce qui entraine : $m\,b > n > m\,a$

comme $m > 0$ on a $b > \frac{n}{m} > a$

Il suit de cette double inégalité que $f(b) > f(a)$ (pour l'ordre naturel de $\mathbb{R}$). Ce qui établit que f est une application strictement croissante donc injective de k dans R.

D'après la construction de Dédékind de $\mathbb{R}$, est homomorphisme de corps et l'on a le théorème suivant :

THEOREME 9-2

Tout corps archimédien est isomorphe à un sous corps du corps des nombres réels muni de son ordre naturel.

Pour terminer, montrons que la seule structure de corps ordonnée de $(\mathbb{R} + .)$ est sa structure naturelle. En effet soit α un ordre faisant de $(\mathbb{R}, +, .)$ un corps ordonné.

Si $0 \,\alpha\, a$ alors a est α - positif donc $(-a)$ n'est pas un carré car tous les carrés sont α- positifs. Comme $-a$ n'est pas un carré, il suit que $0 < a$ donc a est positif (au sens naturel).

Si $0 < a$ alors a est positif (au sens naturel) c'est donc un carré donc il est α - positif.

L'ensemble des éléments positifs est identique à l'ensemble des éléments α- positifs ce qui établit que la relation $<$ et la relation α sont identiques.

PROPOSITION 9-3

$(\mathbb{R}, +, .)$ n'a qu'une seule structure de corps ordonné : sa structure naturelle $(\mathbb{R}, +, . , <)$

On déduit de ceci que tout automorphisme de corps de $(R, +, .)$ est une application croissante.
En effet, un automorphisme transforme les carrés en carrés. Compte tenu de $\sigma(1) = 1$ il suit que $\sigma/Q = 1_Q$
D'autre part, un nombre réel est déterminé par une coupure de Dédékind, comme conserve les inégalités en laissant fixe les nombres rationnels, $\sigma(a)$ est déterminé par la même coupure que a ; donc $\sigma(a) = a$ ce qui établit la proposition suivante.

PROPOSITION 9-4

Le seul automorphisme de $(R, +, .)$ est l'identité

En conclusion de ce paragraphe on peut dire que $(R, +, ., <)$ est ses sous corps constituent à isomorphisme près la catégorie des corps archimédien. A isomorphisme près tous les corps archimédien sont compris (au sens de l'inclusion) entre Q et R.

§ 4 *GEOMETRIE ORDONNEE*

Considérons un plan affine arguesien différent du plan a 4 points.

On dira que le plan est ordonné si :

1) l'ensemble des points de chaque droite est totalement ordonné
2) la projection parallèle des points d'une droite sur les points d'une autre droite conserve ou inverse l'ordre.

On va montrer qu'un ordre sur le plan induit un ordre faible sur le corps k des endomorphismes de T ; et que réciproquement un ordre faible sur le corps k induit un ordre sur le plan affine associé.

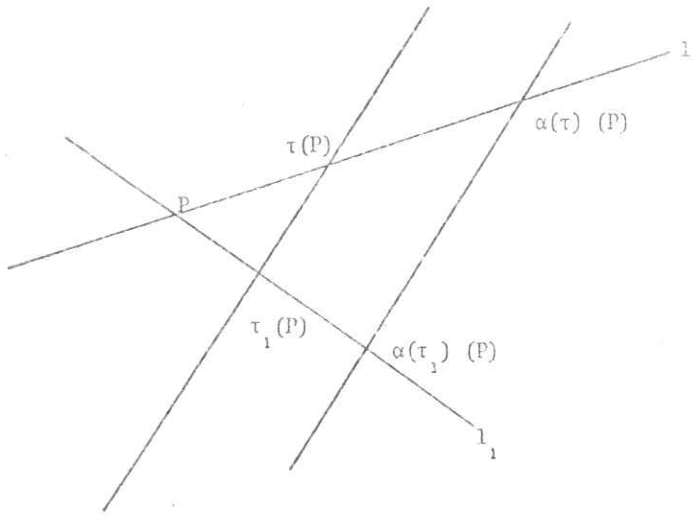
Soit 1 une droite P un point de 1, τ une translation dont 1 est une trace.

On a une bijection $\tilde{P} : 1 \longrightarrow k$

$$M \longmapsto \alpha$$

α étant défini par : $\alpha(\tau) = \tau_{PM}$

Cette bijection induit sur k un ordre ; il faut montrer que cet ordre est indépendant de P et de τ et que c'est un ordre faible sur le corps k.



Soit τ_1 une translation de direction autre que la direction de τ. Alors il existe une dilatation unique σ_α vérifiant

$$\sigma_\alpha(P) = P$$

$$\sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1} = \alpha(\tau)$$

$$\sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1} = \alpha(\tau_1)$$

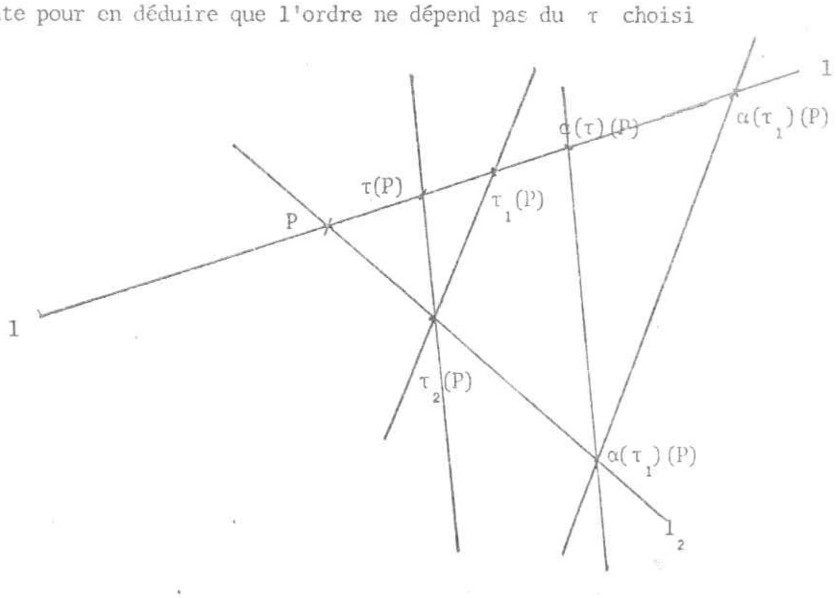
$$\alpha(\tau)\ (P) = \sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1}\ (P) = \sigma_\alpha(\tau(P)) = \alpha(\tau_1)\ (P) = \sigma_\alpha \tau_1 \sigma_\alpha^{-1}\ (P) = \sigma_\alpha(\tau_1(P))$$

Ceci entraine que $(\tau(P)\tau_1(P)) \,//\, (\alpha(\tau)\ (P)\ \alpha(\tau_1)\ (P))$

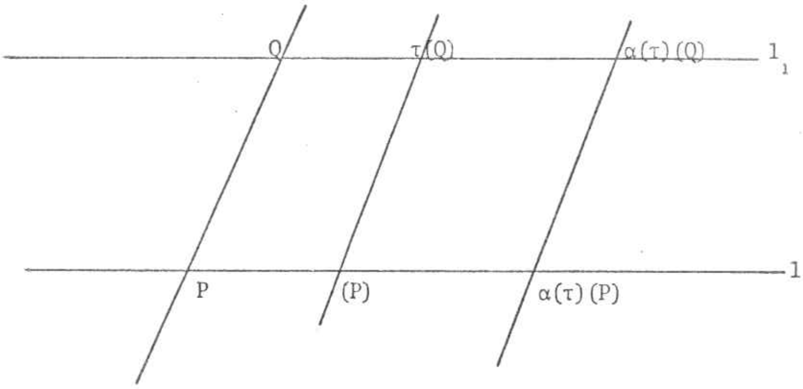
Ce qui veut dire que $\alpha(\tau_1)\ (P)$ est la projection sur 1_1 de $\alpha(\tau)\ (P)$ parallèlement à $(\tau(P), \tau_1(P))$

Ce qui établit que l'ordre induit sur k par P et τ celui induit par P et τ_1 sont indentiques ou inverses l'un de l'autre, lorsque τ_1 et τ_2 n'ont pas même direction.

Lorsque τ_1 et τ_2 ont même direction, il suffit de les comparer à une translation τ_3 ayant une direction différente pour en déduire que l'ordre ne dépend pas du τ choisi



Montrons que l'ordre est indépendant du point P. Soit Q un point autre que P, soit τ une translation ayant une direction différente de celle de $\overset{\tau}{PQ}$



On a alors $(\alpha(\tau)\ (Q)\ \ \alpha(\tau)\ P)\ //\ (PQ)$ ce qui établit que $\alpha(\tau)\ (Q)$ est l'image de $\alpha(\tau)\ (P)$ par la projection de direction $(P\ Q)$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

> PROPOSITION 9-5
>
> Un ordre sur un plan arguesien définit canoniquement (à inversion près) un ordre sur le corps k.

Il reste à prouver que muni de cet ordre k est un corps faiblement ordonné.

Considérons un élément δ du corps k ; soit l'ordre induit par P et τ ; l'ordre induit par P et $\delta(\tau)$ est identique ou opposé.

Pour α k on a : $\alpha(\tau)\ o\ \delta(\tau) = (\alpha + \delta)\tau$

Il en résulte que l'application $\begin{array}{l} k \longrightarrow k \\ x \longrightarrow x + \delta \end{array}$

conserve ou inverse l'ordre.

De même considérons $\alpha.\delta(\tau) = (\alpha o \delta)\ (\tau)$

On a : $\alpha.\delta(\tau)\ (P) = \alpha(\delta(\tau)\ (P)$

ce qui établit que l'application $\begin{array}{l} k \longrightarrow k \\ x \longrightarrow x\delta \end{array}$

conserve ou inverse l'ordre. Il en résulte que :

PROPOSITION 9-6

Un ordre sur un plan affine définit canoniquement un ordre faible sur le corps k

D'après une proposition du paragraphe précédent et compte tenu que nous avons éliminé le plan à 4 points, nous pouvons affirmer que le corps k est un corps ordonné donc de caractéristique 0.

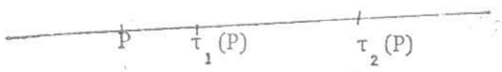
Il nous suffit pour terminer de montrer que réciproquement, si l'on a un corps faiblement ordonné, le plan affine associé est ordonné. La démonstration est semblable à la précédente et l'on peut affirmer.

PROPOSITION 9-7

Un ordre sur le corps k induit canoniquement un ordre sur le plan π

Remarquons que l'existence d'un ordre sur le plan permet d'assurer que la caractéristique de k est zéro. On dira que l'ordre sur le plan est archimédien si la propriété suivante est vérifiée.

Si $\tau_1 \neq 1_\pi$ et $\tau_2 \neq 1_\pi$ sont deux translations de même direction, et si un point P n'est pas situé entre $\tau_1(P)$ et $\tau_2(P)$ alors il existe un entier $n > 0$ tel que $\tau_2(P)$ soit situé entre P et $\tau_1^n(P)$



Sur le corps k cela signifie que, orienté par P et τ_1 on a $\alpha(\tau_1) = \tau_2$ et $0 < 1 < a$ Ce qui établit que $\alpha > 0$. De plus, dire qu'il existe n tel que $\tau_2(P)$ suit situé entre P et $\tau_1^n(P)$ signifie que sur k on a : $0 < a < n$

Ce qui établit que le corps k est archimédien. D'après les démonstrations du paragraphe précédent, on peut conclure cette étude par le Théorème suivant :

THEOREME 9-8

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une géométrie ordonnée provienne d'un corps k isomorphe à un sous corps du corps des nombres réels (porteur de son ordre naturel) est l'axiome d'archimède.

L'axiome des segments emboités au tout autre traduisant la complétion nous assure que le corps k est à isomorphisme près le corps des réels.

CHAPITRE 10

LA DROITE AFFINE
LE THEOREME DE THALES

§ 1 *DROITE AFFINE*

DEFINITION

On appelle droite affine sur un corps K un espace affine de dimension 1 sur le corps K.

PROPOSITION 10-1

Si π est un plan affine arguésien, toute droite de π est une droite affine sur k

DEMONSTRATION

Avec les notations de chapitre VI § 2 ; T_1 est un espace vectoriel de dimension 1 sur k et (T_1, o) agit simplement et transitivement sur l. Ce qui établit que l est une droite affine sur k.

§ 2 *RECHERCHE D'UN INVARIANT NUMERIQUE AFFINE*

Reprenons les notations du chapitre VI. Soit f_{PQ} une graduation sur une droite l. Par définition :

$$f_{PQ}(A) = \alpha \Longleftrightarrow \vec{PA} = \alpha.\vec{PQ}$$

Il en résulte que :

$$f_{PQ}(B) - f_{PQ}(A) = \alpha \Longleftrightarrow \vec{AB} = \alpha \vec{PQ}$$

Soit $f_{P'Q'}$ une autre graduation de l on a :

$$f_{P'Q'}(B) - f_{P'Q'}(A) = \alpha' \Longleftrightarrow \vec{AB} = \alpha' \vec{P'Q'}$$

Il existe un, et un seul $\gamma \in k^*$ vérifiant $\vec{P'Q'} = \gamma \vec{PQ}$

Comme $\vec{\pi}$ est un espace vectoriel, il en résulte que : $\alpha'\gamma = \alpha$

γ est indépendant des points A et B ; γ ne dépend que des graduations $f_{P'Q'}$ et f_{PQ}

Considérons maintenant 3 points distincts A, B, C sur une droite l, on a d'après ce qui précède la proposition suivante :

PROPOSITION 10-2

Soient A, B, C 3 points distincts de 1 alors le rapport

$$\frac{f_{PQ}(B) - f_{PQ}(A)}{f_{PQ}(C) - f_{PQ}(A)}$$

est indépendant de la graduation f_{PQ} choisi.

Notations

On notera $\overline{AB}^{(PQ)} = f_{PQ}(B) - f_{PQ}(A)$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le repère, on notera plus simplement $\overline{AB}$.

Avec cette convention, la proposition 10-2 énonce le fait que si A, B, C sont des points distincts. alors $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est indépendant de la graduation choisie sur 1.

Remarques

1) Si $B = C$ mais $A \neq B$ le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 1$ ne dépend pas de la graduation choisie.

2) Si $A = B$ mais $C \neq A$ le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = o$ ne dépend pas de la graduation choisie.

3) Si $A = C$ mais $B \neq A$ alors $\overline{AC} = o$ quelque soit la graduation choisie et $\overline{AB} \neq o$. On peut alors convenir que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \infty$ $(\infty \notin k)$

Définissons $\overline{k} = k \cup \{\infty\}$

Soit P, Q deux points distincts de 1 ; d'après la proposition 10-2

$$b_{P,Q} : 1 \longrightarrow \overline{k}$$
$$M \longrightarrow \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$$

ne dépend que des points P et Q et non pas de la graduation. Nous pouvons nous poser la question si cette application est injective ou surjective, c'est l'objet du paragraphe suivant.

§ 3 *DIVISION HARMONIQUE*

D'après la définition de $b_{P,Q}$ si $\frac{\overline{PM}}{\overline{QM}} = \alpha$ $\alpha \in k$

alors $\vec{PM} = \alpha\vec{QM} = \alpha\vec{QP} + \alpha\vec{PM}$ d'où $(1 - \alpha)\vec{PM} = - \alpha\vec{PQ}$

si $\alpha \neq 1$ alors :
$$\vec{PM} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\vec{PQ}$$

ce qui détermine complètement M. Nous venons d'établir

1) $b_{P,Q}$ est injective

2) si $\alpha \neq 1$ alors il existe un point M et un seul de 1 vérifiant $\alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$

Remarques

Appellons point à l'infini de 1 un point $\Omega \notin 1$. Soit $\bar{1} = 1 \cup \{\Omega\}$

Prolongeons $b_{P,Q}$ en une application de $\bar{1} \longrightarrow \bar{k}$ en posant $\bar{b}_{P,Q}(\Omega) = 1$

on a ainsi définit une bijection de $\bar{1}$ dans $\bar{k}$. Cette bijection est déterminé par le triple (P, Q, Ω)

Supposons maintenant que k n'est pas de caractéristique 2 alors $\alpha \neq -\alpha$ pour tout élément $\alpha \in k^*$.
Il en résulte de ce qui précède que P, Q étant deux points distincts de 1 si $\alpha \neq 1$, il existe deux points R et S parfaitement définis tels que :

$$b_{PQ}(R) = \alpha \qquad b_{PQ}(S) = \alpha$$

On dit que (A, B, R, S) forment une division harmonique.

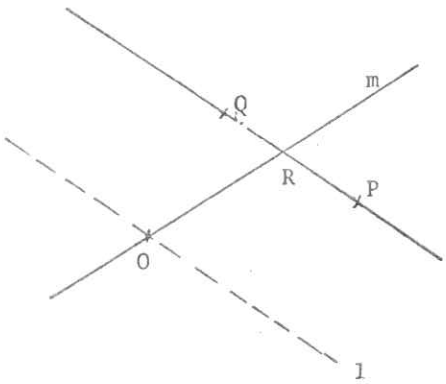
Si $\alpha = 1$ il existe un point et un seul I, tel que $b_{PQ}(I) = -1$

I est le milieu de A et de B

On dira encore que sur 1 (A, B, Ω, I) forment une division harmonique.

§ 3 BARYCENTRE DE DEUX POINTS

Soient P et Q deux points distincts de π. Soit O un point n'appartenant pas à (PQ)



Soit 1 la parallèle à (PQ) passant par O.

On appelle $\mathcal{F}_O$ le faisceau des droites passant par O.

Si $m \in \mathcal{F}_O - \{1\}$ alors $R = (QP) \cap m$.

On définit ainsi une application bijective de $\mathcal{F}_O - \{1\}$ sur (PQ).

Dans le repère cartésien (O, P, Q) la droite 1 a pour équation :

$$x + y = 0$$

La droite (PQ) a pour équation $\qquad x + y = 1$

Soit m une droite de $\mathcal{F}_O - \{1\}$ m est défini par le vecteur directeur :

$$\alpha\, \overrightarrow{OP} + \beta\, \overrightarrow{OQ} \quad \alpha \in k \quad \beta \in k \quad \alpha + \beta \neq 0$$

Dans ce repère R a pour coordonnées : $\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$

Considérons un point O' autre que O alors :

$$\alpha\, \overrightarrow{O'P} + \beta \overrightarrow{O'Q} = (\alpha+\beta)\, \overrightarrow{O'O} + \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ}$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, \overrightarrow{O'P} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\, \overrightarrow{O'Q} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{O'R}$$

Remarquons :

1) que O' peut appartenir à la droite (PQ)

2) que si $O' \notin (PQ)$ alors dans le repère (O', P, Q) R a encore comme coordonnés $\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$

Ces remarques nous permettent de poser la définition suivante :

> DEFINITION
>
> Soient P et Q deux points distincts α, β deux éléments de k vérifiant $\alpha + \beta \neq 0$ alors R (avec les notations ci-dessus) est le barycentre des points P et Q affectes respectivement des masses α , β

D'après la bijection entre $\mathcal{F}_0 - \{1\}$ et (PQ) et la bijection définie par le repère carténien (O, Q, P entre k^2 et π la définition suivante a un sens :

> DEFINITION
>
> Soient P et Q deux points distincts P, Q est repère affine sur la droite (PQ). Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in k^2$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$
> Il existe un point R et un seul de (PQ) tel que R soit le barycentre de P et Q affectés des coéfficients α et β respectivement. Le couple (α, β) s'appelle les coordonnés barycentriques de R dans le repère (P, Q)

Remarques

1) Si $(\alpha, 1 - \alpha)$ sont les coordonnés barycentriques de R dans le repère affine (P, Q) alors :

$$\vec{PR} = (1 - \alpha)\ \vec{PQ}$$

d'où $(1 - \alpha)$ est l'abscisse de R dans repère cartésien (P, Q) d'origine P et de vecteur directeur $\vec{PQ}$

Réciproquement si β est l'abscisse de R dans le repère cartésien (P, Q) alors $(1 - \beta, \beta)$ sont les coordonnées barycentriques de R dans le repère affines (P, Q)

2) Si on a $\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \alpha$ alors l'abscisse de R dans le repère cartésien (P, Q) est $\frac{\alpha}{\alpha - 1}$ et les coordonnées barycentriques de R dans le repère affine (P, Q) $\left(\frac{-1}{\alpha - 1}, \frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$

3) Si $\alpha + \beta = o$ alors $\alpha\vec{OP} + \beta\vec{OQ}$ est un vecteur de $\vec{\pi}$ indépendant de O.

§ 4 *THEOREME DE THALES*

Il peut s'énoncer ainsi les projections d'une droite sur une autre parallèlement à une direction donnée conserve les barycentres et l'invariant numériques du chapitre 2.

Nous ne ferons pas ici la démonstration ; elle suit pas à pas celle faite pour démontrer que le milieu des projetés est le projeté du milieu.

CHAPITRE 11

COMPLEMENTS

Le présent chapitre est rédigé dans le cadre d'un espace affine quelconque sur un corps k commutatif.

Un espace affine (de dimension n) sur un corps k est un triple $(X, \vec{X}, +)$ où :

1) $\vec{X}$ est un espace vectoriel (de dimension n) sur k

2) $+$ est une action simplement transitive de $(\vec{X}, +)$ sur X.

Si $\vec{V}$ est un sous espace vectoriel de X on appelle sous variété affine de direction $\vec{V}$ passant par $a \in X$ l'ensemble des points défini par $V_a = a + \vec{V}$

Si $(X, \vec{X}, +)$ et $(Y, \vec{Y}, +)$ sont deux espaces affines sur le corps k, f est une application affine si, et seulement si, $\vec{f}$ définit par :

$$\vec{f}(\vec{ax}) = \overrightarrow{f(a)\, f(x)}$$

est une application linéaire de $\vec{X}$ dans $\vec{Y}$.

Ce complément est issu, non du travail des groupes IREM, mais de compléments de cours fait aux étudiants préparant l'écrit du CAPES en 1975-1976. Dans le cadre du groupe IREM, ces résultats avaient été établis seulement en dimension 2.

§ 1 *CALCUL BARYCENTRIQUE*

1-1 BARYCENTRE DE DEUX POINTS

Soient $(X, \vec{X}, +)$ un espace affine sur un corps k, x, y deux points distincts de X, α, β deux éléments de $k^* = k - \{o\}$.

Si a et b sont deux points de X, on a :

$$\alpha\, \vec{ax} + \beta\, \vec{ay} = \alpha\, \vec{ab} + \alpha\, \vec{bx} + \beta\, \vec{ab} + \beta\, \vec{by}$$
$$= (\alpha + \beta)\, \vec{ab} + \alpha\, \vec{bx} + \beta\, \vec{by}$$

- Si $\alpha + \beta = o$ alors le vecteur $\alpha\, \vec{ax} + \beta\, \vec{ay}$ est indépendant du point a. On pose par définition :

$$1) \quad \boxed{\text{Si } \alpha + \beta = o \qquad \alpha\, x + \beta\, y = \alpha\, \vec{ax} + \beta\, \vec{ay} \in \vec{X}}$$

- Si $\alpha + \beta \neq o$ on a alors

$$a + \frac{\alpha\, \vec{ax} + \beta\, \vec{ay}}{\alpha + \beta} = b + \frac{\alpha\, \vec{bx} + \beta\, \vec{by}}{\alpha + \beta}$$

on a donc défini un point $z \in X$ indépendant de a. On pose par définition :

$$2) \quad \boxed{\text{Si } \alpha + \beta \neq o \qquad \frac{\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}}{\alpha + \beta} = a + \frac{\alpha\, \vec{ax} + \beta\, \vec{ay}}{\alpha + \beta} \in X}$$

Ce point s'appelle le barycentre de x et y affectés des coëfficients α et β .

1-2 L'ESPACE VECTORIEL $\hat{X} = \vec{X} \cup (k^* \times X)$

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu intervenir des éléments de $\vec{X}$ et des couples appartenant à $k^* \times X$. Par convention, on identifiera $(1, x)$ et x.

L'ensemble $\mathcal{A}(X, \vec{X})$ des applications de X dans $\vec{X}$ est un espace vectoriel sur k.

LEMME 1

L'application $\varphi : \hat{X} \longmapsto \mathcal{A}(X, \vec{X})$

$$\vec{X} \ni \vec{v} \longmapsto (\forall y \in X \quad y \longmapsto \vec{v})$$

$$k^* \times X \ni (\alpha, x) \longmapsto (\forall y \in X \quad y \longmapsto \alpha\, \vec{xy})$$

est injective.

DEMONSTRATION

1) $\varphi|\vec{X}$ est injective et $\varphi(\vec{X}) \cap \varphi(k^* \times X) = \emptyset$

2) Soient α, β deux éléments de k^*, x, z deux points de X, si

$$(\forall y \in X) \qquad \alpha\, \vec{xy} = \beta\, \vec{zy}$$

on a pour $y = x$ $\quad \vec{o} = \beta\, \vec{zx}$ $\quad$ comme $\beta \neq o$

cela entraine $\vec{zx} = o$ donc $z = x$.

LEMME 2

$\varphi(\hat{X})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(X, \vec{X})$

DEMONSTRATION

1) $\varphi(\hat{X}) \neq \emptyset$

2) $\varphi(\hat{X})$ est stable pour la loi externe

3) $\varphi(\vec{X})$ est stable pour la loi addition

4) $[\varphi(\vec{v}) + \varphi(\alpha x)](y) = \alpha\, \vec{xy} + \vec{v}$

mais il existe un unique $x_1 \in X$ vérifiant $\alpha\, \overrightarrow{x\, x_1} = \vec{v}$

d'où : $\alpha\, \vec{xy} + \vec{v} = \alpha(\vec{x_1 x} + \vec{xy}) = \alpha \vec{x_1 y} = \varphi(\alpha, x_1)$

5) $[\varphi(\alpha\, x) + \varphi(\beta\, y)](t) = \alpha\, \vec{xt} + \beta\, \vec{yt} = (\alpha + \beta)\vec{yt} + \alpha\, \vec{xy}$

si $\alpha + \beta = o$ on a :

$$[\varphi(\alpha\, x) + \varphi(\beta\, y)](t) = \alpha\, \vec{xy} = \varphi(\alpha\, \vec{xy})(t)$$

si $\alpha + \beta \neq o$

$$[\varphi(\alpha\, x) + \varphi(\beta\, y)]\,(t) = \varphi(\alpha + \beta, y)(t) + \varphi(\alpha\, \vec{xy})(t)$$
$$= \varphi(\alpha + \beta, z)$$

où z est le barycentre des points x et y affectés des coéfficients α et β.

PROPOSITION

$\hat{X}$ est un espace vectoriel ; $\vec{X}$ est un hyperplan de $\hat{X}$, X est un hyperplan affine de $\hat{X}$ de direction $\vec{X}$

DEMONSTRATION

1) φ est une bijection de $\hat{X}$ sur $\varphi(\hat{X})$ comme $\varphi(\hat{X})$ est un espace vectoriel, on définit sur $\hat{X}$ la structure induite par φ^{-1}

On a : $(\forall \lambda \in k)\ (\forall \vec{v} \in \vec{X})\ (\lambda\, \vec{v} \in \vec{X}$ avec la structure de $\vec{X})$

$$(\forall \lambda \in k^*)\ (\forall \alpha \in k^*)\ \ (\lambda(\alpha, x) = (\lambda\, \alpha, x))$$

$$(\forall \alpha \in k^*)\ \ (o\ (\alpha, x) = \vec{o})$$

$$(\forall \vec{v} \in \vec{X})\ \ (\forall \vec{w} \in \vec{X})\ \ (\vec{v} + \vec{w} \in \vec{X} \text{ avec la structure de } \vec{X})$$

$$(\forall \vec{v} \in \vec{X})\ \ (\forall \alpha \in k^*)\ \ (\forall x \in X)\ \ ((\alpha, x) + \vec{v} = \vec{v} + (\alpha, x) = (\alpha, x + \frac{\vec{v}}{\alpha})\,)$$

$$(\forall \alpha \in k^*)\ \ (\forall \beta \in k^*)\ \ (\forall x \in X)\ \ (\forall y \in X)$$

Si $\alpha + \beta = o$ $(\alpha, x) + (\beta\, y) = \alpha x + \beta y$ défini par la formule (1)

si $\alpha + \beta \neq o$ $(\alpha, x) + (\beta, y) = (\alpha + \beta, z)$

où z est le barycentre de x et y défini par la formule (2)

2) $\vec{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\hat{X}$ d'après 1)

Soit $(1, x) = x$ un point de X. On a pour tout $y \in X$ et tout $\alpha \in k^*$

$$(\alpha, y) = \alpha(1, y) = \alpha(1, x + \vec{xy}) = (\alpha, x) + \alpha\, \vec{xy}$$
$$= \alpha(1, x) + \alpha\, \vec{xy}$$

Ce qui établit que $\vec{X}$ est un hyperplan vectoriel de $\hat{X}$.

3) X est par définition égal à :

$$(1, x) + \vec{X} = x + \vec{X}$$

pour un point $x \in X$ ce qui établit que X est un sous-espace affine de $\hat{X}$ de direction $\vec{X}$

1-3 BARYCENTRE DE n POINTS

On identifiera dans la suite $(1, x) = x$ et $(\alpha, x) = \alpha x$ pour $\alpha \in k^*$ et $x \in X$.

Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de points de X, $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de k^* nuls, sauf un nombre fini alors :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i\, x_i \in \hat{X}$$

Si $\sum \alpha_i = 0$ alors $\sum \alpha_i\, x_i \in \vec{X}$

Si $\sum \alpha_i = 1$ alors $\sum \alpha_i\, x_i \in X$ est le barycentre des x_i affectés des coéfficients α_i

1-4 BARYCENTRES ET SOUS ESPACES AFFINES

Soit $A \subset X$ un sous-espace affine de X de direction $\vec{A} \subset \vec{X}$

Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de point de A, $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de k^* nuls, sauf un nombre fini vérifiant : $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$

Alors $x = \sum_{i \in I} \alpha_i\, x_i \in X$

Soit $a \in A$ alors $\vec{ax} = \sum \alpha_i\, \vec{ax_i}$ donc $\vec{ax} \in \vec{A}$ d'où $x \in A$.

Réciproquement soit $A \subset X$ une partie non vide de X stable pour les barycentres. Soit $a \in A$, x et y deux points de A.

Calculons $\lambda\, \vec{ax} + \mu\, \vec{ay} = \lambda(x - a) + \mu(y - a) = -(\lambda + \mu)\, a + \lambda x + \mu y$

si $\lambda + z = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu)\, a \in A$

il suit que $\vec{az} = -(\lambda + \mu)\, a + \lambda x + \mu y$

d'où $\{\vec{ax} \mid x \in A\} = \vec{A}$ est un sous espace vectoriel. Il résulte de ceci que A est un sous-espace affine de X

> PROPOSITION
>
> $A \subset X$ est un sous-espace affine de X
>
> $\Longleftrightarrow$ tout barycentre de points de A est dans A.

1-5 BARYCENTRES ET APPLICATIONS AFFINES

Soient $(X, \vec{X}, +)$ et $(X', \vec{X}', +)$ deux espaces affines sur un même corps k ; soit $f : X \longrightarrow X'$ une application affine de X dans X'.

Soit : $\vec{f} : \vec{X} \longrightarrow \vec{X}'$ l'application linéaire associée.

Pour qu'un prolongement $\hat{f}$ de $\hat{X}$ à $\hat{X}'$ soit linéaire il faut :

$$\hat{f}(\alpha, x) = \hat{f}(\alpha x) = \alpha\hat{f}(x) = \alpha f(x) = (\alpha, f(x))$$

$$\hat{f}(\vec{v}) = \vec{f}(\vec{v})$$

Calculons :

$$\hat{f}(\alpha x + \vec{v}) = \hat{f}(x + \frac{\vec{v}}{\alpha})) = \alpha(f(x + \frac{\vec{v}}{\alpha}) = \alpha f(x) + \vec{f}(\vec{v})$$

d'où $\hat{f}(\alpha x + \vec{v}) = \hat{f}(\alpha x) + \hat{f}(\vec{v})$

si $\alpha + \beta = o$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha(x-y) = \alpha\hat{f}(x-y) = \alpha\vec{f}(\vec{yx}) \\ &= \alpha(f(x) - f(y)) = \alpha f(x) - \alpha f(y) \\ &= \hat{f}(\alpha x) + \hat{f}(\beta y) \end{aligned}$$

si $\alpha + \beta \neq o$ on a :

$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)\, z$ où z est le barycentre de x et y affectés de α et β

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha x + \beta y) &= \hat{f}((\alpha+\beta)z) = (\alpha+\beta)\, f(z) \\ &= (\alpha+\beta, f(x) + \vec{f}(\frac{\beta\, \vec{xy}}{(\alpha+\beta)}) = (\alpha+\beta, f(x) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(y) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} f(x)) \\ &= (\alpha+\beta, \frac{\alpha f(x) + \beta f(y)}{\alpha+\beta}) = \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha\hat{f}(x) + \beta\hat{f}(y) \end{aligned}$$

Ce qui termine de montrer que $\hat{f}(\alpha x) = \alpha f(x)$ est linéaire si f est affine.

Réciproquement soit une application linéaire $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}'$

vérifiant : $\hat{f}/X : X \longrightarrow X'$

On a alors $\hat{f}(x) - \hat{f}(y) = \hat{f}(x - y)$

pour x fixé on définit donc ainsi une application linéaire $\vec{f} : \vec{X} \longrightarrow \vec{X}'$. Ce qui établit que $\hat{f}/_X = f : X \longrightarrow X'$ est une application affine.

Il est clair que si f et g sont deux applications affines composables $\hat{f} \circ \hat{g} = \widehat{f \circ g}$ et que $\hat{1}_X = \hat{1}_X$

on a le théorème suivant :

THEOREME

Soient X, X' deux espaces affines sur un même corps K

$f : X \longrightarrow X'$ est une application affine si, et seulement si, il existe une, et une seule application linéaire $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}'$ prolongeant f.

On a de plus $\hat{f} \circ \hat{g} = \widehat{f \circ g}$ et $\hat{1}_X = 1_{\hat{X}}$

COROLLAIRE

$f : X \longrightarrow X'$ est une application affine $\Longleftrightarrow$ l'image du barycentre est le barycentre des images affectées des mêmes coéfficients.

Ce corollaire se traduit encore par f affine, si, et seulement si, f respecte les barycentres.

§ 2 GEOMETRIE ANALYTIQUE AFFINE

Les notations seront celles de "Calcul Barycentrique". La dimension de $\vec{X}$ est finie.

2-1 REPERES

Si on a une base de $\vec{X}$ alors un point de X détermine une base de X. La dimension de $\vec{X}$ est n.

DEFINITION

Un repère cartésien de l'espace affine $(X, \vec{X}, +)$ est la donnée d'une base $(x_o, \vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ de X où $x_o \in X$ et où $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ est une base de $\vec{X}$.

X est une partie génératrice de X comme X est de dimension $n + 1$. Il existe dans $X(n + 1)$ points $(x_o, x_1, \dots x_n)$ tel que $(x_o, x_1 \dots x_n)$ soit une base de $\hat{X}$.

DEFINITION

Un repère affine de l'espace affine $(X, \vec{X}, +)$ est la donnée d'une base $(x_o, x_1, \dots x_n)$ de $\hat{X}$ où $x_o, x_1, \dots x_n$ sont des points de X

Si $(x_o, \vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ est un repère cartésien alors $(x_o, x_1, \dots x_n)$ est un repère affine avec $x_i = x_o + \vec{e}_i$ pour $i + 1 \dots n$ et réciproquement.

Le passage d'un repère à l'autre est un problème de changement de base dans $\hat{X}$ défini par :

$$x_i = x_o + \vec{e}_i \quad \text{pour } i = 1 \dots n$$

$$x_o = x_o$$

2-2 APPLICATIONS AFFINES ET REPERES CARTESIENS

Si $(X, \vec{X}, +)$ et $(X', \vec{X}', +)$ sont deux espaces affines rapporté à des repères cartésiens

$$(x_o, \vec{e}_1 \dots \vec{e}_n) \qquad (x'_o, \vec{e}'_1, \dots \vec{e}'_p)$$

Une application linéaire est définie par la donnée de $f(x_o)$ et par : $\vec{f} : \vec{X} \longrightarrow \vec{X}'$

Soit $m(\vec{f})$ la matrice de $\vec{f}$ dans les bases $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1, \dots \vec{e}'_p)$ la matrice de f et alors :

$$m(f) = m(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 1 & o \dots o \\ a_o & \\ - & \\ - & m(\vec{f}) \\ - & \\ a_p & \end{pmatrix}$$

2-3 INTERPRETATION GEOMETRIQUE DES VALEURS PROPRES DE f

Soit Y le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de $\hat{f}$ $x \in X$ est un point fixe de $f = \hat{f}/_X$ si, et seulement si $x \in X \cap \hat{Y}$

Si $\hat{Y} \subset \vec{X}$ alors l'application n'a pas de point fixe.

Si $\hat{Y} \cap X \neq \emptyset$ c'est alors un sous espace affine de direction $\hat{Y} \cap \vec{X}$.

On a en particulier :

PROPOSITION

Si $\vec{f}$ n'admet pas la faleur propre 1 alors f a un point fixe et un seul.

DEMONSTRATION

Dans ce cas on a : $\dim \hat{Y} = 1$ et $\hat{Y} \not\subset \vec{X}$

d'où $\hat{Y} \cap \vec{X} = \{\vec{O}\}$ d'où $\hat{Y} \cap X = 1$ point.

Dans le cas où f a au moins un point fixe a, alors $m(\vec{f})$ est la matrice de l'application linéaire $f_a : X_a \longrightarrow X_a$. Les valeurs propres de f_a déterminent des sous ensembles affines globalement invariants par f.

Dans le cas ou f n'a pas de points fixes, les espaces propres de f permettent de déterminer des directions qui sont par f c'est-à-dire tel que f(A) est faiblement parallèle à A (des et pas 1 il peut en exister d'autres).

2-4 APPLICATIONS AFFINES ET REPERES AFFINES

Soient $(x_o, x_1 \dots x_n)$, $(x'_o, \dots x'_n)$ deux repères affines associés à X et X' respectivement dans cette base la matrice de f : X X' est donné par :

$$m(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{o_1} & \alpha_{o2} & \alpha_{on} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & - \\ - & - & - \\ \alpha_{p_1} & \alpha_{p_2} & \alpha_{pn} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=o}^{p} a_{ij} = 1 \quad \text{et } j = o \dots n$$

Il est clair que le passage d'un repère à un autre n'est qu'un problème de changement de base dans $\hat{X}$

2-5 EQUATIONS PARAMETRIQUES DES SOUS ESPACES AFFINES

Soient $(x_o, x_1 \dots x_n)$ un repère affine d'un espace affine

$a_o \dots a_p$ (p + 1) points de X. Le sous-espace affine engendré par les $a_o \dots a_p$ définit par :

$$x = \sum_{i=o}^{p} \lambda_i \, a_i \qquad \text{avec} \sum_{i=o}^{p} \lambda_i = 1$$

mais dans le repère affine $a_o \dots a_p$ déterminent une matrice

$$A = (\alpha_{ji}) \quad \begin{matrix} o \leqslant j \leqslant n \\ o \leqslant i \leqslant p \end{matrix} \qquad \text{ou} \quad a_i = \sum_{j=o}^{n} \alpha_{ji} \, x_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=o}^{n} \alpha_{ji} = 1$$

Il suit que les coordonnées barycentriques $(\xi_j)_{o \leqslant j \leqslant n}$ de x vérifiant

$$\begin{pmatrix} \xi_o \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_o \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$

comme on a la relation $\lambda_o = 1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ les coordonnées $\xi_o, \dots \xi_n$ sont des formes affines définies sur K^p

Réciproquement, si les coordonnées barycentriques $\xi_o \dots \xi_n$ de x définissent des formes affines en p variables $\lambda_1 \dots \lambda_p$ alors x est dans l'espace engendré par les points $a_o \dots a_p$ obtenu en appliquant les formes $\xi_o \dots \xi_n$ sur $\lambda_1 \dots \lambda_p = (o, \dots o)$ $(\lambda_1 \dots \lambda_p) = (1, \ddot{o} \dots o) \dots (\dots {}_n) = (o \dots o\ 1)$

La relation :

$$\begin{pmatrix} \xi_o \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_o \\ \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$

est l'équation paramétrique du sous-espace engendré par $(a_o, \dots a_p)$.

De la même manière si $(x_o, \vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$ est un repère cartésien on a :

$$a_i = x_o + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji} \, \vec{e}_j$$

x appartient au sous-espace affine engendré par $a_o \dots a_p$ si, et seulement si $x = \sum_{i=o}^{p} \lambda_i \, a_i$ avec $\sum_{i=o}^{p} \lambda_i = 1$

Soit $M = (\mu_{ji}) \quad \begin{matrix} 1 \leqslant j \leqslant n \\ o \leqslant i \leqslant p \end{matrix}$

les coordonnées cartésiennes de x vérifie :

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \rho_o \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$

Comme précédemment $\rho \dots \rho_n$ sont des formes affines sur K^p et réciproquement la donnée de coordonnée cartésienne comme forme affine de rang p détermine un sous-espace. L'équation ci-dessus est l'équation paramétrique du sous-espace engendré par $a_o \dots a_p$ en coordonnée cartésienne.

2-6 EQUATIONS CARTESIENNES D'UN SOUS-ESPACE AFFINE

Considérons la forme affine $1 : X \longrightarrow k$

$$x \longmapsto 1$$

la forme linéaire associée $\hat{1} : \hat{X} \longrightarrow k$

$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha$$

$$\vec{v} \longmapsto o$$

on a $\ker \hat{1} = \vec{X}$

Rappelons avant d'aller plus loin, un théorème d'algèbre linéaire.

PROPOSITION

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K. Pour qu'une partie V de E soit un sous-espace de dimension p $(o \leqslant p \leqslant n)$ il faut, et il suffit qu'il existe sur E, $(n-p)$ formes linéaires $\{f_{p+1} \dots f_n\}$ linéairement indépendantes telles que V soit l'ensemble des zéros commus aux $f_{p+1} \dots f_n$.

DEMONSTRATION

1) Si V est un sous-espace de dimension p soit $(e_1 \dots e_p)$ une base de V on complète $e_1 \dots e_p$ par $e_{p+1} \dots e_n$ pour avoir une base de E si on prend :

$e^*_{p+1} = f_{p+1} \dots e^*_n = f_n$ où (e^*_i) est la base duale de (e_i) on a alors :

$$V = \{x \ / \ f_{p+1}(x) = o \ \dots \ f_n(x) = o\}$$

2) Si $f_{p+1} \dots f_n$ sont des formes linéaires sur E linéairement indépendant identifiant $e_{p+1} = f^*_{p+1} \dots e_n = f^*_n$ en identifiant E à E^{**} d'après le théorème de la base incomplète. On peut définir une base $(e_1 \dots e_p, e_{p+1} \dots e_n)$ de E. On a alors :

$$f_{p+1}(x) = f_{p+2}(x) = \dots = f_n(x) = o \iff x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

$\iff x \in V(e_1 \dots e_p)$

Soit A un sous-espace vectoriel de X, a un point de A alors A est un sous-espace vectoriel de X_a

D'après la proposition précédente, il existe des formes affines $f_{p+1} \dots f_n$ linéairement indépendantes vérifiant :

$$f_{p+1}{}'a) = \dots f_n(a) = o \quad \text{et} \quad A = \{x \in X \mid f_{p+1}(x) = \dots f_n(x) = o\}$$

Il suit que la forme affine constante $x \longmapsto 1$ n'est pas dans l'espace engendré par $f_{p+1} \dots f_n$ car $\forall f \in V(f_{p+1} \dots f_n)$ $f(a) = o$

Considérons maintenant $f_{p+1} \dots f_n$ $(n-p)$ formes affines linéairement indépendantes et tel que la fonction constante $x \longmapsto 1$ ne soit pas combinaison linéaire de $f_{p+1} \dots f_n$.

Dans l'espace vectoriel $\hat{X}$ cela signifie que les formes linéaires sur $\hat{X}$ $(\hat{1}, \hat{f}_{p+1} \dots \hat{f}_n)$ sont linéairement indépendantes. Comme $\operatorname{Ker} \hat{1} = \vec{X}$ les formes $\hat{f}_{p+1} \dots \hat{f}_n$ sont linéairement indépendantes comme formes linéaires sur $\vec{X}$.

Il suit que :

$\hat{A} = \{\hat{x} \in \hat{X} \ / \ \hat{f}_{p+1}(\hat{x}) = \dots = \hat{f}_n(\hat{x}) = o\}$ est un espace vectoriel de $\hat{X}$ de dimension $p + 1$ et que :

$\vec{A} = \{\vec{v} \in \vec{X} \ / \ \hat{f}_{p+1}(\vec{v}) = \dots = \hat{f}_n(\vec{v}) = o\}$ est un espace vectoriel de $\vec{X}$ de dimension p.

Il résulte de ceci que $A = \hat{A} \cap X \neq \emptyset$

$A = a + \vec{A}$ pour $a \in \hat{A} \cap X$

C'est un sous-espace affine de X. Nous avons établis la proposition suivante :

PROPOSITION

Soit X un espace affine de dimension n sur k. Pour qu'une partie A non vide soit un sous-espace affine de dimension p, il faut, et il suffit, qu'il existe $(n - p)$ affines linéairement indépendantes et linéairement indépendante avec la forme $x \quad 1$.

A est alors l'ensemble des zéros communs aux $(n - p)$ formes.

DEFINITION

Si A est un sous-espace affine de X, les $(n - p)$ formes affines $f_{p+1} \dots f_n$ sont les équations cartésiennes de A si, et seulement si

$$A = \{x \in X \ / \ f_{p+1}(x) = \dots f_n(x) = o\}$$

§ 3 *GEOMETRIE SUR DES CORPS DE BASE PARTICULIERS*

3-1 CORPS DE BASE ORDONNEE - CONVEXITE

On dit qu'un corps k est ordonné si k est muni d'une relation d'ordre total $x \geqslant y$ vérifiant

a) $\forall (x, y, a) \in k^3 \qquad x \geqslant y \Longrightarrow x + a \geqslant y + a$

b) $\forall (x, y) \in k^2 \qquad (x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \Longrightarrow xy \geqslant 0$

Sur un tel corps on peut définir une valeur absolue

$$\forall x \in k \qquad |x| = \sup (x, -x)$$

Au niveau de la géométrie, cela permet de définir la notion de 1/2 espace.
Soit H un hyperplan affine d'un espace affine

$H = \{x \ / \ u(x) = 0\}$ où u est une forme linéaire non nulle

$E_1 = \{x \ / \ u(x) > 0\}$
$E_2 = \{x \ / \ u(x) < 0\}$
s'appellent les sous-espaces ouverts de X associé à H.
H est le bord de E_1 et de E_2

On définit également E'_1 et E'_2 les sous-espaces fermés.
On peut à partir de là, définir les notions de demi-droite, puis de segment, ce qui nous conduit à la notion de convexité :

Soit X un espace affine sur un corps ordonné k. Une partie A de X est dite convexe si, pour tout couple (a, b) de A^2 le segment $[a, b]$ est dans A.

3-2 ORIENTATION

Si f est une application affine de X dans lui-même, on pose $\det f = \det \vec{f}$

On dit que deux repère de X sont équivalents si il existe une bijection affine de déterminant positif transformant l'un en l'autre.
Cette relation d'équivalence possède 2 classes. Choisir une orientation sur X c'est choisir l'une de ces classes.

3-3 CAS OU $k = \mathbb{R}$: TOPOLOGIE

On démontre que si $\dim \vec{X} = n$ alors $\vec{X}$ a une unique topologie d'espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ (théorèm de Ricoz) et pour toute norme sur $\mathbb{R}^n$ tout isomorphisme linéaire $\vec{X} \longrightarrow R^n$ est un homomorphisme
Cela permet de définir une topolotie sur X

On démontre :

PROPOSITION

Soit X un espace affine de dimension finie sur R, H un hyperplan de X ; alors $\complement H$ est un ouvert qui a deux composantes convexes.

BIBLIOGRAPHIE

E. ARTIN	Algèbre géométrique	(Gauthier - Villars
J. FRENKEL	Géométrie pour l'élève professeur	(Hermann)
S. DUBAC	Géométrie Plane	(P.U.F. Collection supérieure)
COXETER	Introduction to geometry	(Wiley)

Progression de cours adoptée en 4è B

C.E.S. Ouche Quinet à SAINT SEBASTIEN SUR LOIRE

par HELENE JOUVET

Dans cette classe se sont retrouvés 34 élèves que j'avais eus en 5è.

Ils avaient fait un travail sur les déplacements dans le plan physique par l'étude de papiers peints, des pliages, des manipulations avec des appareils : aggrandisseur et inverseur.

Je les connaissais comme "élèves moyens", ce qui explique le choix de faire des constructions et de ne pas énoncer, et démontrer les propriétés de multiplication d'un vecteur par un rationnel d'une façon théorique, de proposer beaucoup d'exercices.

Cette progression a été élaborée dans un travail d'équipe dans le groupe IREM "Géométrie axiomatique" ; les exercices ont été discutés dans ce groupe et dans le groupe IREM "Géométrie en 4è et 3è." Nous avions le but affirmé de couvrir le programme de 4è. En fait, au 15 juin, il restait à aborder "coordonnées d'un vecteur dans un repère".

Pour nous, ce travail n'est pas absolu : cours et exercices seront approfondis et discutés dans les groupes "Géométrie en 4è et 3è" et "Progressions et tests en géométrie de 4è et 3è" cette année (76-77). Il nous paraît important de vérifier par des tests communs, les acquisitions des élèves dans la progression des commentaires, la progression avec les axiomes du milieu, et cette progression. En ce qui concerne exercices et problèmes, nous joignons à ce document des pistes de travail... à poursuivre...

J'ai consacré tout le 1er trimestre à raison de 2 heures par semaine à des exercices de construction demandant :

- une bonne lecture des textes (il y a possibilité d'exprimer une situation avec un vocabulaire différent).
- des constructions précises et soignées sur papier non quadrillé (en général, les situations choisies permettent de vérifier très simplement l'exactitude de la construction)

Le papier quadrillé a été utilisé après "projection d'une division régulière sur une droite" avec possibilité donnée d'utiliser le quadrillage.

J'ai fait les manipulations avec les appareils en Janvier dans le plan physique.

La question concernant le cercle y trouve sa place dans la mesure où les élèves font référence aux observations faites en 5è en particulier sur les papiers peints. Pour chaque appareil, les règles de construction d'un point et de son image ont été dites, mais non démontrées. D'autres formes de travail peuvent être envisagées sur les appareils à transformer : par exemple, après l'étude d'une transformation, translation, symétrie centrale, homothétie, rechercher l'appareil qui permet de la réaliser dans le plan physique.

La manipulation sur le translateur a coïncidé avec l'étude de la translation en technologie. L'application de constructions par translation a été faite absolument sans hésitation par tous les élèves de la classe, alors que celle par symétrie centrale a posé de grosses difficultés.

J'ai alors décidé de privilégier d'abord l'étude des translations du plan.

§ 1 LES AXIOMES D'INCIDENCE

Enoncé des axiomes comme des règles vérifiées par des sous-ensembles E de points d'un ensemble P. Ces règles sont-elles vraies pour les ensembles suivants :

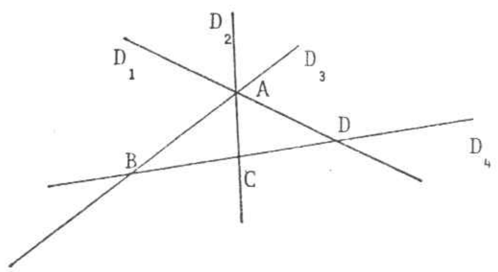
- P : ensemble des points d'un disque
  E : sous-ensemble des cordes.
- P : ensemble des points d'un disque
  E : sous-ensemble des diamètres
- P : ensemble des points d'un hexagone
  E : sous-ensemble des "cordes"

Etude plus précise des droites dans le plan (Exercices IREM de Lille)

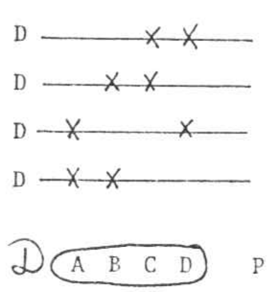
Enoncé des axiomes d'incidence dans le plan mathématique.

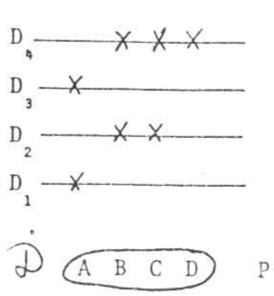
Droites et points   Exercices

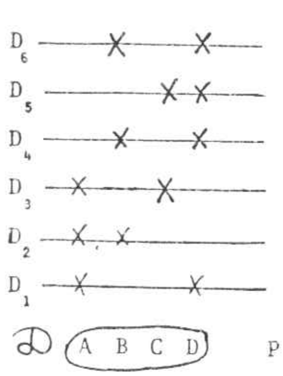
I Soient $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites D_1 D_2 D_3 D_4 et P un ensemble de 4 points A,B,C,D. Faire le schéma cartésien de la relation "est élément de" P dans $\mathcal{D}$



Dessiner les figures correspondant aux diagrammes cartésiens suivants :







II Combien de droites contiennent 1 point donné ? 2 points donnés ? 3 points donnés ? 4... 5... Faire les figures. Qu'en conclure ?.

III {A, B, C, D, E, H, G} construire cet ensemble de huit points dans les conditions suivantes :

$C \in (AB)$ $D \notin (AB)$ $E \in (AB)$ $G \notin (AB)$ $H \in (AB)$

Chercher $(AB) \cap (CD)$ $(AB) \cap (EB)$ $(AB) \cap (GH)$

IV $S = \{A, B, C\}$ ensemble de trois points non alignés.

1) Quel est le nombre de droites déterminées par deux de ces points ? Les désigner

2) Soit D un quatrième point. Même question

3) Même question avec 5, 6, 7... points

V Soit D une droite et A un point tel que $A \in D$

Tracer D_1 tel que $A \in D_1$ et $D_1 \cap D = \{B\}$

Tracer D_2 tel que $A \in D_2$ et $D_2 \cap D = \{C\}$

D_3 $A \in D_3$ et $D_3 \cap D = \{E\}$

D_4 $A \in D_4$ et $D_4 \cap D = \{F, G\}$

D_5 $A \in D_5$ et $D_5 \cap D = \emptyset$

D_6 $A \in D_6$ et $D_6 \cap D = \emptyset$

§ 2 ETUDE DES DROITES DU PLAN. PROJECTIONS

1) Droites sécantes

Droites parallèles. Direction de droites.

Exercices

I) Un triangle (A, B, C) étant donné, tracer en chacun des points une droite parallèle au côté opposé

Un quadruplet (A, B, C, D) étant donné, tracer en chacun des points deux droites parallèles aux côtés opposé

II) Tracer à la règle deux droites D et D'; placer les points A, B, et C sur D et A', B', C' sur D'. Déterminer les points U, V, W tels que

$$(AU) \cap (A'B) = \{U\} \quad (BA') \cap (B'C) = \{V\} \quad (CA') \cap (C'A) = \{W\}$$

III) Tracer deux droites parallèles D_1 et D_2

choisir les points tels que {A, B, C} D_1 et {E, G, G} D_2

Tracer les droites (AG) (GB) (BE) (EC) (CF) (FA)

Comment s'énonce la règle 2 pour les points A et G.

IV) 1) Soient A, B, C trois points d'une droite (D) et un point M n'appartenant pas à D. Tracer une droite D_1 contenant B et parallèle à (AM)

Soit N le point d'intersection de D_1 avec (CM)

Prendre un point S n'appartenant pas aux droites tracées

2) Tracer la droite D_2 contenant N et parallèle à (MS) puis

la droite D_3 contenant B et parallèle à (AS)

On appelle R le point d'intersection de D_2 et D_3

Quelles sont vos observations à propos de R, G, C ?

* Enoncer la règle 3 pour la construction de D'_1

2) Projection d'une droite sur une autre droite

Exercices de constructions. Dans les observations faites quelles sont celles qui ne peuvent pas être expliquées par les axiomes d'incidence ?

I) Dans un triangle (a, b, c) choisir un point A élément de (a, b)

A se projette en B sur (a, c) dans la direction (c, b)

B se projette en C sur (b, c) dans la direction (a, b)

C se projette en D sur (a, b) dans la direction (a, c)

D se projette en E sur (a, c) dans la direction (c, b)

E se projette en F sur (b, c) dans la direction (a, b)

Continuer la construction. Quelles sont les observations ?

II) Choisir trois directions de droites distinctes et deux droites D et D' sécantes n'appartenant pas à ces directions

1) Construire les points A, B, C de D et M, N, C de D' tels que M, N, C soient les projections de A, B C sur D' suivant la direction (1)

2) Construire les ensembles de points se projetant en A et B sur la droite D suivant la direction (2). Que savez-vous de ces ensembles ?

3) Construire les ensembles de points se projetant en M et N sur D' suivant la direction (3) Que savez-vous de ces ensembles ?

III) Choisir trois droites D, D', D'' concourantes et deux directions de droites distinctes ne les contenant pas.

1) Construire (M, N, C) de D' projections de (A, B, C) de D sur D' suivant la direction (1)

2) Projeter (M, N, C) sur D'' suivant la direction (2) en (S, R, C) suivant la direction (2). Observations.

IV) Choisir deux droites sécantes D et D' et deux directions de projections

Projeter le point A de D en B sur D' suivant la direction (1)

B de D' en C sur D suivant la direction (2)

C de D en E sur D' suivant la direction (1)

E de D' en F sur D suivant la direction (2)

... Continuer la construction. Quelles sont vos observations ?

même exercice en choisissant D et D' parallèles.

V) Choisir un triangle (A, B, C). En A, B, C tracer les droites (DE) (EF) (DF) respectivement parallèles à (BC) (AB) (AC), en D, E, F tracer les droites (A'B') (A'C') (C'B') respectivement parallèles à (AB) (AC) (CB) En A', B', C' tracer les droites (D'E') (E'F') (D'F') respectivement parallèles à (BC) (AB) (AC)

... Continuer la construction. Quelles sont vos observations ?

VI) Choisir 3 points O, A, B non alignés

1) construire la droite D_1 parallèle à OB qui contient A

D_2 parallèle à OA qui contient B.

Soit $\{C\} = D_1 \cap D_2$

2) On appelle A' la projection de C sur (OA) suivant la direction (AB) et B' la projection de C sur (OB) suivant la direction (AB)

Construire A' et B'.

3) Construire la droite D_3 parallèle à (OB) qui contient A'

D_4 parallèle à (AO) qui contient B'

$\{I\} = D_3 \cap (BC)$ $\{J\} = D_4 \cap (AC)$ $\{H\} = D_3 \cap D_4$

4) Cette construction se poursuit en faisant jouer à H le rôle du point C précédent ...

Observations.

VII) Placer trois points non alignés A, B, C.

1) Construire la parallèle (xy) à (AC) contenant B.

choisir un point I de (xy) non égal à B.

2) Construire J image de B par la projection parallèlement à (AI) de (xy) sur (AC)

On appelle M le point d'intersection de (AB) et (IJ)

3) Choisir un point K de (AI) non égal à A et construire la parallèle (z^t) à (KC) contenant A.

4) Construire L image de C par la projection parallèlement à (AK) de (KC) vers (z^t)

On appelle N le point d'intersection de (AC) et (KL).

5) Construire O image de C dans la projection de (AC) vers (x, y) parallèlement à (BJ).

On appelle R le point d'intersection de (OJ) et (BC)

Tracer les droites (AR) (CM) (BN).

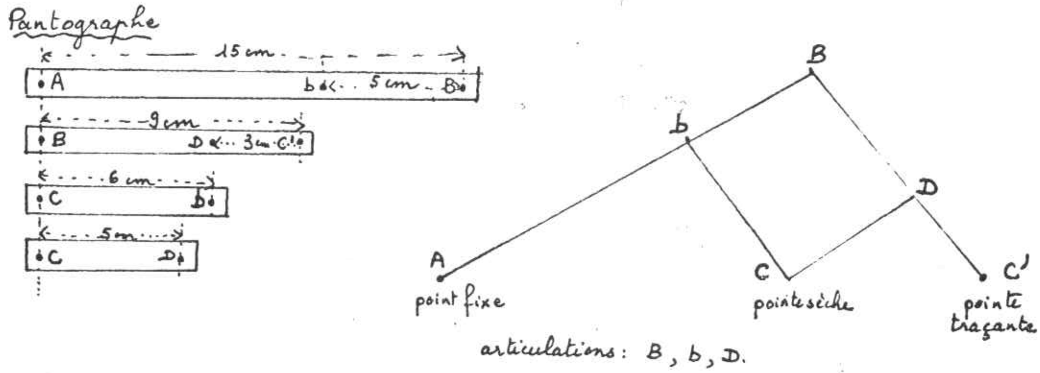
§ 3 UTILISATION DES APPAREILS POUR TRANSFORMER LES POINTS DU PLAN PHYSIQUE

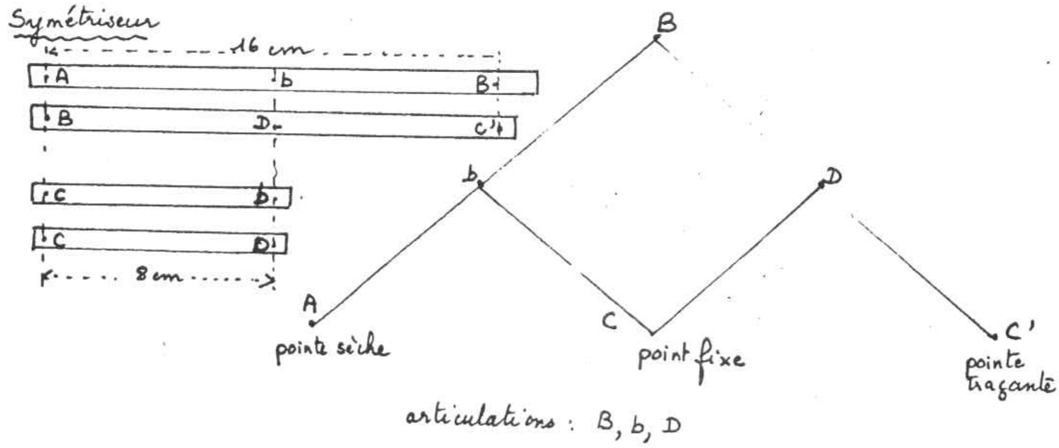
1) Préparation du matériel

- bandes de carton (bristol ou plus épais...)
- punaise pour fixer l'appareil
- agrafes parisiennes ou (punaises + bouchons de liège) pour les articulations.

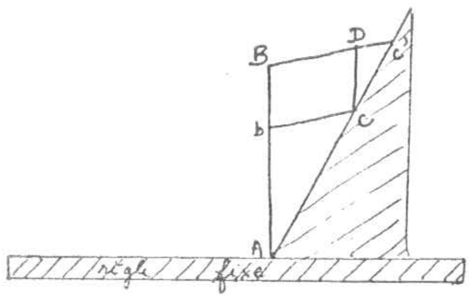
Les appareils peuvent être construits en mécano ou avec le matériel CEL.

Il y a possibilité d'utiliser les pantographes vendus en jouets si les élèves en possèdent (utilisation très agréable au tableau).



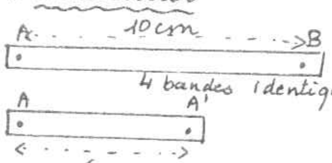


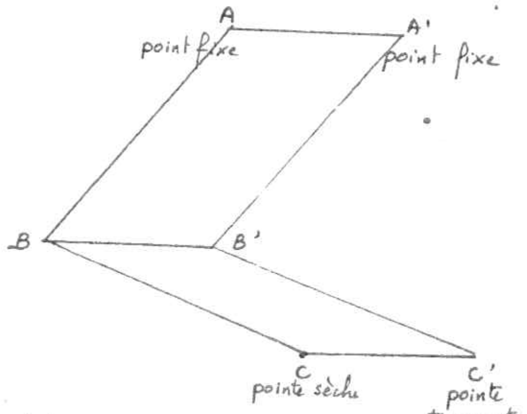
- <u>Affinitiseur</u> (pour réaliser une affinité oblique) utilisation d'un des appareils précédents



L'équerre glisse le long de la règle

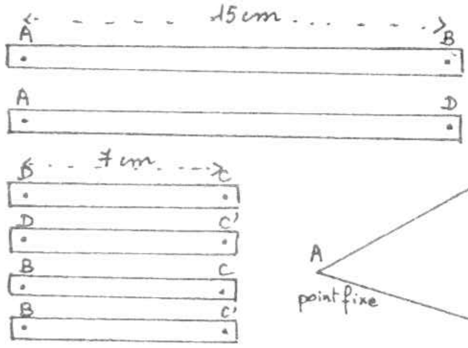
. Translateur

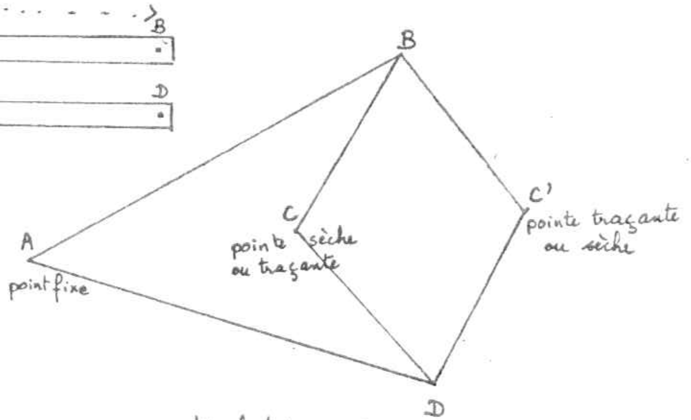




articulations : B, B'

. Inverseur





articulations : B. D

Sur ce même plan de manipulation, utilisation de quatre appareils : aggrandisseur, symétriseur, translateur affinitiseur.

Mamipulations

1 - Existe-t-il des points que l'appareil ne peut pas transformer ?
Quel est l'ensemble des points E qui ont une image ?

2 - Choisis une droite D. Transforme les points de cette droite en un ensemble D'. Quelles sont tes observations ?

3 - Existe-t-il des points qui sont leur propre image ?

4 - Existe-t-il des droites D telles que l'image de chacun de leurs points appartiennent à cette même droite D ? Les caractériser

5 - Construire l'image de deux droites sécantes
de deux droites de même direction

6 - Tracer un cercle. Quelle est l'image de ce cercle ?

7 - Dégager les règles de construction.

Applications

Construire à la règle l'image d'un point qu'on ne peut pas atteindre par l'appareil.

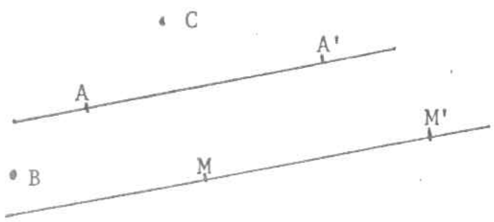
Construire sans l'appareil l'image d'un triangle (ABC).

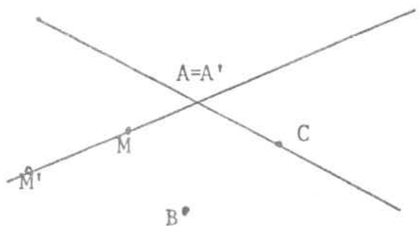
Un tableau d'observations comparées des quatre manipulations a été fait en classe.

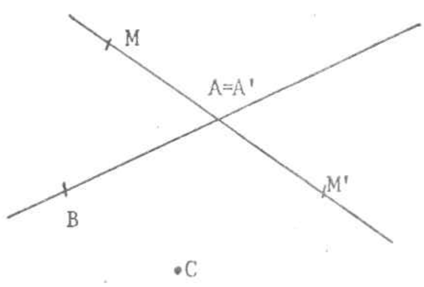
Contrôle

Constructions à réaliser sans les appareils, suite aux observations faites. Mettre sous chaque dessin le nom de l'appareil qui transforme A en A', M en M'.

Construire les images de B et C.



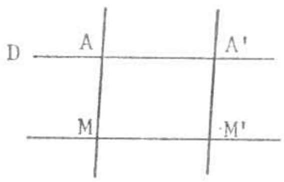




§ 4 TRANSLATIONS DU PLAN

1) Etude d'une relation f dans l'ensemble P des points du plan mathématique

$$f : P \longrightarrow P$$
$$A \longmapsto A'$$
$$M \longmapsto M'$$



Les droites (M, M') et (A, A') sont parallèles

(M A) et (M' A') sont parallèles

• Construire l'image d'un point, l'antécédent d'un point, ces points sont uniques s'ils ne sont pas éléments de la droite $D = (AA')$

Dans P - (A A') f est une bijection

• Pour prolonger f à P il y a nécessité d'énoncer une nouvelle règle du plan mathématique :

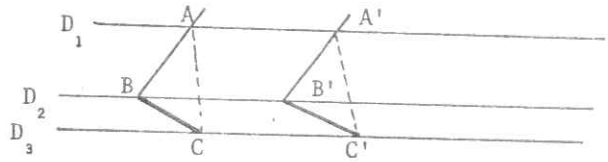
<u>REGLE 4</u> Axiome de Desargues (cas parallèles)

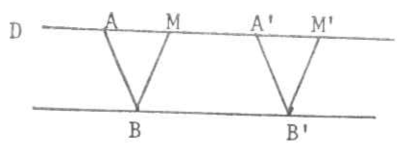
Etant données trois droites D_1 D_2 D_3 de même direction, pour toutes paires de points (A, A') (B, B') (C, C') incluse dans D_1 D_2 D_3 telles que

(A B) et (A' B') soient parallèles

(A C) et (A' C) soient parallèles

Les droites (B, C) et (B' C') sont parallèles





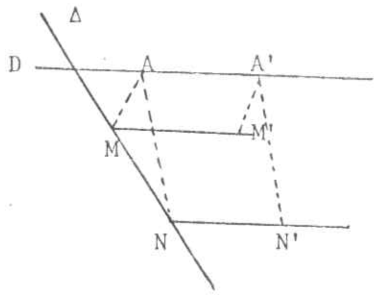
- Pour construire l'image d'un point M de D, on choisit les points B et B' d'une droite D' parallèle à D tels que (A B) et (A' B') soient parallèles. On construit la droite (B' M') parallèle à (B M)
- construire l'antécédent d'un point de D

f est une <u>bijection</u> dans l'ensemble des points du plan

2) Image d'une droite par la bijection f

. Si Δ est parallèle à D elle est sa propre image

. Si Δ n'est pas parallèle à D



En application de l'axiome
L'image par f d'une droite Δ sécante à D est une droite parallèle à Δ.

3) La bijection f s'appelle une translation du plan.

$$f : \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ A \longmapsto A' \end{array} \qquad f : t_{AA'}$$

- $t_{AA} = Id_p$
- il n'y a pas de point double si $t_{AA'} \neq Id$
- la droite D définit la direction de la translation

4) Etude des translations

Si $t_{AA'}(M) = M'$ alors (A, M, M', B) est parallélogramme

$t_{MM'}(A) = A'$ t est indépendante du couple de points choisis. Elle est définie par un point et son image.

Translation réciproque

$$t_{AB} \circ t_{BA} = Id_p$$

Composition de translations

La bijection composée de deux translations est une translation.

EXERCICES

I choisir trois points A, B, C non alignés

Construire tous les parallélogrammes dont trois sommets sont les points A, B, C

Proposer des translations qui font correspondre les points deux à deux

II (A, B, C, D) (D, B, C, E) (A, C, B, F) sont des parallélogrammes

Faire le dessin

Montrer que $t_{ED} = t_{AF}$

G est l'image de C par t_{DB}

Montrer que $t_{BG} = t_{AB}$

III On donne deux translations t_1 et t_2 de directions différentes et trois points (A, B, C) tels que $t_1(A) = B$ et $t_2(B) = C$

- construire $D = t_1(C)$ $E = t_2(D)$ $F = t_1(E)$ $G = t_2(F)$
- quelles sont les images de A, G, E par t_1 s t_2 ?
- quelles sont les conséquences pour les points A, C, E ?
- exprimer t_{AO} comme composée des translations données
- exprimer t_{BE} comme translation composée des translations données

IV Etant donnés trois points A, B, C non alignés, on appelle $t_1 = t_{AB}$ $t_2 = t_{BC}$

Construire l'image D de C par t_1

E de D par t_1

F de E par la translation réciproque de t_2

G et F par la translation réciproque de t_1

VI On donne un triangle O, A, B.

On appelle t_1 la translation O A et t_2 la translation O B

1) Construire $C = t_1(B)$ Quelle est l'image de A par t_2

2) Projeter C parallèlement à (A N) sur la droite O A en A'. Quelle est la nature de (A, A', C, B)

Quelle est l'image de A par t_1 ?

3) Construire I image de A' par t_2

Qu'en conclure pour les points B, C, I ?

4) Quelles sont les images de la droite (A B) par t_1, de la droite (A B) par t_2 ?

§ 5 BIPOINTS EQUIPOLLENTS. VECTEURS

Deux points (A, A') et (B, B') sont équipollents si A' et B' sont les images respectives de A et B par la même translation

ou si (A, A', B', B) est un parallélogramme.

La relation d'équipollence est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints du plan.

Vecteurs : On appelle vecteur, la classe d'équivalence de bipoints équipollents.

Conventions : On ne peut dessiner qu'un couple de points représentant un vecteur $\underset{\bullet}{}A$ $\underset{\bullet}{}B$ le couple de point est un représentant de $\vec{V}$.

Exemple : Le couple de point (A, B) représentant de $\vec{V}$ étant donné, construire d'autres bipoints représentants $\vec{V}$

Translation t_{AB} sera notée translation $t\,\vec{V}$ si (A, B) est représentant de $\vec{V}$

Conditions équivalentes :

- (A, B) et (C, D) équipollents
- $t_{AB} = t_{CD}$
- (A, B, D, C) parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Vecteur $\vec{O}$ représenté par (A, A) (B, B)

Somme de vecteurs

Si $t_{BC} \circ t_{AB} = t_{AC}$ alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Application à la construction d'un représentant de $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ayant pour représentants respectifs (O, N) et (O, M)

Vérification par construction de :

$$\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$$

$$(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$$

Représentant du vecteur opp $\vec{V}$ noté $-\vec{V}$

Soustraction de vecteurs $\vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V})$

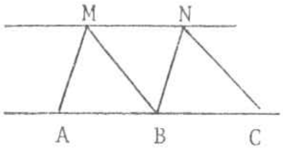
On appelle $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs

REGLE 5 $\forall \vec{V}$ $\vec{V} \in \mathcal{V}$ $\forall n$ $n \in \mathbb{Z}$ $\vec{V} \neq \vec{O}$ et $n \neq 0 \Longrightarrow n.\vec{V} \neq \vec{O}$

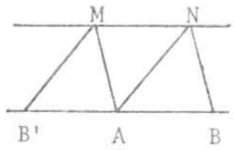
§ 6 MILIEU D'UN BIPOINT

1) Définition vectorielle du milieu

Le point B tel que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$ s'appelle le milieu du bipoint (A, C) A, B, C sont éléments d'une même droite.



$\overrightarrow{AC} = \vec{U} + \vec{U}$



$\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ $\overrightarrow{AB'} = -\vec{U}$

$\{$ Le point A tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \vec{0}$ est le milieu du bipoint (B, B')

2) Construction du milieu d'un bipoint (A, B) donné

- Construire O, A, O', B parallélogramme. (O non aligné avec A et B)
- (O, O') et (A B) ont-elles la même direction ?
- Caractériser $\{I\} = (O\ O') \cap (A\ B)$

Pour la démonstration, se référer au texte introductif de Monsieur LETOURNEUX

- I dépend-il du choix de O ?

3) Si (A, B, C, D) est un parallélogramme alors (A, C) et (B, D ont le même milieu (cf construction précédente)

- Si (M, N) et (Q, R) ont le même milieu alors (M, Q, N, R) est un parallélogramme.

4) Projection du milieu I d'un bipoint (A, B)

Ici c'est un résultat et non un axiome (première approche du théorème de Thalès)

Enoncés des résultats par projection appliqués au triangle.

De plus, Dans la démonstration, on obtient le résultat :

Si M et N sont les milieux des côtés (A, B) et (B, C) d'un triangle A B C alors $2\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

5) Une transformation utilisant le milieu : la symétrie centrale

Rappel des constatations faites lors de la manipulation

Pourquoi l'appareil a-t-il été construit ainsi 

<u>Définition</u> : On appelle symétrie de centre O la bijection du plan pour laquelle tout point M a pour image M' tel que O est milieu de (M, M')

- $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{OM'}$ ou $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$

Construction de l'image d'un point, de l'antécédent d'un point

Image d'une droite.

Travaux dirigés : Recherche de figures usuelles admettant un centre de symétrie, cas particulier du parallélogramme.

Imade de deux droites parallèles, de deux droites sécantes, du milieu d'un bipoint.

EXERCICES

I Soient deux bipoints (O, F) et (B, C) de même milieu D.

On appelle A le milieu de (O, C), G le point d'intersection des droites (O F) et (A B), E l'image de C dans la projection sur (O F) parallèlement à (A B)

1) Démontrer que G est le milieu de (O, E) et D est le milieu de (G, E)

2) En déduire que $\vec{OG} = \vec{GE} = \vec{EF}$ et que $\vec{OF} = 3\,\vec{OG}$

3) Montrer en utilisant le point O que $2\,\vec{GA} + 1\,\vec{GB} = \vec{0}$

4) Montrer que $\vec{BO} = 2\,\vec{DA}$ et $\vec{GB} = \vec{CE}$

II Soit un triangle (A, B, C) et M le milieu de (A, B)

On appelle p_1 la projection de direction (BC) de la droite (AB) sur la droite (AC)

p_2 la projection de direction (AB) de la droite (AC) sur la droite (BC)

p_3 la projection de direction (AC) de la droite (BC) sur la droite (AB)

Construire les images de A, M, B par p_1

par p_1 suivie de p_2

par p_1 suivie de p_2 suivie de p_3

Expliquer les résultats trouvés.

III Soient quatre points A, B, C, D non alignés et M, N, P, R les milieux respectifs de (A, B) (B, C) (C, D) (D, A)

1) Trouver les droites de même direction. Expliquer

2) Qu'en conclure pour (M, N, P, R) ?

IV Soient (A, B, C) un triangle et A', C' les milieux respectifs de (B, C) et (A, B) et E le point tel que $\overrightarrow{A'E} = 2\,\overrightarrow{A'C'}$

1) Montrer que E, A, A', B est un parallélogramme

2) Quelle est la direction de la droite (A' C')

3) Montrer que $2\,\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{CA}$

4) Qu'en déduire pour (E, A, C, A')

V Choisir 3 points O, A, B. (O, A) (O, B) sont des représentants des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ respectivement.

1) Expliquer la construction des points C et D tels que $\vec{OC} = \vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{OD} = \vec{U} - \vec{V}$

2) Construire le point E tel que $\vec{OE} = \vec{OC} + \vec{OD}$

3) Que peut-on en conclure pour les points O, A, E ?

Expliquer.

VI Cinq points non alignés A, B, C, D, M sont tels que M est le milieu de (A, D) et (B, C)
I et J sont tels que $\vec{AI} = \vec{AC} - \vec{AM}$ et $\vec{BJ} = \vec{BD} = \vec{BM}$

1) Placer les 7 points sur un dessin
Expliquer avec les mots essentiels

2) Montrer que $\vec{AI} = \vec{JD}$ $\vec{IC} = \vec{BJ}$

3) Quel est le vecteur somme $\vec{MI} + \vec{MJ}$
Qu'en déduire pour les points M, I, J.

Symétrie Centrale. Exercices

I Rechercher les figures géométriques usuelles, les lettres majuscules d'imprimerie ayant un centre de symétrie.

II Les points O, A, B étant éléments d'une droite D, quelles sont les images de A et B dans la symétr de centre O

III Quelle est l'image d'un triplet (A, B, C) dans

. Une symétrie de centre A

. Une symétrie de centre I milieu de (B, C)

Faire deux études distinctes.

IV Etant données deux droites D et Δ de même direction, comment caractériser leurs images dans une symétri de centre O, O n'appartenant ni à D ni a Δ.

V Soient deux droites sécantes en A, D et Δ quelles sont les images de D et Δ et du point A dans une symétrie de centre O, O n'appartenant ni à D ni à Δ.

VI 1) Etant donné un bipoint (A, B) et son milieu I, montrer que pour tout point O n'appartenant pas à (AB) $2\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

2) Soient A' et B' les images de A et B dans une symétrie de centre et I' le milieu de (A', B')

Quelle est l'image dans la symétrie de centre O du point I ?

V Soient un parallélogramme (A, B, C, D) de centre K et les milieux respectifs M, N, P, Q de (A, B) (B, C) (C, D) (D, A).

Ecrire entre ces huit points les correspondances dans la symétrie de centre K. Justifier.

Quelle est la nature des (M, N, P, Q) ?

EXERCICES

(A, B, C, D) étant quatre points non alignés du plan et P, Q, R, S les milieux respectifs de (A, B) (B, C) (C, D) et (D, A) montrer que (P, Q, R, S) est un parallélogramme.

Dans un triangle (A, B, C) on appelle (I, J, K) les milieux respectifs des côtés (B, C) (C, A) (A, B) Dans la symétrie de centre I, J a pour image M, K a pour image N

1) Comment caractériser K, J, M, N ? Quelles sont les droites de même direction ?

2) (MN) et (BC) sont-elles droites parallèles ? Pourquoi ?

3) On appelle E le point d'intersection des droites (KM) et (BC)
Montrer que E est milieu de (K, M) ?

4) On appelle D le point d'intersection des droites (BM) et (BN)
Quelle est l'image de D dans la symétrie de centre I ?
Justifier.

EXERCICES

On donne trois points O, A, B

1) Construire le parallélogramme (O, A, C, B)

2) On projette le point C en A' sur (OA) et en B' sur (OB) suivant la direction (AB)
A', C', B' sont-ils alignés. Pourquoi ?

3) Quelle est la nature de (A, A', C, B') de (A, B, B', C) ? Qu'est le point C pour (A', B'.
Expliquer.

4) On appelle H, I, J les images respectives de O, A, B dans la symétrie de centre C
Faire la construction.
Quelle est l'image de la droite OA dans cette symétrie, de la droite OB, de la droite AB, de (B, A') ?

On considère un triangle (A, B, C). Soient I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC] , [CA] et [AB]

On désigne par M le symétrique de J par rapport à I et, par N le symétrique de K par rapport à I.

1) Démontrer que les droites (KJ) et (NM) sont parallèles
Démontrer que les droites (KM) et (JN) sont parallèles.

2) On désigne par E le point d'intersection des droites (KM) et (BC). Démontrer que E est le milieu de [K, M]

Démontrer que E est le milieu du segment [B I]

3) Démontrer que la droite (EK) est parallèle à la droite (AI).

§ 6 *DIVISION REGULIERE*

Multiplication d'un vecteur par un entier

entier relatif

rationnel.

1) Deux points A et B étant choisis, construire les points C, D, E... M, N tels que

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$

<u>Définition</u>

Un ensemble de points obtenus par répétition d'une même translation et (ou) de sa réciproque, s'appelle une <u>division régulière</u>

Tous les points sont éléments d'une même droite D.

On pose : $\vec{AB} = 1.\ \vec{AB}$ $\qquad \vec{AM} = (-1)\ \vec{AB}$ $\qquad 0\ .\ \vec{AB} = \vec{0}$

$\vec{AC} = 2.\ \vec{AB}$ $\qquad \vec{AN} = (-2)\ \vec{AB}$

$\vec{AD} = 3.\ \vec{AB}$

2) Exercices de construction de points illustrant les propriétés :

$n \in \mathbb{Z} \qquad p \in \mathbb{Z} \qquad n(p\ \vec{V}) = np.\ \vec{V}$

$(n+p)\ \vec{V} = n\ \vec{V} + p\ \vec{V}$

$n \in \mathbb{Z} \qquad n(\vec{U}+\vec{V}) = n\ \vec{U} + n\ \vec{V}$

3) La projection d'une division régulière sur une droite D' parallèlement à une droite est une divisi[on] régulière sur la droite D'

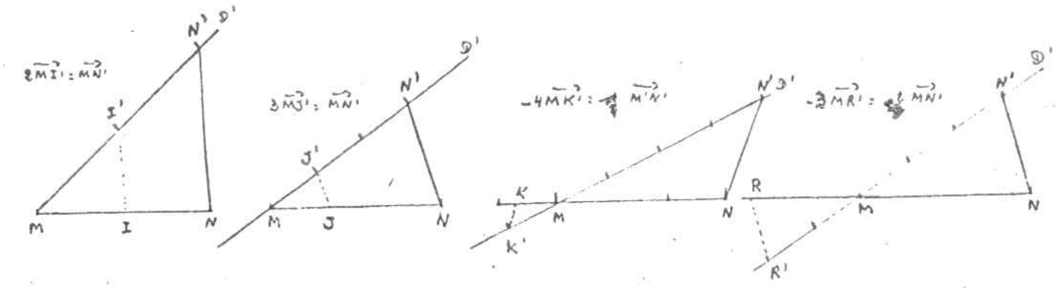
4) Application à la construction d'un représentant de vecteur produit par un rationnel

Si $\vec{AC} = 2\ \vec{AB}$ on pose (A, B) est représentant de $\frac{1}{2}\ \vec{AC}$

$\vec{AD} = 3\ \vec{AB}$ on pose (A, B) est représentant de $\frac{1}{3}\ \vec{AD}$

T.D. : M et N étant choisis construire les points I, J, K, L, R, ... tels que $\vec{MI} = \frac{1}{2}\ \vec{MN}$ $\vec{MJ} = \frac{1}{3}\ \vec{MN}$ $\qquad \vec{MK} = -\frac{1}{4}\ \vec{MN}$ $\qquad \vec{ML} = \frac{3}{2}\ \vec{MN}$ $\qquad \vec{MR} = -\frac{2}{3}\ \vec{MN}$

Construire une division régulière sur une droite contenant N et la projeter



Division régulière

EXERCICES

Placer les points G, H, I, J de la division régulière engendrée par t_{AB} tels que

$\vec{AD} = 3.\ \vec{AB}$	$\vec{AD} = 3.\ \vec{AB}$
$\vec{AH} = 2.\ \vec{AD}$	$\vec{AE} = 4.\ \vec{AE}$
$\vec{AG} = 6.\ \vec{AB}$	$\vec{AI} = 7.\ \vec{AB}$
	$\vec{AJ} = \vec{AD} + \vec{AE}$

Construire deux divisions régulières engendrées par $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de directions différentes.

$\vec{OA}_1 = \vec{U}$ $\quad$ $\vec{OA}_2 = 2\vec{U}$ ...

$\vec{OB}_1 = \vec{V}$ $\quad$ $\vec{OB}_2 = 3\vec{V}$ ...

Construire C_1, C_2, C_3 ... tels que

$$\vec{OC}_1 = \vec{OA}_1 + \vec{OB}_1$$

$$\vec{OC}_2 = \vec{OA}_2 + \vec{OB}_2$$

$$\vec{OC}_3 = \vec{OA}_3 + \vec{OB}_3$$

Observations.

§ 7 HOMOTHETIE DE CENTRE O

Multiplication d'un vecteur par un réel

1) Etude d'une relation dans l'ensemble des points du plan mathématique

Je choisis 3 points O, A, A' d'une droite D

$$
\begin{aligned}
f : P &\longrightarrow P \\
A &\longmapsto A' \\
M &\longmapsto M'
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&(AM) \text{ et } (A'M') \text{ sont parallèles} \\
&(OM) \cap (A'M') = \{M'\}
\end{aligned}
$$

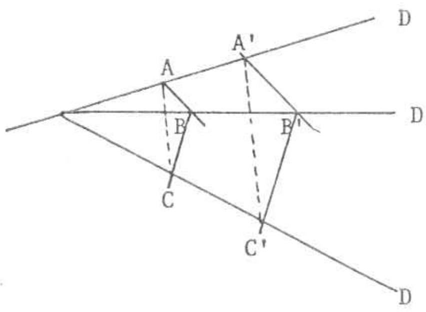
. Construire l'image d'un point, l'antécédent d'un point. Ces points existent et sont uniques s'ils ne sont pas éléments de D

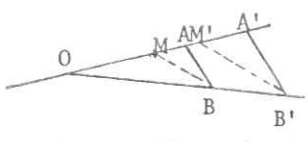
. Construire les images et les antécédents des points de D.

Nécessité d'énoncer une nouvelle règle du plan mathématique :

REGLE 6 Axiome de Desargues (cas sécant)

Etant données trois droites D_1 D_2 D_3 concourantes en O
Pour toutes paires de points {A, A'} {B, B'} {C, C'} incluses respectivement dans D_1 D_2 D_3 telles que les droites (AB) et (A' B') soient parallèles et les droites (BC) et (B', C') soient parallèles, alors les droites (AC) et A' C') sont parallèles.





Construction pour les points de D

. Quelle est l'image de O ?

f est une <u>bijection</u> dans l'ensemble des points du plan.

2) Image d'une droite par la bijection f.

. Si $O \in \Delta$ alors Δ est sa propre image

. Si $O \notin \Delta$ application de la Règle 6

L'image par f d'une droite Δ est une droite parallèle à Δ

3) Conclusion

Les points O, A, A' étant donnés, f est déterminée d'une façon unique

f est une homothétie de centre O.

REGLE 7 A l'homothétie de centre O, on associe un nombre réel unique non nul k tel que pour tout point M du plan et son image M' : $\vec{OM'} = k.\vec{OM}$

f s'appelle l'homothétie de centre O et de rapport k

4) Nous avons réalisé le vecteur produit d'un vecteur par un nombre réel.

Nous admettons que cette opération a les mêmes propriétés que celles de la multiplication d'un vecteur par un rationnel.

Définition : Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{V} = k\vec{U}$

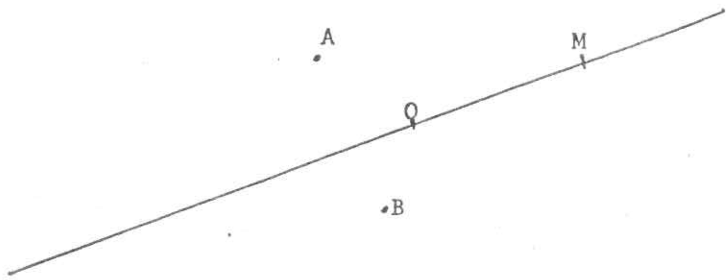
1er résultat : Si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires, ils ont la même direction

2è résultat : Si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ont la même direction alors ils sont colinéaires.

EXERCICES

1) Construire le point M' tel que $\vec{OM'} = -\frac{3}{2}\vec{OM}$

Dans l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$ quelles sont les images de A, B, du triangle A, O, B du triangle A, B, M ?



2) (O, A, B, C) sont quatre points alignés tels que A est le milieu de (O, B) et B le milieu de (O, C).

On appelle f l'homothétie de centre O telle que f(B) = C

On appelle g l'homothétie de centre O telle que g(A) = B

1) Construire l'image Y d'un point X par f.

2) Construire l'image Z d'un point Y par g.

3) Quelle est la relation f o f

Montrer que les droites (A X) et (C Z) sont parallèles

4) Montrer que $\vec{CZ} = 4\ \vec{AX}$

3) Etant donnés deux points A et I du plan

1) Construire l'image C de A dans la symétrie de centre I

Construire l'image C' de I dans la symétrie de centre C

2) On appelle f l'homothétie de centre A telle que $f(C) = C'$

Construire l'image M' d'un point M par f ($M \notin (AC)$)

3) On appelle N l'image de M dans la translation $t_{CC'}$

Que pensez vous de (C, C', N, M)

Montrer que $N \in (M'\ C')$

4) Soit K le point de la droite (C' M') tel que (C, K) et (A, M) sont parallèles

Quels sont les points du dessin qui sont milieux. Justifier.

5) Démontrer que (IN) et (CK) sont parallèles

6) Trouver toutes les homothéties de centre C' qui mettent en relation les points construits

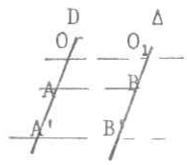
Application

Utiliser ce problème (A. 2. 3. 4) pour trouver la construction d'un aggrandisseur.

§ 8 THEOREMES DE THALES

1) 1er Exercice : Projeter trois points O, A, A' éléments d'une droite D en (O_1 , B, B') sur une droite Δ parallèle à D, suivant une direction δ

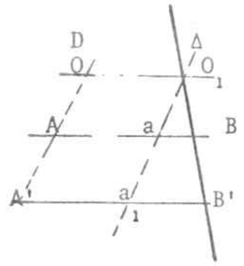
Qu'en conclure ?



Nous avons réalisé t_{OO_1}

Si $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$ alors $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$

2è Exercice : Projeter trois points O, A, A' éléments d'une droite D sur une droite Δ non parallèle à D suivant une direction δ



1ère ENONCE

Si trois points A, B, C d'une droite D sont tels que $\vec{AC} = k. \vec{AB}$ alors leurs images A', B', C' par projection suivant une direction δ sur une droite D' sont telles que $\vec{A'C'} = k. \vec{A'C'}$.

Préparation de travaux dirigés.

Se donner deux droites et sur chacune d'elles 3 points A, B, C et A', B', C'

- tels que $\vec{AC} = \frac{3}{5} \vec{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \frac{3}{5} \overrightarrow{A'B'}$ (faire le dessin)
- tels que A' et B' sont les projetés de A et B suivant une direction choisie et $\vec{AC} = \frac{3}{5} \vec{AB}$ $\overrightarrow{A'C'} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$ (faire le dessin)

Exprimer les conditions pour que A', B', C' soient les projetés de A, B, C. (faire un dessin)

ENONCE RECIPROQUE

Si trois points (A, B, C) d'une droite D et trois points (A, B', C') d'une droite D' sont tels que :

. A et B et projettent en A' et B' suivant une direction δ

. $\vec{AC} = k \vec{AB}$ et $\vec{A'C'} = k \vec{A'B'}$

alors C' est le projeté de C dans cette même projection.

Cas particulier du milieu :

résultats cohérents avec ceux de V 4

Application au triangle

Exercices : Dans un triangle A B C construire le point M et son projeté M' sur (AC) parallèlement à (BC) tel que $\vec{AM} = - \frac{1}{3} \vec{AB}$

Dans un triangle A B C construire I et J tels que $\vec{AI} = \frac{3}{2} \vec{AB}$, et $\vec{AJ} = \frac{3}{2} \vec{AC}$

§ 9 *DROITE*

Je choisis deux points (O, A) de D et j'utilise la division régulière engendrée par OA.
(O, A) s'appelle un repère de D

Construire les points tels que

B	$\vec{OB} = \frac{3}{2} \vec{OA}$
C	$\vec{OC} = 4 \vec{OA}$
D	$\vec{OD} = - \vec{OA}$
M	$\vec{OM} = k \vec{OA}$

$\frac{3}{2}$, 4, -1, k sont les abscisses respectives de B, C, D, M dans le repère (O, A)

En application du dernier axiome, il existe une bijection entre l'ensemble des points de la droite D et l'ensemble des nombres réels

Notations : (O, A) repère choisi de D, l'abscisse de M dans le repère (O, A) est notée f(M) ou x_M

$$f(O) = 0 \qquad f(A) = 1$$

EXERCICE

points	abscisse dans le repère (O, A)	abscisse dans le repère (O, D)		abscisse dans le repère (O, C)	
B	$\frac{3}{2}$	$\vec{OB} = \frac{3}{2}\vec{OA} = \frac{3}{2}(-\vec{OD})$	$-\frac{3}{2}$	$\vec{OB} = \frac{3}{2}(\frac{1}{4}\vec{OC})$	$\frac{3}{8}$
C	4	$\vec{OC} = \quad = 4(-\vec{OD})$	-4		1
D	(-1)		1		$-\frac{1}{4}$

L'abscisse d'un point d'une droite dépend du repère choisi.

Mesure relative

Un repère étant choisi sur la droite (AB) on appelle mesure relative du bipoint (A, B) : $\overline{AB} = x_B - x_A$

autres énoncés du théorème de Thalès.

> 2è ENONCE de THALES
>
> Si un point M a pour abscisse x dans le repère (O, I) d'une droite D alors son projeté M' sur une droite D' suivant une direction δ à la même abscisse dans le repère (O', I') projeté de (O, I).

> ENONCE RECIPROQUE
>
> Etant données deux droites D et D' munies des repères (O, I) et (O', I') et deux points M et M' :
>
> - Si (O', I') est image de (O, I) par projection suivant une direction δ
> - Et si M et M' ont la même abscisse dans leurs repères respectifs
>
> alors M' est image de M par cette même projection.

> 3è ENONCE DE THALES
>
> Etant donnés trois points (A, B, C) d'une droite D et leurs projetés (A', B', C') d'une droite D' suivant une direction δ
>
> $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

III PARTIE

ENONCE RECIPROQUE

Etant donnés trois points (A, B, C) d'une droite D et trois points (A', B', C') d'une droite D',

Si A' et B' sont les projetés de A et B suivant une direction δ

Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

alors C' est le projeté de C

Théorème de Thalès EXERCICES

1) (A, B, C, D) est un parallélogramme, I le milieu de (C, D), J le milieu de (A, B)

$\{E\} = (AC) \cap (DJ)$ $\{F\} = (AC) \cap (BI)$

Quelles sont les abscisses de E et F dans le repère (A, C) ?

2) Dans un triangle (A, B, C) j'appelle

π_1 : projection de (AB) sur (AC) de direction (BC)

π_2 : projection de (AC) sur (BC) de direction (AB)

π_3 : projection de (BC) sur (AB) de direction (AC).

Choisir M sur (AB). Effectuer les projections π_1, π_2, π_3 ... On obtient successivement les points N, R, S, T, U, V.

3) Dans un triangle (A, B, C), on appelle M, N, R les milieux respectifs de (AB), (AC), BC) et G le centre de gravité

On appelle H le milieu de (M, R), I le milieu de (N, C), F le milieu de (M, C)

Quelles sont les abscisses des points G et F dans le repère (C, M) [même situation qu'à l'exercice 1]

Dans un triangle A B C on appelle I, J, K les points de la droite (AB) ayant pour abscisse respectiv
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ dans le repère (A, B)

1 - Faire la construction

2 - Que dire de J ?

3 - Quelle relation peut-on écrire entre les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AI}$

4 - On projette I, K, B sur (AC) en E et C et F quelle est la direction de projection ?

Que dire de E ?

Quelles sont les abscisses des points A, E, C, F dans le repère (A, F)

Donner les justifications.

III Partie

Une recherche de méthode de travail dans le groupe noua a menés à l'expérience suivante : A partir de figures données que peut-on construire comme textes d'exercices, niveau 4è et 3è ?

Des sous-groupes se sont donc constitués et la figure de la construction I a permis l'élaboration de plusieurs textes.

Textes élaborés à partir de la construction I.

TEXTE 1

On considère un triangle (O, A, B) et le point M, milieu de (A, B)

1) Construire C tel que M soit le milieu de (O, C)

Tracer la droite Δ telle que $\begin{cases} C \in \Delta \\ \Delta \,//\, (AB) \end{cases}$

On pose $\{A'\} = \Delta \cap (OA)$ et $\{B'\} = \Delta \cap (OB)$

Démontrer que A et B sont les milieux respectifs de (O, A') et (O, B')

2) Tracer la droite Δ' telle que $\begin{cases} B' \in \Delta' \\ \Delta' \,//\, (BC) \end{cases}$

On pose $\{J\} = \Delta' \cap (AC)$

Tracer la droite Δ'' telle que $\begin{cases} A' \in \Delta'' \\ \Delta'' \,//\, (AC) \end{cases}$

On pose $\{I\} = \Delta'' \cap (BC)$

Démontrer que C est le milieu de (B, I) et le milieu de (A, J)

En déduire que les droites (A' B') et (I J) sont parallèles.

3) On pose $\{H\} = (O\ I) \cap (AC)$ et $\{K\} = (O\ J) \cap (BC)$

Démontrer que H est le milieu de (O, I), K est le milieu de (O, J).

Démontrer que C est le centre de gravité du triangle (O, I, J).

TEXTE 2

Soit un triangle (O, A, B) ; $M = m(A, B)$ et $C = S_M(O)$

1) Démontrer que (BC) // (OA) et (AC) // (OB).

2) Soient $A' = S_A(O)$ et $B' = S_B(O)$

Démontrer que A', C, B' sont alignés et que $C = m(A', B')$

3) Soient $I = p(A')$ sur (BC) dans la direction (OB)

$I = p(B')$ sur (AC) dans la direction (OA)

Démontrer que $C = m(A, J)$ et $C = m(I, B)$. En déduire que : (IJ) // (AB) et que (A, B, J, I) est un parallélogramme

4) $(OC) \cap (IJ) = \{K\}$

Démontrer que $K = S_C(M)$

5) Classer les bipoints équipollents à (0, M)

(A, B)

(0, A)

TEXTE 3

Triangle (0, A, B) donné.

1) Construire le parallélogramme (0, A, C, B)

2) Projeter C sur (OA) suivant la direction (AB) : $C \longmapsto A'$

Démontrer que $A = m(0,A')$

Projeter C sur (OB) suivant la direction (AB) : $C \longmapsto B'$

Que représente B pour (0, B') ?

Démontrer que A', C, B' sont alignés et que (A' B') // (AB)

3) Construire les parallélogrammes (0, A', I, B) et (0, B', J, C)

Démontrer que $C = m(B, I)$

Que peut-on dire du quadrilatère (A, B, J, I)

4) Trouver tous les bipoints équipollents à (0, B) (0, A) (A, B)

5) Dans la translation t_{OA}, quelles sont les images de 0, de A, de B, de la droite (AC), de la droite (BC).

Dans la translation t_{AB}, quelles sont les images de A, A', C, I ?

6) Soit $\tau = T_{OA}$ et $\sigma = T_{OB}$

Déterminer $\tau \circ \sigma\ (0)$ $\sigma \circ \sigma \circ \tau\ (0)$

$\sigma \circ \tau\ (0)$

Exprimer A', B', C, I, J comme images de 0 par des applications composés de σ et τ.

TEXTE 4

Triangle (A, B, C). Droite D parallèle en C à (AB)

Symétrie centrale de centre C : $A \longmapsto J$

$B \longmapsto I$

Projection $\uparrow_{(BI)}$: $(AJ) \longmapsto D$

$J \longmapsto B'$

$A \longmapsto A'$

1) Démontrer que $C = m(A', B')$

2) Démontrer que $(BB') // (A'I)$

3) Soit $\{O\} = (AA') \cap (BB')$

Démontrer que $B = m(O, B')$

$A = m(O, A')$

4) Démontrer que $(AJ) // (OB')$

5) (OC) coupe (AB) en M et (IJ) en K.

Démontrer que $M = m(A, B)$

$K = m(I, J)$

6) Démontrer que C est le barycentre des points (O, I, J) munis de trois nombres égaux.

Textes élaborés à partir de la construction II

TEXTE 1

Soit un triangle (A, B, C)

1) Construire K tel que $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BK}$ et L tel que $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AL}$

2) Soit $\{N\} = (AC) \cap (BK)$ et $\{O\} = (AL) \cap (BC)$

Quelle est la nature de (A, K, C, B) et (A, B, L, C)

En déduire la position de N et celle de O.

3) $(AL) \cap (BK) = \{G\}$ et $(CG) \cap (AB) = \{M\}$

Démontrer que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

En déduire que $M = m(A, B)$

4) Soit un point I de (BL) tel que

$B \in]I, L[$ Soit $J = S_M(I)$

Démontrer que J appartient à (AC)

TEXTE 2

On considère un triangle (A, B, C) et les points N et O milieux respectifs de (A, C) et (B, C). On construit le point K symétrique de B dans la symétrie de centre N et le point L symétrique de A dans la symétrie de centre O.

1) Démontrer que K, L, C sont alignés

2) Démontrer que (AB), (NO) et (KL) sont des droites parallèles.

3) Démontrer que $C = m (K, L)$

TEXTE 3

Triangle (A, B, C). D_1 // (BC) et $A \in D_1$ $D_1 \cap D_2$ = {K}

D_2 // (AC) et $B \in D_2$ $D_2 \cap D_3$ = {L}

D_3 // (AB) et $C \in D_3$

{N} = (BK) $\cap$ (AC) {O} = (BC) $\cap$ (AL)

1) Démontrer que C = m (K, L)

2) Démontrer que (ON) // (KL)

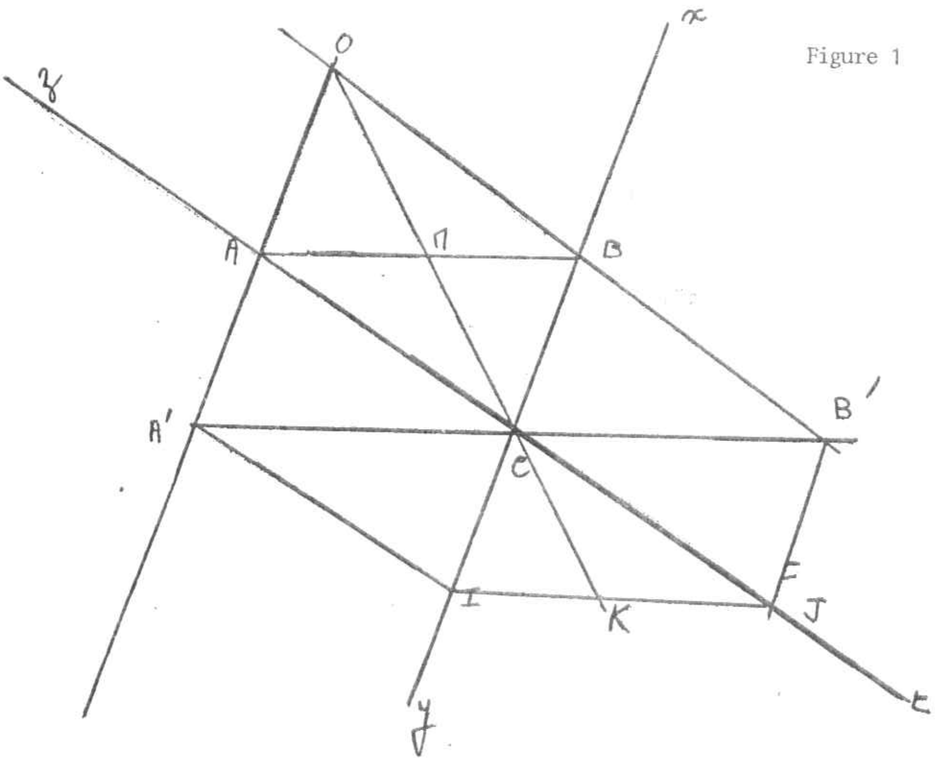


Figure 1

(OB') // (zt) // A'I)

(OA') // (BC) // B'J)

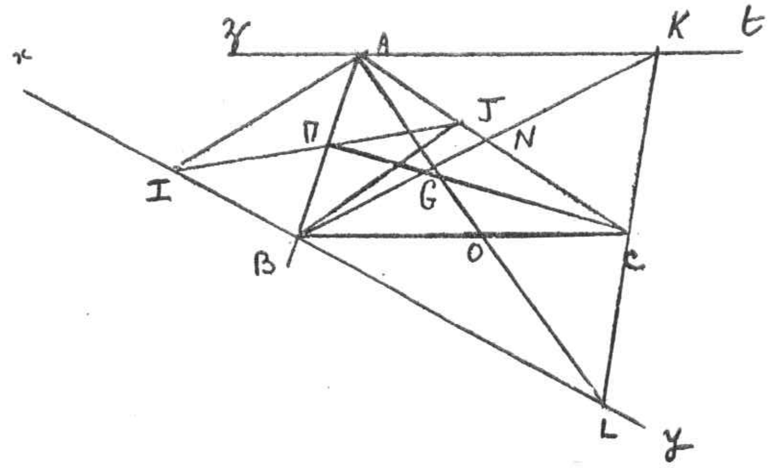


Figure 2

(xy) // (AC) (CK) // (AB)

(BJ) // (AI)

(zt) // (BC)

1) Donner une figure aux élèves et poser les questions

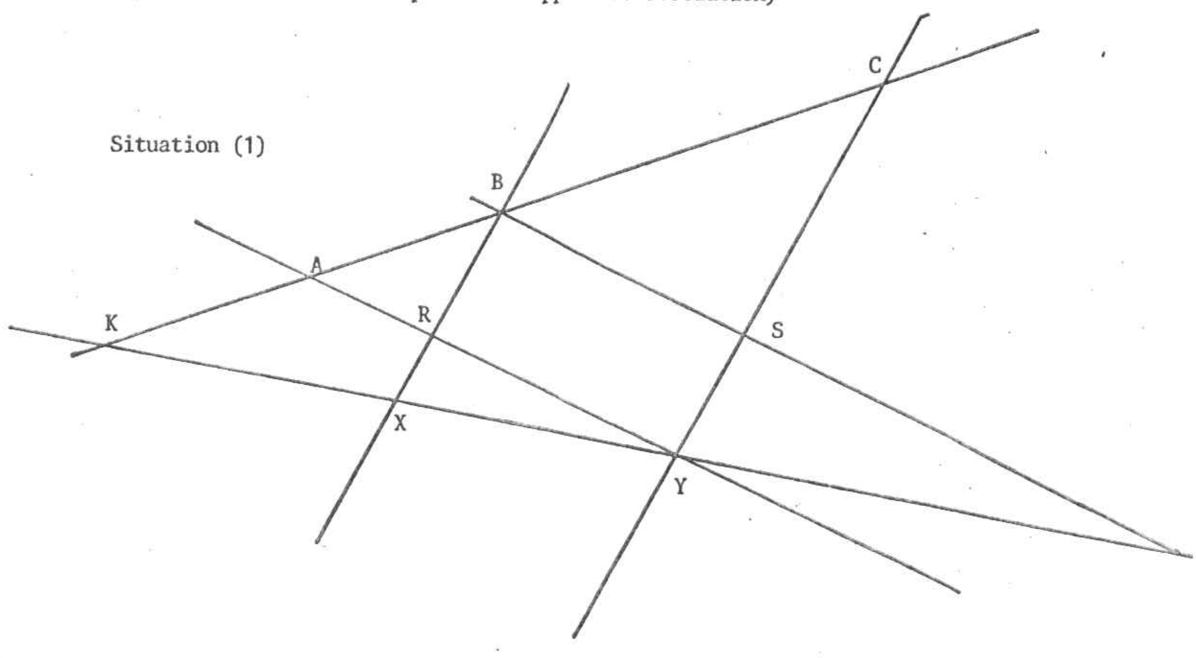
- donner une méthode de construction de cette figure
- construire un problème

2-3-4 Donner une situation aux élèves et poser la question

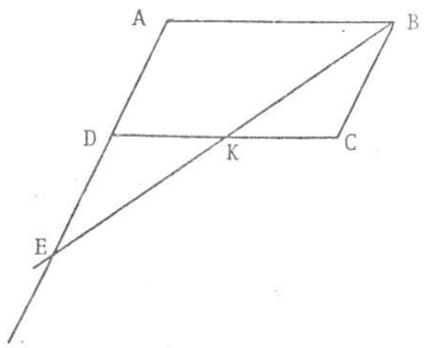
- construire un problème.

Au travers de ces exercices individuels ou en groupe, nous retrouvons les difficultés à préciser le langage (la construction du problème suppose sa résolution)

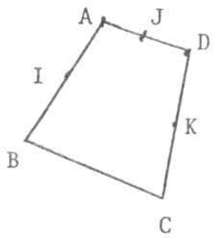
Situation (1)



Situation (2) (A, B, C, D) parallélogramme, K milieu de (D, C) et $\{E\} = (BK) \cap (AD)$



Situation (3) A, B, C, D quatre points non alignés, I, J, K les milieux respectifs de (A, B) (A, D) (C, D)



Situation (4) (O, A, B) non alignés E tel que $\vec{OE} = 3\ \vec{OB}$

F tel que $\vec{OF} = \vec{OA} + 3\ \vec{OB}$

G tel que $\vec{OG} = -\vec{OA} + 3\ \vec{OB}$