IREM

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques des Pays de la Loire

NANTA IREMICA N° 8

Exercices d'analyse fonctionnelle

Jean Dhombres

1978

ISBN 2-86300-012-8

I. R. E. M. DE NANTES

—

EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE

—

Jean DHOMBRES

NANTA-IREMICA N° 8

N° ISBN 2-86300-012-8

1978

NANTA-IREMICA

LISTE DES PUBLICATIONS PARUES A L'IREM de NANTES, mais EPUISEES

Volume 1	Introduction à la logique	MM DURAND et VAN DEN BOSSCHE
Volume 2	Introduction à la théorie des Ensembles	MM DURAND et VAN DEN BOSSCHE
Volume 4*	Documents relatifs au volume 3	J. DHOMBRES
Volume 5	Le langage BASIC	M. BELHACHE
Volume 6**	Echec en mathématiques	A. BIGARD
Volume 9	Algèbre linéaire et géométrie vectorielle	R. SEROUX
Volume 10***	Analyse et Topologie	Melle VENARD et J. DHOMBRES
Volume 12	Introduction à la géométrie et proposition pour la classe de 4è	J.P. LETOURNEUX
Volume 13	Le PL/1 Optimiseur	M. BELHACHE
	Quelques difficultés pédagogiques dans l'enseignement de l'analyse : Second cycle des lycées	MM. FOUQUES et SEROUX
	Trigonométrie, algèbre linéaire Optique	R. SEROUX
Volume 14	Mathématiques et langage informatique (BASIC).	J. BETREMA

* Paru en librairie : Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire 1978 Ed. CEDIC/NATHAN

** Paru en librairie : Echec en Mathématiques Ed. CEDIC 1977

*** A paraître prochainement en librairie.

NANTA-IREMICA

LISTE DES PUBLICATIONS DE L'IREM de NANTES, encore disponibles

Volume 3*	Etude épistémologique et historique des idées de nombre, de mesure et de continu	J. DHOMBRES
Volume 7	Eléments d'analyse fonctionnelle	J. DHOMBRES
Volume 8	Exercices d'analyse fonctionnelle	J. DHOMBRES
Volume 11	Méthodes mathématiques modernes utilisées en théorie de l'approximation	J. DHOMBRES
	Mathématiques comparées : Angleterre, Québec, Allemagne Fédérale, Chine	A. BIGARD
Volume 15	Sensibilisation aux structures de données	M. VIVET
Volume 17	Brochure HP 25	M. QUELFETER
Volume 18	Nombres entiers naturels	Groupe P.E.N.
Volume 19	Nantinfo 78	M. QUELFETER
Volume 20	Mathématiques en L.E.P.	R. PAPIN
Volume 21	Liaison CM2-6ème	CHARLOT-LIZE
Volume 22	Couleurs, électricité et mathématique	H. CARNEC- R. SEROUX
Volume 23	Des applications de la proportionnalité en 6è et 5è	S. POCHE
Volume 24	Continuité et limite d'une fonction numérique de variable réelle.	J.P. LESSENE

* Paru en librairie : Nombre, mesure et continu, Epistémologie et histoire
Ed. CEDIC/NATHAN 1978

INTRODUCTION

Ce volume d'exercices fait suite au volume N° 7 de la collection Nanta-Iremica, volume intitulé : Eléments d'Analyse Fonctionnelle.

On y avait proposé 49 exercices et il a pu paraître utile d'en fournir le corrigé.

En effet, ces éléments d'analyse fonctionnelle ont la double intention de servir des lecteurs, ingénieurs ou autre, dans le cadre d'un stage de quelques jours et des professeurs de l'enseignement secondaire, se réunissant épisodiquement en petits groupes, mais sur un laps de temps assez long, pour étudier le sujet.

Comme pour tous les volumes de la collection Nanta-Iremica, celui-ci ne prétend qu'aider le lecteur à partir d'une expérience acquise au contact de divers stages d'ingénieurs à l'ENSAE ou à l'ENSTA, ou lors de séances de l'IREM.

Le niveau des exercices est très varié et les commentaires volontairement longs, et quelquefois, plusieurs solutions différentes sont fournies.

L'accent ne fut nullement mis sur l'élégance ou la concision mais sur les explications, souvent pesantes, permettant de relier cours et applications, ainsi que sur l'utilisation des méthodes abstraites développées dans le cours.

Une fois cet ouvrage utilisé, le lecteur aura certainement accompli l'effort d'assimilation qui lui permettra d'atteindre par lui-même la beauté de la théorie et donc le convaincra de se débarrasser du présent texte.

Jean DHOMBRES

Juin 1976

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 0

EXERCICE N° 1 :

Soient E et F deux expaces vectoriels sur le même corps K, de dimension m et n respectivement. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(E, F)$? (Réponse : $m.n$).

En particulier, quelle est la dimension de l'espace vectoriel E^* ?

EXERCICE N° 2 :

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension <u>finie</u> n sur le corps K. Soit P un opérateur linéaire de E dans F ; démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1) P admet un inverse à gauche
2) P est injective
3) P est surjective
4) L'image de toute base de E est une base de F
5) Si $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$ est une base de F, alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E.

EXERCICE N° 3 :

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs linéaires sur un espace vectoriel E. Nous supposons que $(I - P_1 P_2)$ admet un inverse noté $(I - P_1 P_2)^{-1}$

<u>Première question</u> : supposons que E soit de dimension finie :

a) en utilisant au besoin l'exercice n° 2, montrer que $(I - P_2 P_1)$ admet un inverse,

b) démontrer les formules suivantes :

$$(I - P_1 P_2)^{-1} = I + P_1 (I - P_2 P_1)^{-1} P_2$$

$$(I - P_2 P_1)^{-1} = I + P_2 (I - P_1 P_2)^{-1} P_1$$

Deuxième question : se servant de b), faut-il faire une hypothèse supplémentaire pour assurer l'existence d'un inverse pour $(I - P_2 P_1)$ dans le cas où E n'est pas de dimension finie ?

EXERCICE N° 4 :

On considère l'espace vectoriel E des suites de nombres réels (Cf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, § 3.8) et F le sous-espace vectoriel des suites de nombres réels telles que seul un nombre fini de termes soient différents de zéro. Caractériser l'espace dual algébrique du sous-espace vectoriel F .

EXERCICE N° 5 :

On considère l'ensemble E des fonctions réelles f d'une variable réelle, définie sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables,
et telles que pour tous les entiers p et q , les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \left| \frac{d^q f}{d x^q}(x) \right| d x$$

soient convergentes.

Première question : montrer que E est un espace vectoriel de dimension infinie. Montrer que si $f \in E$, f tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Deuxième question : à toute fonction f de E , on fait correspondre la fonction g :

$$g : \quad x \longrightarrow g(x) = s(x)\, f(x) + m \frac{df}{dx}(x)$$

où m une constante donnée et s une fonction donnée, indéfiniment dérivable telle que pour tout n entier $\geqslant 0$,il existe un entier k ,un nombre réel M et un nombre positif X_0 tels que pour tout x , $|x| \geqslant X_0$ on ait

$$\left|\frac{d^n s}{d x^n}(x)\right| \leqslant M \left| x^k \right|$$

a) Montrer que A est un opérateur linéaire défini sur E .

b) ψ étant donnée dans E , chercher la fonction ξ de E , dépendant uniquement de ψ , telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\varphi(x)\psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\xi(x)\, dx$$

pour toute fonction φ appartenant à E .

c) Montrer que la correspondance $\psi \longrightarrow \xi$ définit un opérateur linéaire sur E , noté A^*.

d) Déterminer une fonction s , nulle en 0 , de sorte que l'on ait :

$$A A^* - A^* A = I$$

ou I désigne l'opérateur unité de $\mathrm{Hom}(E , E)$.

e) Montrer que les valeurs propres de $A^* A$ sont non négatives.

f) En outre, si $A A^* - A^* A = I$ alors si λ est valeur propre $\neq 1$ de $A^* A$, $(\lambda - 1)$ et $(\lambda + 1)$ sont encore des valeurs propres de $A^* A$.

EXERCICE N° 6 :

E_{n+1} désigne l'ensemble formé par les polynômes à coefficients réels $P(x)$ dont le degré est inférieur ou égal à n :

$$P(x) = \sum_{0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

1°) montrer que E_{n+1} est un espace vectoriel sur le corps des réels de dimension $(n+1)$, dont une base est $\left\{1 , x , x^2, \dots, x^n\right\}$

2°) Donner la dimension du sous-espace vectoriel formé par les polynômes P multiples d'un polynôme donné Q (le degré de Q est supposé égal à k avec $k \leqslant n$).

3°) Par x_0^* , on désigne l'application qui fait correspondre à tout élément P de E_{n+1} le nombre réel $P(x_0)$.[x_0 est un nombre réel] .

Cette application est-elle linéaire sur E_{n+1} ?

4°) En déduire une base de l'espace vectoriel E^*_{n+1} , espace dual de l'espace vectoriel E_{n+1} .

(on pourra montrer que si ($x_0, x_1, \ldots, x_n$) sont ($n+1$) nombres réels distincts , (x_0^* , $x_1^* \ldots x_n^*$) sont ($n+1$) formes linéaires indépendantes de E^*_{n+1}).

5°) En déduire qu'il existe ($n+1$) constantes ($\alpha_0 \ldots \alpha_n$) telles que pour tout élément $P(x)$ de E_{n+1} , on ait :

$$\int_0^1 P(x)dx = \alpha_0 P(x_0) + \text{-------} + \alpha_n P(x_n)$$

Déterminer ces constantes.

EXERCICE N° 7.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K et soit F un sous-espace vectoriel de E . Démontrer la relation suivante :

$$\dim F + \dim F^{\circ} = \dim E$$

EXERCICE N° 8.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K . Démontrer les deux théorèmes suivants : (théorèmes de Rouché)

1°) Un opérateur linéaire P et son transposé ${}^tP$ ont même rang (Cf § 3.4).

2°) Pour qu'une équation linéaire $P(x) = y_0$ soit résoluble (P opérateur linéaire, y_0 vecteur fixe), il faut et il suffit que y_0 soit orthogonal à toutes les solutions de l'équation homogène transposée :

$$^tP(x^*) = 0$$

EXERCICE N° 9.

1ère partie :

On considère la fonction de deux variables réelles $F(x,y)$, définie selon

$$F(x,y) = \text{Log}[(1-x)(1+y)] \text{ pour } -1 < x \leqslant y < +1$$

et $F(x,y) = F(y,x)$ pour tous x, y réels qui satisfont les inégalités

$$-1 < x < +1 \quad ; \quad -1 < y < +1$$

1°) Pour tout entier $n \geqslant 0$, calculer l'intégrale

$$f_n(y) = \int_{-1}^{+1} F(x,y)\, x^n \, dx$$

à partir de la fonction $g_{n+1}(y) = \int_{-1}^{y} \frac{x^{n+1}}{1-x}\, dx$ laquelle est définie pour $-1 \leqslant y < +1$

2°) Calculer $g_{n+1}(y)$

3°) En déduire que f_n est un polynôme de degré n

4°) Calculer explicitement f_0, f_1, f_2 et f_3 en ordonnant ces polynômes par puissances croissantes.

2ème partie :

On pose $$G(x,y) = -\frac{1}{2}F(x,y) + \left(\text{Log}\, 2 - \frac{1}{2}\right)$$

où F désigne la fonction déjà définie en I. On désigne par E l'espace vectoriel formé par les polynômes à coefficients réels, de degré 3 au plus. A tout polynôme P de E, on fait correspondre la fonction Q définie sur $]-1\,,+1[$ selon

$$Q(y) = \int_{-1}^{+1} G(x,y)\; P(x)\, d\,x$$

1°) Etablir que Q est la restriction, à $]-1\,,+1[$, d'un polynôme encore noté Q . Montrer que l'application $\Phi\ :\ P \longrightarrow Q$ est une application linéaire de E dans E .

2°) Soit T_i le polynôme $x \longrightarrow T_i(x) = x^i$ où $i = 0\,,\ 1\,,\ 2$ ou 3 . La famille des $\{T_i\}$, i variant de 0 à 3 , forme une base de E . Quelle est la matrice $[\Phi]$ représentant l'application Φ dans cette base de E ?

3°) Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $[\Phi]$? Donner une base de vecteurs propres dont tout élément vérifie

$$P(1) = 1$$

3ème partie :

Soit λ un paramètre réel quelconque. On désigne par $\mathcal{J}_\lambda$ l'équation différentielle linéaire et du second ordre

$$(1-y^2)\,\frac{d^2f}{dy^2}(y) - 2y\,\frac{df}{dy}(y) + \lambda f(y) = 0$$

1°) Trouver le polynôme P , de degré 3 au plus, satisfaisant $\mathcal{J}_\lambda$ avec $\lambda = 12$ et vérifiant $P(1) = 1$

On admet dorénavant que toute fonction continue f sur $[-1\,,+1]$ et satisfaisant

$$f(y) = \lambda \int_{-1}^{+1} G(x,y)\; f(x)\; dx$$

satisfait aussi l'équation $\mathcal{J}_\lambda$ pour $\lambda \neq 0$

2°) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\mathcal{J}_\lambda$ admette pour solution un polynôme est que $\lambda = n(n+1)$ où n désigne un entier positif ou nul.

3°) On appelle P un polynôme non identiquement nul satisfaisant $\mathcal{J}_\lambda$ pour $\lambda = n(n+1)$. Montrer que $P(1)$ est différent de zéro. En déduire qu'il existe un unique polynôme, noté P_n , de degré n , satisfaisant $1 = P_n(1)$ et l'équation $\mathcal{J}_\lambda$ pour $\lambda = n(n+1)$.

4°) Montrer que $\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$ pour $n \neq m$.

4ème partie :

Soit f une fonction satisfaisant l'équation $\mathcal{J}_\lambda$ pour $\lambda = n_0(n_0+1)$ où n_0 est un entier positif ou nul, et pour tout x appartenant à $]a,b[$ où $a<-1$ et $b>1$.

1°) Montrer que $\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx = 0$ pour tout entier $n \neq n_0$.

2°) Montrer qu'il existe une constante α telle que $g(x) = f(x) - \alpha P_{n_0}(x)$ satisfasse

$$\int_{-1}^{+1} g(x) P_n(x)\, dx = 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 0$$

3°) Montrer que $\int_{-1}^{+1} g(x)\, P(x)\, dx = 0$ pour tout polynôme P de degré quelconque.

4°) Montrer que $g(x) = 0$ sur $[-1, +1]$ et donc que f est un multiple de P_{n_0} Conclure.

(on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un point x_0 de $[-1, +1]$ tel que $g(x) \neq 0$. Par homothétie, on peut se ramener à supposer $g(x_0) = a > 0$. Par continuité, il existe $1 > \delta > 0$ tel que $g(x) > \frac{a}{2}$ pour tout x satisfaisant $|x - x_0| \leqslant \delta$. On considère alors $P(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - \delta^2)$ de sorte que $P(x) \geqslant 1$ pour $|x| \leqslant \delta$ et $|P(x)| \leqslant 1$ pour $\delta < |x| \leqslant 2$. On décompose

$$\int_{-1}^{+1} g(x) \left(P(x - x_0)\right)^n dx$$

en deux intégrales, l'une restant bornée et l'autre tendant vers l'infini avec n . Il y a contradiction).

EXERCICE N° 10.

Soit $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$ deux polynômes à coefficients réels. On désigne par $Q_n(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de $f(x)$ par $g(x)$.

1°) Calculer a_0 et a_1 et montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

2°) La matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres λ_1, λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$. Soit e_1 (resp^t. e_2) le vecteur propre associé à λ_1 (resp^t. λ_2) et dont la première composante dans la base canonique est 1. Calculer e_1 et e_2.

3°) Calculer A^p et en déduire a_n en fonction de n.

INDICATIONS DE SOLUTIONS POUR LES EXERCICES DU CHAPITRE 0

Les solutions des exercices du Chapitre 0 sont assez détaillées pour permettre au lecteur de réviser ces notions d'algèbre linéaire.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 1.

Hom (E , F) est un espace vectoriel sur le corps K . Appelons $L_{i,j}$ l'opérateur linéaire de E dans F défini pour tout x de E par

$$L_{i,j}(x) = x_i f_j$$

Ici, ($e_1, e_2, \dots, e_n$) est une base de E et tout x de E s'écrit de façon *unique*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad (x_i \in K)$$

De même, ($f_1, f_2, \dots, f_m$) est une base de F ,et tout $y = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$

Soit alors L un élément de Hom (E , F). On dispose de l'écriture suivante

$$\begin{aligned} L(x) = \sum_{j=1}^{m} \big(L(x)\big)_j f_j &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) f_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} (x_i f_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} L_{ij}(x) \end{aligned}$$

Par suite, les $m.n$ éléments L_{ij} engendrent Hom (E , F). Ces éléments sont linéairement indépendants puisque la relation de nullité

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} L_{ij} = 0$$

implique, pout tout x de E , l'égalité

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} L_{ij}(x) = 0$$

Soit $$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}x_i\right)f_j = 0$$

et puisque les $\{f_j\}$ forment une base de F, pour tout $j = 1,\dots,m$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}x_i = 0$$

Les x_i étant quelconques, on a bien la nullité de tous les coefficients

$$\alpha_{ji} = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,n \\ j = 1,\dots,m \end{array}$$

En particulier $\mathrm{Hom}(E,K) = E^*$ a une dimension égale à la dimension de E lorsque E est de dimension finie. En général, $\dim(\mathrm{Hom}(E,F)) = (\dim E)\times(\dim F)$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 2.

Nous commencerons par un résultat combinatoire très simple :

On rappelle le théorème suivant : soit X un ensemble fini et f une application de X dans X. Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(1) f est bijective

(2) f est surjective

(3) f est injective.

Si f est injective, $f(X)$ a le même nombre, fini, d'éléments que l'ensemble X, donc coïncide avec X et f est surjective. Réciproquement, si f est surjective, pour tout x dans X, Card $\{f^{-1}(x)\} = 1$. Enfin (1) est par définition la conjonction de (2) et (3).

Démontrons alors le théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K. Pour un opérateur linéaire P de E dans E, il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(1) P est injectif

(2) P est surjectif

(3) P est bijectif.

On part d'un opérateur linéaire $P : E \longrightarrow E$.

Soit une base $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de $\ker P$, et $b_1, b_2, \dots b_q$ une base de $\operatorname{Im} P$. Définissons a_{p+q} pour $q \geqslant k \geqslant 1$ par l'expression $Pa_{p+k} = b_k$ et montrons que $(a_1, a_2, \dots, a_{p+q})$ est une base de l'espace vectoriel E. Soit x un vecteur quelconque de E, Px est un vecteur de $\operatorname{Im} P$ donc il existe q scalaires $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}$, appartenant au corps de base K de E tels que

$$\alpha_{p+1} b_1 + \dots + \alpha_{p+q} b_q = Px = \alpha_{p+1} Pa_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} Pa_{p+q}$$

$$= P(\alpha_{p+1} a_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} a_{p+q})$$

donc il existe y dans $\ker P$ tel que $x = \alpha_{p+1} a_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} a_{p+q} + y$

Mais puisque y appartient à $\operatorname{Ker} P$, il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ dans K assurant l'égalité

$$x = \alpha_{p+1} a_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} a_{p+q} + (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p)$$

Il ne reste plus qu'à démontrer <u>l'indépendance</u> des $p+q$ vecteurs $a_1, a_2, \dots, a_{p+q}$. Or si

$$0 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{p+1} a_{p+1} + \dots + \alpha_{p+q} a_{p+q}$$

on dispose en appliquant P à cette relation linéaire de la relation

$$0 = \alpha_{p+1} b_1 + \dots + \alpha_{p+q} b_q \quad \text{donc} \quad \alpha_{p+1} = \dots = \alpha_{p+q} = 0$$

car $(b_1, b_2, \dots, b_q)$ est une base dans $\operatorname{Im} P$. Dès lors

$$0 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p \quad \text{donc} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0 \text{ car } (a_1, a_2, \dots a_p)$$

est une base de l'espace $\operatorname{Ker} P$.

Dès lors, si P est injectif, $\operatorname{Ker} P$ est réduit au vecteur nul et par suite $\operatorname{Im} P$ coïncide avec l'espace E d'après la construction précédente et réciproquement, si P est surjectif ($\operatorname{Im} P = E$), c'est que $\operatorname{Ker} P$ est réduit à $\{0\}$

L'assertion (1) est équivalente à la conjonction de (2) et (3).

On notera que le raisonnement du théorème revient à construire une base de E sur laquelle le raisonnement du théorème combinatoire énoncé en premier puisse jouer.

Donnons maintenant la solution de l'exercice N° 2.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Il existe un <u>inverse à gauche</u> : $QP = I$ Donc si $Px = 0$ on en déduit $QPx = x = 0$, ce qui est bien l'injectivité $(\operatorname{Ker} P = [0])$ pour un opérateur linéaire.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) Théorème énoncé précédemment

(3) $\Longrightarrow$ (4) Soit ($e_1, \dots, e_n$) une base de E . Alors $Pe_1, \dots, Pe_n$ est un système générateur de l'image de E par P et cette image est F en entier. Comme la dimension de F est n , on a bien que $Pe_1, \dots, Pe_n$ est une base de F .

(4) $\Longrightarrow$ (3) Si $\{Pe_1, \dots, Pe_n\}$ est une base de F, et y un vecteur de F, on a

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Pe_i \qquad \text{donc} \qquad y = P(x)$$

où

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

(3) $\Longleftrightarrow$ (5) Puisque grâce au théorème 2, on a un comportement symétrique de P et P^{-1}. Donc on a (3) pour P^{-1} c'est-à-dire (5).

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 3.

1ère question :

a) E est de dimension finie. Par suite $I - P_2 P_1$ possède un inverse si $I - P_2 P_1$ est injectif, c'est-à-dire si l'équation

$$(1) \qquad x = P_2 P_1(x)$$

admet $x = 0$ pour unique solution. Soit x une solution de cette équation, il vient, en faisant opérer P_1

$$(2) \qquad P_1(x) = P_1 P_2\big(P_1(x)\big)$$

Comme $I - P_1 P_2$ admet un inverse, l'unique solution de (2) est $P_1(x) = 0$

Soit, d'après (1), $x = 0$, ce qui termine la démonstration.

b) Supposons que $I - P_1 P_2$ possède un inverse et étudions $P = I + P_2 (I - P_1 P_2)^{-1} P_1$
On multiplie à gauche par $I - P_2 P_1$:

$$
\begin{aligned}
(I - P_2P_1)\,P &= I + P_2(I - P_1P_2)^{-1}P_1 - P_2P_1 - P_2P_1P_2(I - P_1P_2)^{-1}P_1 \\
&= I + P_2\big((I - P_1P_2)^{-1} - P_1P_2(I - P_1P_2)^{-1}\big)P_1 - P_2P_1 \\
&= I + P_2\big((I - P_1P_2)(I - P_1P_2)^{-1}\big)P_1 - P_2P_1 \\
&= I + P_2P_1 - P_2P_1 \\
&= I
\end{aligned}
$$

On multiplie à droite par $I - P_2P_1$:

$$
\begin{aligned}
P(I - P_2P_1) &= I + P_2(I - P_1P_2)^{-1}P_1 - P_2P_1 - P_2(I - P_1P_2)^{-1}P_1P_2P_1 \\
&= I + P_2\big((I - P_1P_2)^{-1} - (I - P_1P_2)^{-1}P_1P_2\big)P_1 - P_2P_1 \\
&= I
\end{aligned}
$$

Par suite P est l'inverse de $(I - P_2P_1)$. Naturellement une formule analogue s'obtient en changeant P_1 en P_2. On remarque que le calcul de (b) est indépendant de l'hypothèse de dimension finie.

Par suite, si $(I - P_1P_2)$ possède un inverse, il en est de même pour $I - P_2P_1$ dans un espace vectoriel quelconque.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 4.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites constitué par les suites possédant un nombre fini de termes non nuls. Appelons $x^{(n)}$ la suite, élément de F, définie par

$$x_k^{(n)} = \delta_{n,k} \qquad 0 \text{ si } n \neq k \text{ et } 1 \text{ si } n = k$$

Soit L une forme linéaire réelle sur F et posons $L(x^{(n)}) = \alpha_n$. La donnée de la suite $\{\alpha_n\}_{n>0}$ détermine complètement L puisque si $x = \{x_n\}_{n\geqslant 0}$ est un élément de F

$$x = \sum_{n\geqslant 0} x_n\, x^{(n)} \quad \text{et} \quad L(x) = \sum_{n\geqslant 0} x_n\, \alpha_n$$

car ces sommes ne contiennent qu'un nombre fini de termes non nuls.

Réciproquement, soit $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Il existe une unique forme linéaire L sur F telle que $L(x^{(n)}) = \alpha_n$. Il est facile de constater que l'application $L \longrightarrow \{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ réalise une bijection entre le dual algébrique F^* de F et l'espace des suites réelles.

Les espaces vectoriels fournissent un langage commode pour étudier certaines suites récurrentes.

Cherchons, par exemple, une suite $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$, $x_n \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait :

(1) $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ et (2) $x_1 = x_0 = 1$

Appelons G le sous-espace vectoriel de toutes les suites réelles vérifiant la condition (1). Un élément $x = \{x_n\}_{n\geqslant 0}$ de G est entièrement déterminé par la donnée de x_0 et x_1. En termes d'espaces vectoriels, cela signifie que G est un espace vectoriel réel de dimension 2. Pour le vérifier, on peut établir que la suite X de G, $X = \{x_n\}_{n\geqslant 0}$ avec $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et la suite Y de G avec $Y = \{y_n\}_{n\geqslant 0}$ où $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ constituent une base de G. Ceci est facile. Il est pratique alors de chercher une solution de (1) sous la forme $x_n = x^n$ où $x \neq 0$.

Il vient $x^2 = x + 1$

Soit $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

On montre ensuite que :

$$X = \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\}_{n\geqslant 0} \quad \text{et} \quad Y = \{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}_{n \geqslant 0}$$

sont linéairement indépendants. (Si $\alpha X + \beta Y = 0$, cela signifie en particulier, $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{5} = 0$

La seule solution est $\alpha = \beta = 0$).

Dès lors, comme G a pour dimension 2, tout x de G s'écrit avec des coefficients convenables α, β

$$\alpha X + \beta Y$$

Pour terminer la résolution de notre problème, il convient de trouver α, β de sorte que

$$\alpha + \beta = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

Il vient

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

d'où

$$(3) \qquad x_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Les premiers termes, on le vérifie aisément sur (1) et (2) ou sur (3), sont

$x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_5 = 8$, $x_6 = 13$ ...

Ces nombres sont les <u>nombres de Fibonacci</u> qui ont des propriétés combinatoires particulièrement intéressantes.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 5.

<u>1ère question</u> :

Il suffit bien sûr de montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; soient donc f et g deux fonctions de E, λ et μ deux réels. La fonction $\lambda f + \mu g$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, est indéfiniment dérivable. Il reste à vérifier :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^p \frac{d^q}{dx^q} (\lambda f + \mu g)(x) \right| dx < +\infty$$

ce qui résulte immédiatement de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^p \frac{d^q}{dx^q} (\lambda f + \mu g)(x) \right| dx \leqslant |\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^p \frac{d^q}{dx^q} f(x) \right| dx + |\mu| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^p \frac{d^q}{dx^q} g(x) \right| dx$$

Cet espace vectoriel est de dimension infinie ; il suffit pour le prouver d'exhiber une famille infinie d'éléments linéairement indépendants de E : soit, par exemple la famille :

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \quad f_n(x) = e^{-nx^2}$$

Nous aurons besoin de montrer que les fonctions de E tendent vers zéro à l'infini. Pour ce faire, se rappeler que toute fonction continûment dérivable, intégrable sur $\mathbb{R}$, et de dérivée intégrable sur $\mathbb{R}$ tend vers zéro à l'infini. En effet, on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

Mais $\int_a^{+\infty} f'(t)\,dt$ existe par hypothèse, donc f a une limite ℓ lorsque x tend vers l'infini.

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe, donc cette limite ℓ est nulle. On fait le même raisonnement pour $x = -\infty$. En prenant $p = 0$, $q = 0$ et $q = 1$, on constate que $f \in E$ vérifie bien les conditions requises.

2ème question:

a) Montrons que si f est un élément de E , $g = Af$ est un élément de E .

On a :

$$x^p \frac{d^q g}{dx^q}(x) = x^p \frac{d^q}{dx^q}[s f](x) + m x^p \frac{d^{q+1} f}{dx^{q+1}}(x)$$

Soit, en développant :

$$= x^p \Big[s \frac{d^q f}{dx^q} + \text{———} + C_q^i \frac{d^i s}{dx^i} \frac{d^{q-i} f}{dx^{q-i}} + \text{———}$$

$$\text{———} + \frac{d^q s}{dx^q} f \Big](x) + m x^p \frac{d^{q+1} f}{dx^{q+1}}(x)$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^p \frac{d^q g}{dx^q}(x) \right| dx \leqslant \sum_{i=0}^{q} C_q^i \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^p \left(\frac{d^i s}{dx^i} \frac{d^{q-i} f}{dx^{q-i}} \right)(x) \right| dx + |m| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^p \frac{d^{q+1} f}{dx^{q+1}}(x) \right| dx$$

La dernière intégrale converge puisque $f \in E$. D'autre part les hypothèses faites sur s montrent que :

$$\left| x^p \frac{d^i s}{dx^i} \frac{d^{q-i} f}{dx^{q-i}} \right| \leqslant M \left| x^{p+k} \frac{d^{q-i} f}{dx^{q-i}} \right|$$

au voisinage de l'infini, et donc, $f \in E$ impliquant la convergence de l'intégrale du second membre, la convergence de l'intégrale du premier membre est assurée, et finalement la convergence absolue des intégrales considérées.

$Af \in E$ et A est évidemment linéaire de E dans E .

b) On voit facilement que $\xi(x) = s(x)\psi(x) - m\frac{d\psi}{dx}(x)$ convient. En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[s(x)\varphi(x)+m\frac{d\varphi}{dx}(x)\right]\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[s(x)\psi(x)\varphi(x)+m\psi(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\right]dx$$

D'autre part, par intégration par parties, on a :

$$\int_{-x}^{+y}\psi(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx = \left[\psi\varphi\right]_{-x}^{+y}-\int_{-x}^{+y}\varphi(x)\frac{d\psi}{dx}(x)\,dx$$

et, φ et ψ , éléments de E , tendent vers zéro à l'infini. Donc on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\frac{d\psi}{dx}(x)\,dx$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[s(x)\varphi(x)+m\frac{d\varphi}{dx}(x)\right]\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[s(x)\psi(x)-m\frac{d\psi}{dx}(x)\right]\varphi(x)\,dx$$

On montre, de même qu'en (a), que ξ ainsi définie est bien un élément de E .

c) On peut d'abord montrer que la correspondance $\psi \longrightarrow \xi$ est bien définie, c'est-à-dire que ξ est unique. Supposons donc que deux éléments de E : ξ_1 et ξ_2 conviennent. On a alors :

$$\forall\,\varphi \in E\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\xi_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\xi_2(x)\,dx$$

ou encore :

$$\forall\,\varphi \in E,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left[\xi_1-\xi_2\right](x)\,dx = 0$$

en particulier, prenons $\varphi : \xi_1-\xi_2$, laquelle est bien dans E , il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\xi_1-\xi_2\right]^2(x)\,dx = 0$$

$\xi_1-\xi_2$ étant indéfiniment dérivable, en particulier continue, cette égalité montre que $\xi_1=\xi_2$

A^* est donc bien défini et donné par la formule déjà établie :

$$(A^*\psi)(x) = s(x)\ \psi(x)-m\frac{d\psi}{dx}(x)$$

Sa linéarité est alors évidente.

d) Soit $f \in E$ et calculons :

$$(A A^* - A^* A) f = s^2 f - ms \frac{df}{dx} + m \frac{d}{dx}(sf) - m^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - \left[s^2 f + ms \frac{df}{dx} - m \frac{d}{dx}(sf) - m^2 \frac{d^2 f}{dx^2}\right]$$

$$= 2m \frac{d}{dx}(sf) - 2ms \frac{df}{dx}$$

$$= 2mf \frac{ds}{dx}$$

On a donc $A A^* - A^* A = I$ si, et seulement si $2m \frac{ds}{dx} = 1$

Soit

$$s(x) = \frac{x}{2m} + \text{constante}$$

Ces fonctions vérifient bien les conditions imposées aux fonctions f. La solution nulle en 0 est alors :

$$s(x) = \frac{x}{2m}$$

e) On part de l'égalité de définition de A^* : $\int A\varphi . \psi \, dx = \int \varphi . A^* \psi \, dx$

dont on peut déduire, pour tout $f \in E$:

$$\int Af . Af \, dx = \int f . (A^* A)(f) \, dx$$

Si on suppose maintenant que $f \neq 0$ vérifie $(A^* A)(f) = \lambda f$, c'est-à-dire que f est un vecteur propre de $A^* A$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[A f(x)\right]^2 dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x)\right]^2 dx$$

L'intégrale d'une fonction positive étant positive, ceci montre : $\lambda \geqslant 0$: <u>les valeurs propres</u> de $A^* A$ <u>sont non négatives</u>.

f) Soit λ une valeur propre de $A^* A$, $f \neq 0$ un vecteur propre correspondant : $(A^* A)(f) = \lambda f$. On suppose que $AA^* - A^* A = I$. Il vient donc :

$$(A^* A)(A^* f) = A^*(A A^* f) = A^*\left[f + A^* A f\right] = (1 + \lambda) A^* f$$

ce qui montre que $A^* f$, s'il s'agit d'un vecteur différent de 0, est vecteur propre de $A^* A$ pour la valeur propre $(\lambda + 1)$.

De même $(A^* A)(Af) = (A A^* - I)(Af) = A \cdot (\lambda f) - Af = (\lambda - 1) Af$, ce qui montre que si $Af \neq 0$, $(\lambda - 1)$ est valeur propre de $A^* A$, Af étant un vecteur propre correspondant.

Mais supposons que $A f = 0$. On a alors $A A^* f = f + A^*(A f) = f$, c'est-à-dire $\lambda = 1$, ce qui est refusé par hypothèse puisque $f \neq 0$.

Supposons que $A^*f = 0$, on a alors $A^*A\,f = -f$ donc $\lambda = -1$, ce qui est impossible puisque les valeurs propres sont $\geqslant 0$. Ceci termine la démonstration. On pourrait facilement poursuivre et expliciter les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 6.

1ère question :

Par définition de E_{n+1} , on note que le système constitué par les polynômes :

$$\begin{cases} P_o(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ \vdots \\ P_n(x) = x^n \end{cases}$$

est un système de générateurs puisque tout polynôme de E_{n+1} s'écrit sous la forme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{k=n} a_k P_k(x)$$

Le système précédent constitue également un système indépendant, il suffit de vérifier que l'identité

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k \equiv 0$$

implique $a_k = 0$ pour tout k compris entre 0 et n, ce qui est bien connu.

Par conséquent, le système $\{P_0 , P_1 , \ldots , P_n\}$ constitue une base de l'espace vectoriel réel E_{n+1} et la dimension de E_{n+1} est $n+1$.

2ème question :

On dit qu'un polynôme P est un multiple d'un polynôme Q si l'on a :

$$P(x) = Q(x)\ D(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $D(x)$ est un polynôme.

Puisque le degré de Q est égal à k ($k \leqslant n$), il est clair que le degré de D doit être inférieur ou égal à $n-k$ afin que P appartienne à E_{n+1} .

De plus, à tout polynôme de E_{n+1} multiple de Q on fait correspondre un unique polynôme D de degré inférieur ou égal à $n-k$ et réciproquement à tout polynôme D de degré inférieur ou égal à $n-k$, on fait correspondre un unique polynôme P de E_{n+1} , grâce à :

$$P = Q.D$$

Cette correspondance définit une bijection entre le sous-ensemble de E_{n+1} des polynômes multiples de Q et l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-k$. On vérifie sans peine que l'ensemble des polynômes de E_{n+1} , multiples de Q , constitue un sous-espace vectoriel de E_{n+1} .

On vérifie aussi que la correspondance $P \longrightarrow D$ est un isomorphisme (c'est-à-dire une bijection linéaire) entre le sous-espace vectoriel des polynômes multiples de Q et l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-k$, soit E_{n-k+1}.

De plus, deux espaces vectoriels isomorphes (et de dimension finie) ont la même dimension. En définitive, la dimension du sous-espace vectoriel des polynômes multiples du polynôme Q est la dimension de E_{n-k+1} , c'est-à-dire $n-k+1$.

(On peut aussi raisonner de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)\left(\sum_{i=1}^{i=n-k} a_i\, x^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n-k} a_i\, Q(x)\, x^i \end{aligned}$$

puis montrer que les $Q(x)\,x^i$ constituent un système linéairement indépendant de générateurs de l'espace des polynômes de E_{n+1} , multiples du polynôme Q. Ce qui permet d'affirmer que la dimension de cet espace est $n-k+1$).

<u>3ème question</u> :

x_o^* désigne une application définie dans E_{n+1} à valeur dans $\mathbb{R}$.

$$x_o^* \;:\; P \longrightarrow P(x_o)$$

(on fera attention à ne pas confondre P élément de E_{n+1} avec $P(x)$, valeur au point x du polynôme P).

$$x_o^*(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 P_1(x_o) + \lambda_2 P_2(x_o)$$

Mais

$$P_1(x_o) = x_o^*(P_1)$$

$$P_2(x_o) = x_o^*(P_2)$$

Donc :

$$x_o^*(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 x_o^*(P_1) + \lambda_2 x_o^*(P_2)$$

ce qui établit la linéarité de la forme x_o^* .

L'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ constitue un espace vectoriel, noté E^* ; dual algébrique de E .

Ainsi donc, on peut définir la somme $x_1^* + x_2^*$ de deux formes linéaires du type précédent. Cependant la somme $x_0^* + x_1^*$ n'est pas de la forme x_2^* : c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre x_2 de $\mathbb{R}$ tel que pour tout P de E_{n+1} on ait

$$x_2^*(P) = (x_0^* + x_1^*)(P)$$

Cela signifierait en effet

$$P(x_2) = P(x_0) + P(x_1) \quad \text{pour tout } P \text{ de } E_{n+1}$$

ce qui est impossible si $x_0 \neq x_1$ et $n \geqslant 1$

Toutefois x_2^* est un élément de E^*: espace dual algébrique de E

On utilise alors le théorème suivant démontré dans le cours:

le dual algébrique E^* d'un espace vectoriel de dimension finie E est un espace vectoriel de même dimension.(cf Exercice N° 1)

4ème question :

La dimension de E^*_{n+1} est donc $n+1$. Il suffit de trouver $(n+1)$ vecteurs de E^*_{n+1} indépendants pour pouvoir assurer qu'il s'agit d'une base dans E^*_{n+1} .

Rappelons que des vecteurs $L_0, L_1, L_2 \dots L_n$ de E^*_{n+1} sont dits linéairement indépendants si

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i L_i = 0$$

entraîne $a_i = 0$ pour tout i entre 0 et n. Mais le 0 de cet espace est à entendre comme la forme linéaire nulle sur E_{n+1} , c'est-à-dire que l'égalité précédente signifie

pour tout P de E_{n+1} : $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} a_i L_i(P) = 0$

Choisissons alors $(n+1)$ nombres réels deux à deux distincts x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces $(n+1)$ nombres définissent $n+1$ formes linéaires $x_0^*, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Montrons que ces $n+1$ formes linéaires sont indépendantes au sens de E_{n+1}^*.

Nous devons vérifier que :

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \, x_i^* = 0$$

entraîne $a_i = 0$ pour i variant de 0 à n, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \, x_i^* (P) = 0$$

pour tout polynôme P de E_{n+1} entraîne $a_i = 0$. Plusieurs méthodes sont possibles.

Première méthode.

Choisissons un polynôme P_j, appartenant à E_{n+1} valant 1 au point $x = x_j$ et 0 en $x = x_i$ pour i = 0, 1, 2...j-1, j+1,...,n. Il est facile de former un tel polynôme (on a sans doute déjà rencontré les polynômes d'interpolation de Lagrange).

$$P_j(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0,\ldots,n \\ i \neq j}} (x - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0,\ldots,n \\ i \neq j}} (x_j - x_i)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

$P_j(x)$ est un polynôme de degré n et tel que :

$$P_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ces (n+1) polynômes P_j nous permettent un calcul facile.
Appliquons l'hypothèse

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \, x_i^* (P) = 0$$

aux n+1 polynômes P_j. Il vient n+1 équations

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \, P_j(x_i) = a_j = 0$$

c'est-à-dire les conditions $a_j = 0$ pour j = 0, 1...n. On en conclut :

<u>les n+1 formes linéaires</u> $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*$ <u>sont linéairement indépendantes dans l'espace dual algébrique de</u> E_{n+1} <u>et conformément à ce qui a été dit, constituent une base de l'espace dual de</u> E_{n+1} (noté E_{n+1}^*).

Deuxième méthode :

Plus directement, écrivons l'identité

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \; x_i^* \; (P) = 0$$

pour un polynôme P arbitraire de E_{n+1}.

$$P(x) = b_0 + b_1 \, x + \cdots + b_n \, x^n$$

où les b_n sont $n+1$ nombres réels arbitraires.

On écrit :

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \left(\sum_{j=0}^{j=n} b_j \; x_i^j \right) = 0$$

Ordonnons par rapport aux b_j :

$$\sum_{j=0}^{j=n} b_j \left(\sum_{i=0}^{i=n} a_i \; x_i^j \right) = 0$$

Cette égalité devant être vraie pour toutes valeurs des b_j , on en déduit

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \; x_i^j = 0 \qquad \text{pour tout j entre 0 et n.}$$

Les inconnues sont les $n+1$ nombres a_0 , a_1 , ..., a_n . Pour qu'un tel système linéaire de $n+1$ équations et à $n+1$ inconnues a_0 , ..., a_n ait une solution distincte de la solution triviale il faut et il suffit que le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

soit nul.

Un tel déterminant fait partie de la panoplie du bon calculateur (déterminant de Van der Monde).

Indiquons un procédé de calcul de ce déterminant. Remplaçons x_n par une variable indéterminée x .

Le déterminant devient une fonction de x. En développant selon la dernière colonne, on constate que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x^n \end{vmatrix} = P(x)$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à n en x. Visiblement ce polynôme est nul pour $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_{n-1}$ car le déterminant a deux colonnes proportionnelles. Nous connaissons les n racines réelles de $P(x)$, ce dernier s'écrit alors

$$P(x) = \lambda \prod_{i=0}^{i=n-1} (x - x_i)$$

où λ est un nombre réel à déterminer. λ n'est autre que le coefficient du terme de plus haut degré en x : ce terme se calcule sur l'expression du déterminant donnant $P(x)$, à savoir comme un déterminant d'ordre (n-1)

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ x_0^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}$$

Il vient donc une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}

$$P(x_n) = \Delta_n = \Delta_{n-1} \prod_{i=0}^{i=n-1} (x_n - x_i)$$

Soit la valeur de Δ_n, puisque $\Delta_1 = 1$.

$$\boxed{\Delta_n (x_0, x_1, \ldots x_n) = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 0} (x_i - x_j)}$$

Le déterminant de Van der Monde est donc différent de zéro si, et seulement si les x_i sont des nombres distincts, ce qui est ici l'hypothèse. Le système

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \, x_i^j = 0$$

n'a donc que la solution triviale $a_i = 0$ ce qui implique l'indépendance linéaire des x_i^* .

Nous venons donc de démontrer que toute forme linéaire L sur E_{n+1} pouvait s'écrire, avec des coefficients convenables,

$$L = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i x_i^*$$

<u>5ème question</u> :

Etudions l'application $P \longrightarrow \int_0^1 P(x)\,dx$ définie sur E_{n+1} et à valeurs réelles.

Cette application est une forme linéaire sur E_{n+1} grâce aux propriétés connues de l'intégrale

$$\begin{cases} \int_0^1 \left(P_1(x) + P_2(x)\right) dx = \int_0^1 P_1(x)\,dx + \int_0^1 P_2(x)\,dx \\ \int_0^1 \lambda P(x)\,dx = \lambda \int_0^1 P(x)\,dx \end{cases}$$

Grâce à la question 4, la forme linéaire $P \longrightarrow \int_0^1 P(x)dx$ est un élément de E_{n+1}^* et s'écrit avec des coefficients convenables $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \alpha_0 x_0^*(P) + --- + \alpha_n x_n^*(P)$$

pour tout polynôme P de E_{n+1} .

Bien entendu, les coefficients α_i sont indépendants du polynôme P (mais dépendent de la dimension n). On peut les calculer à partir des polynômes P_j de Lagrange, polynômes dont il a été question à la quatrième question. (1ère méthode). En effet, ces (n+1) polynômes P_j constituent <u>une base de</u> E_{n+1}

$$\int_0^1 P_j(x)\,dx = \alpha_0 x_0^*(P_j) + --- + \alpha_n x_n^*(P_j) = \alpha_0 P_j(x_0) + --- + \alpha_n P_j(x_n)$$

$$= \alpha_j \qquad \text{puisque} \qquad P_j(x_i) = \delta_{ij}$$

D'où :

$$\boxed{\alpha_j = \frac{\int_0^1 \left(\prod_{i \neq j} (x - x_i)\right) dx}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}} \qquad \text{(i variant de 0 à n).}$$

Une autre méthode consiste à calculer explicitement $\int_0^1 P(x)\,dx$ sur un polynôme P arbitraire de E_{n+1}

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i x^i \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_j x_j^*(P) = \int_0^1 P(x)\,dx$$

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=n} b_i \left(\frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_j \left(\sum_{i=0}^{i=n} b_i \; x_j^i\right)$$

En identifiant par rapport à b_i (c'est-à-dire par rapport aux $n+1$ formes indépendantes $P \longrightarrow b_i$, coefficient d'ordre i), il vient

$$\frac{1}{i+1} = \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_j x_j^i$$

ce qui fournit les α_i grâce à une résolution d'un système de Cramer, dont le déterminant (de Van der Monde) est différent de zéro.

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \text{---------} & 1, & \text{-------} & 1 \\ x_0 & \text{----} & x_{i-1}, \; \frac{1}{2}, \; x_{i+1} & \text{----} & x_n \\ x_0^n & \text{-----} & x_{i-1}^n, \; \frac{1}{n+1}, \; x_{i+1}^n & \text{----} & x_n^n \end{vmatrix}}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ n \geqslant i > j \geqslant 0}} (x_i - x_j)}$$

On en déduit l'égalité :

$$\alpha_i = \frac{\int_0^1 \prod\limits_{j \neq i} (x - x_j)\,dx}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \text{-------} & 1 & \text{------} & 1 \\ x_0 & \text{----} & x_{i-1}, \frac{1}{2}, x_{i+1} & \text{----} & x_n \\ x_0^n & \text{----} & x_{i-1}^n, \frac{1}{n+1}, x_{i+1}^n & \text{----} & x_n^n \end{vmatrix}}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ n \geqslant i > j \geqslant 0}} (x_i - x_j)}$$

Exemple n = 1 : E_2 est l'espace vectoriel des polynômes réels de degré 1 au plus.
On choisit par exemple
Dès lors $$x_0 = 0 , \quad x_1 = 1$$

où $$\int_0^1 P(x)\,dx = \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P(1)$$

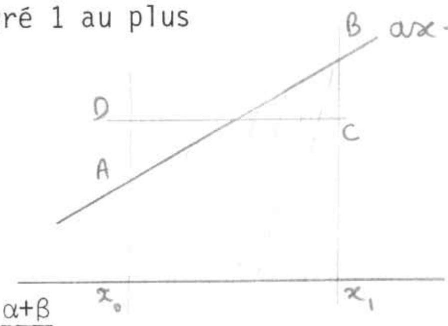
$$\alpha_0 = \frac{\int_0^1 (x-x_1)\,dx}{(x_0-x_1)} = -\int_0^1 (x-1)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^1 (x-x_0)\,dx}{(x_1-x_0)} = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{P(0)+P(1)}{2}}$$

On vérifie bien $\alpha_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & x_1 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & 1/2 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \dfrac{1}{2}$

On vérifie de même que pour tout polynôme de degré 1 au plus
$$\int_0^1 (ax+b)\,dx = \frac{a}{2} + b = \frac{P(o) + P(1)}{2}$$



L'aire du trapèze $x_0\ x_1\ B\ A$ est celle du rectangle $x_0\ x_1\ C\ D$

Exemple n° 2 : Prenons le cas où $x_0 = \alpha$, $x_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $x_2 = \beta$ avec $\alpha \neq \beta$

On calcule à partir des formules précédentes, conduit à
$$\int_\alpha^\beta P(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[P(\alpha) + 4P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + P(\beta)\right](\beta-\alpha)$$

pour tout polynôme de degré au plus égal à 2. Cette formule traduit une propriété géométrique de la parabole.

De fait, selon le choix des nombres x_0, $x_1, \ldots, x_n$, diverses propriétés des nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ peuvent être déduites. Le calcul présenté peut être poussé beaucoup plus loin et constitue les formules de quadrature mécanique sur lesquelles on insiste beaucoup en théorie numérique de l'approximation d'un opérateur (intégration de Gauss).

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 7.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ une base de E telle que $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ soit une base de F. D'après le cours, il existe une base conjuguée $\{e^*_1, e^*_2, \dots, e^*_n \}$ de E^* pour laquelle :

$$e^*_i (e_j) = \delta_{ij} \begin{cases} = 0 ; & i \neq j \\ = 1 ; & i = j \end{cases}$$

Par suite, l'orthogonal F^0 de F, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur E, nulles sur F, est engendré par $\{ e^*_{k+1}, \dots, e^*_n \}$. Donc la dimension de F^0 est $(n - k)$ d'où le résultat.

Considérons l'application canonique I qui identifie E et E^{**} lorsque E est de dimension finie. Le sous-espace vectoriel $(F^0)^0$ est l'image, par I, d'un sous-espace vectoriel F' de E. $I(F') = (F^0)^0$. Mais on a bien sûr $I(F) \subset (F^0)^0$. Or la dimension de $(F^0)^0$ est $n-(n-k) = k = \dim F$ et $\dim I(F) = k$. Donc $(F^0)^0$ s'identifie à F.

Exercice n° 8

Soit $P : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

On appelle rang de P la dimension de son image.

$$Rg(P) = \dim (Im P)$$

D'après le cours, on a une autre formule pour ce rang

$$= \dim E - \dim(Ker\ P)$$

1) Pour établir que P et ${}^tP$ ont même rang, montrons d'abord que le noyau de P coïncide avec l'orthogonal de l'image de ${}^tP$.

$P(x) = 0$ équivaut à $(P(x), x^*) = 0$ pour tout x^* de P. Autrement dit l'équation

$P(x) = 0$ équivaut à $(x, {}^tP(x^*)) = 0$ pour tout x^* de P. C.q.f.d.

Donc $\dim(Ker\ P) = \dim ((Im\ {}^tP)^0)$

D'après l'exercice n° 7, comme ${}^tP : F^* \longrightarrow E^*$ et que nous identifions E et E^{**} :

$$\begin{aligned} \dim(Im\ {}^tP)^0 &= \dim E - \dim(Im\ {}^tP) \\ &= \dim E - Rg({}^tP) \end{aligned}$$

Nous avons établi

$$\dim(Im\ {}^tP)^0 = \dim(Ker\ P)$$

Donc

$$\begin{aligned} \dim(Ker\ P) &= \dim E - Rg({}^tP) \\ &= \dim E - Rg(P) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Rg(P) = Rg({}^tP)}$$

2) Soit $y_0 \in F$. Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $P(x) = y_0$ ait une solution au moins, $x \in E$.
Si $P(x) = y_0$ et si ${}^tP(x^*) = 0$ où $x^* \in F^*$, on a

$$(y_0, x^*) = (P(x), x^*) = (x, {}^tP(x^*) = 0 \quad \text{donc} \quad (y_0, x^*) = 0$$

Réciproquement, supposons que $(y_0, x^*) = 0$ pour tout x^* de F^* tel que ${}^tP(x^*) = 0$
Précédemment, nous avons établi que $\text{Ker } P = (\text{Im } {}^tP)^0$. En raisonnant sur ${}^tP$, au lieu de P, et en rappelant que ${}^t({}^tP) = P$, grâce à l'identification de E et E^*, on déduit

$$\text{Ker}({}^tP) = (\text{Im } P)^0$$

Donc, notre hypothèse revient à admettre que $y_0 \in (\text{Ker}({}^tP))^0$, c'est à dire, grâce encore à l'exercice n° 7 qui prouve $(F^0)^0 = F$, que $y_0 \in \text{Im } P$ donc que $P(x) = y_0$ possède une solution x.

En particulier, si le noyau de ${}^tP$ est réduit à $\{0\}$, c'est que l'opérateur P est surjectif de E dans F.

Ces résultats constituent les théorèmes de Rouché sur la résolution des équations linéaires.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 9

- 1ère partie -

1°)
$$\begin{aligned} f_n(y) &= \int_{-1}^{+1} F(x,y)\, x^n\, dx \\ &= \int_{-1}^{y} \log\big[(1-x)(1+y)\big] x^n\, dx + \int_{y}^{1} \log\big[(1+x)(1-y)\big] x^n dx \\ &= \int_{-1}^{y} \log\big[(1-x)(1+y)\big] x^n\, dx + (-1)^n \int_{-1}^{-y} \log\big[(1-x)(1-y)\big] x^n dx \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer, par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{y} \log\big[(1-x)(1+y)\big] x^n dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \log\big[(1-x)(1+y)\big]\right]_{-1}^{y} + \frac{1}{n+1}\int_{-1}^{y} \frac{x^{n+1}}{1-x}\, dx \\ &= \frac{y^{n+1}}{n+1}\log(1-y^2) + \frac{(-1)^n}{n+1}\log\big[2(1+y)\big] + \frac{1}{n+1}\, g_{n+1}(y) \end{aligned}$$

Donc :

$$f_n(y) = \frac{(-1)^n}{n+1}\Big[\log\big(2(1+y)\big) + (-1)^n \log\big(2(1-y)\big)\Big] + \frac{1}{n+1}\Big[g_{n+1}(y) + (-1)^n g_{n+1}(-y)\Big]$$

2°) Calculons maintenant la fonction g_n :

$$g_{n+1}(y) = \int_{-1}^{y} \frac{x^{n+1}}{1-x}\, dx = \int_{-1}^{y} \frac{1}{1-x}\, dx - \int_{-1}^{y} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\, dx$$

$$= -\log(1-y) + \mathrm{Log}\, 2 - \int_{-1}^{y} (1 + x + --- + x^n)\, dx$$

$$= -\log(1-y) + \log 2 - \left[x + --- + \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{y}$$

3°) On peut désormais calculer f_n :

$$f_n(y) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left[\mathrm{Log}(2(1+y)) + (-1)^n \mathrm{Log}(2(1-y)) \right]$$

$$+ \frac{1}{n+1} \left[(1+(-1)^n)\log 2 - \left(\log(1-y) + (-1)^n \log(1+y) \right) - \left[x + --- + \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{y} + (-1)^{n+1} \left[x + --- + \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{-y} \right]$$

On envisage deux cas, selon la parité de n

1er cas : n pair :

$$f_n(y) = \frac{4 \log 2}{n+1} + \frac{2}{n+1} \left[(-1) + \frac{(-1)^2}{2} + --- + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right] - \frac{2}{n+1} \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + --- + \frac{y^n}{n} \right]$$

(Expression écrite avec $n > 0$).

2ème cas : n impair :

$$f_n(y) = -\frac{2}{n+1} \left(y + \frac{y^3}{3} + --- + \frac{y^n}{n} \right)$$

On constate bien que dans tous les cas f_n est un polynôme de degré n.

4°)

$$f_0(y) = 4\log 2 - 2$$

$$f_1(y) = -y$$

$$f_2(y) = \frac{4\log 2}{3} - \frac{5}{9} - \frac{y^2}{3}$$

$$f_3(y) = -\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}$$

- 2ème partie -

$$Q(y) = \int_{-1}^{+1} G(x,y)\,P(x)\,dx$$

1°) L'application Φ est bien définie sur E et à valeurs dans E puisque d'après (I), l'image d'un polynôme de degré n est encore de degré n au plus. En outre l'application Φ est linéaire.

2°)

Si $P(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i T_i(x)$ alors $Q(y) = \sum_{i=0}^{3} A_i T_i(y)$

$$\text{et} \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = [\Phi] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

La théorie, ou un calcul élémentaire, prouve que la matrice $[\phi]$ dans la base T_0, T_1, T_2, T_3, est de la forme

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

puisque :

$$\int_{-1}^{+1} G(x,y)\,T_0(x)\,dx = -\frac{1}{2} f_0(y) + (\log 2 - \frac{1}{2})\,2 = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} G(x,y)\,T_1(x)\,dx = -\frac{1}{2} f_1(y) = \frac{1}{2} T_1(y)$$

$$\int_{-1}^{+1} G(x,y)\,T_2(x)\,dx = -\frac{1}{2}f_2(y)+\frac{2}{3}(\log 2-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{18}T_0(y)+\frac{1}{6}T_2(y)$$

et $$\int_{-1}^{+1} G(x,y)\,T_3(x)\,dx = -\frac{1}{2}f_3(y) = \frac{1}{4}T_1(y)+\frac{1}{12}T_3(y)$$

3°) Les valeurs propres de $[\Phi]$ sont alors

$$\lambda_0 = 0 \;;\; \lambda_1 = \frac{1}{2} \;;\; \lambda_2 = \frac{1}{6} \;;\; \lambda_3 = \frac{1}{12}$$

$\underline{\lambda_0 = 0}$ Pour les vecteurs propres, on a le système :

$$\begin{cases} -\frac{1}{18}a_2 = 0 \\ \frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_3 = 0 \\ \frac{1}{6}a_2 = 0 \\ \frac{1}{12}a_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad a_0 \text{ quelconque}$$

Avec la normalisation faite, on a $P_0(x) = 0$

$\underline{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$ Pour les vecteurs propres, on a le système

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{18}a_2 = 0 \\ \frac{1}{4}a_3 = 0 \\ (\frac{1}{6}-\frac{1}{2})a_2 = 0 \\ (\frac{1}{12}-\frac{1}{2})a_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \quad a_0 = a_2 = a_3 = 0 \quad a_1 \text{ quelconque}$$

Avec la normalisation faite, on a $P_1(x) = x$

$\underline{\lambda_2 = \frac{1}{6}}$ Pour les vecteurs propres, on a le système

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}a_0-\frac{1}{18}a_2 = 0 \\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{6})\,a_1+\frac{1}{4}a_3 = 0 \\ (\frac{1}{12}-\frac{1}{6})\,a_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \quad a_1 = a_3 = 0 \quad 3a_0 = -a_1$$

Avec la normalisation faite, on a $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$

$\lambda_3 = \frac{1}{12}$ Pour les vecteurs propres, on a le système

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}a_0 - \frac{1}{18}a_2 = 0 \\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{12})a_1 + \frac{1}{4}a_3 = 0 \\ (\frac{1}{6}-\frac{1}{12})a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{l} a_0 = a_2 = 0 \\ 5a_1 = -3a_3 \end{array}$$

Avec la normalisation faite, on a $P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$

- 3ème partie -

Les quatre polynômes construits en (II) satisfont

$$\lambda_i P_i(y) = \int_{-1}^{+1} G(x,y)\, P_i(x)\, dx \qquad i = 0,1,2 \text{ ou } 3$$

On cherche une équation différentielle satisfaite par ces polynômes.

1°) On commence par déterminer une solution dans E de D_{12}

$P(x)$	$=$	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	12
$P'(x)$	$=$	$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$	$-2x$
$P''(x)$	$=$	$2a_2 + 6a_3x$	$(1-x^2)$

$$0.x^3 + x^2(-2a_2 - 4a_2 + 12a_2) + x(6a_3 - 2a_1 + 12a_1) + 2a_2 + 12a_0 = 0$$

On obtient donc trois équations pour déterminer les quatre coefficients a_0, a_1, a_2, et a_3.

En outre, on impose : $P(1) = 1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$

Il vient :

$$\begin{cases} 6a_2 = 0 \\ 6a_3 + 10a_1 = 0 \\ 2a_2 + 12a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} a_0 = a_2 &= 0 \\ 3a_3 + 5a_1 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 1 \end{aligned}$$

Soit $P(x) = \dfrac{5x^3 - 3x}{2}$ c'est-à-dire le polynôme P_3 déterminé en II.

Grâce à la théorie de Sturm-Liouville (cf cours), on peut montrer que $\lambda Q = P$, avec $P(1) = 1$ équivaut à ce que P satisfasse D_λ.

2°) La condition est nécessaire : supposons que $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ satisfasse D_λ. On doit avoir, si $a_n \neq 0$, en examinant le terme de plus haut degré

$$a_n \left(\lambda - n(n-1) - 2n \right) = 0$$

soit

$$\lambda = n(n+1)$$

La condition est suffisante : supposons $\lambda = n(n+1)$ et cherchons à déterminer $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de sorte que $P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ satisfasse $D_{n(n+1)}$

$$\begin{array}{c|rcl} n(n+1) & P(x) & = & a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ -2x & P'(x) & = & a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\ (1-x^2) & P''(x) & = & 2a_2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left[n(n+1) a_0 + 2a_2 \right] + \left[\left(n(n+1) - 2 \right) a_1 + 6a_3 \right] x \\ & + \cdots + \left[\left(n(n+1) - k(k+1) \right) a_k + (k+1)(k+2) a_{k+2} \right] x^k + \cdots \\ & \left(n(n+1) - (n-1)n \right) a_{n-1} x^{n-1} + \left[\left(n(n+1) - n(n+1) \right) a_n \right] x^n \end{aligned}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+2)(k+1) a_{k+2} - \left(k(k+1) - n(n+1) \right) a_k \right] x^k$$

Pour que la formule précédente soit correcte, il faut que l'on ait fixé $a_{n+1} = 0$ et $a_{n+2} = 0$.

Dès lors, on dispose de la relation de récurrence descendante

$$a_k = \frac{(k+2)\ (k+1)}{k(k+1)-n\ (n+1)}\ a_{k+2}$$

valable pour $0 \leqslant k < n$

Les coefficients se calculent de deux en deux.

<u>Si n est pair</u> : on peut prendre a_0 arbitraire, $a_2 = - \frac{n(n+1)}{2}\ a_0$ etc.

jusqu'à a_n. Tandis que $a_1 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$

$$P(x) = a_0(1 + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0} x^n)$$

<u>Si n est impair</u> : on peut prendre a_1 arbitraire, $a_3 = \frac{2-n(n+1)}{6}$ etc.

jusqu'à a_n. Tandis que $a_0 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$

Il existe donc bien un polynôme, non identiquement nul, de degré n, et solution de $D_{n(n+1)}$ pour tout entier n, positif ou nul.

<u>3°)</u> P est un polynôme de degré n au plus, non identiquement nul, satisfaisant $D_{n(n+1)}$ où n est un entier positif ou nul. Supposons $P(1) = 0$, on déduit $P'(1) = 0$. Dérivons alors l'équation différentielle : il vient

$$(1-x^2)\ P'''(x) - 2x\,P''(x) - 2P'(x) - 2x\,P''(x) + n(n+1)\ P'(x) = 0$$

soit $\quad P''(1) = 0$

Plus généralement, par la formule de Leibniz, on a

$$0 = (1-x^2)\ P^{(k+2)}(x) - 2k\,x\,P^{(k+1)}(x) - \frac{k(k-1)}{2}\ 2\ P^{(k)}(x) - 2x P^{(k+1)}(x) - 2k\,P^{(k)}(x) + n(n+1)\ P^{(k)}(x)$$

Si donc $P^{(k)}(1) = 0$ alors $P^{(k+1)}(1) = 0$

Donc $P(1) = P'(1) = --- = P^{(n)}(1) = 0$

On en déduit $P \equiv 0$ car P est un polynôme de degré n. Ceci contredit le choix de P.

On a donc $P(1) \neq 0$ et le polynôme $P_n(x) = \frac{P(x)}{P(1)}$ satisfait $P_n(1) = 1$, est de degré n si P l'est, et satisfait $\mathbb{I}_{n(n+1)}$.

Un tel polynôme est unique : soit Q_n un autre tel polynôme, alors $P_n - Q_n$ est de degré n au plus, satisfait $\mathbb{I}_{n(n+1)}$ et $(P_n - Q_n)(1) = 0$ donc $P_n = Q_n$.

On note P_n, pour $n \geqslant 0$, l'<u>unique</u> polynôme de degré n satisfaisant $\mathbb{I}_{n(n+1)}$ et $P_n(1) = 1$. D'après la relation de récurrence, quant aux coefficients, on note le résultat suivant de parité :

$$P_n(t) = (-1)^n P_n(-t)$$

4°) On écrit :

$$P_m(x) \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}(x)\right] = -n(n+1) P_n(x) P_m(x)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP_n}{dx}(x)\right) = -n(n+1)\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$

$$= \left[P_m(x)\frac{dP_n}{dx}(x)(1-x^2)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}(x)\frac{dP_m}{dx}(x)\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{+1}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}(x)\right]\frac{dP_n}{dx}(x)\, dx$$

$$= -\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}(x) P_n(x)\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}(x)\right]$$

$$= -m(m+1)\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$

Soit

$$[m(m+1) - n(n+1)]\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$$

Si

$$n \neq m \qquad \text{alors} \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$$

- 4ème partie -

1°) f satisfait $\mathcal{D}_\lambda$ pour tout $x \in]a,b[$, $[-1,1[$ étant strictement inclus dans $]a,b[$. La fonction f est alors indéfiniment dérivable sur $]a,b[$ et la méthode de III (4) convient pour prouver

$$\left(\lambda - n(n+1)\right) \int_{-1}^{+1} f(x)\ P_n(x)\ dx = 0$$

Si donc $\lambda = n_0(n_0+1) \neq n(n+1)$ ou encore $n \neq n_0$ alors $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\ P_n(x)\, dx = 0$

2°) $g(x) = f(x) - \alpha P_{n_0}(x)$

$$\int_{-1}^{+1} g(x)\ P_n(x)\ dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\ P_n(x)\ dx - \alpha \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_{n_0}(x)\ dx$$

$$\int_{-1}^{+1} g(x)\ P_{n_0}(x)\ dx = 0 \qquad \text{si } n \neq n_0 \text{ d'après IV(1) et III(4)}$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x)\ P_{n_0}(x)\,dx - \alpha \int_{-1}^{+1} \left(P_{n_0}(x)\right)^2 dx$$

P_{n_0} étant une fonction continue, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \left(P_{n_0}(x)\right)^2 dx > 0$ car $P_{n_0} \not\equiv 0$, donc

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\ P_{n_0}(x)\, dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1} \left(P_{n_0}(x)\right)^2 dx}$$ satisfait la condition requise.

3°) Soit P un polynôme de degré quelconque n. Les P_0, P_1, ..., P_n forment une base de l'espace des polynômes de degré n au plus (les polynômes P_i, en nombre (n+1) sont linéairement indépendants car de degrés différents et la dimension de l'espace considéré est (n+1)). Donc

$$P = \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_n P_n \quad \text{pour des constantes } \alpha_0, \ldots, \alpha_n$$

convenables. On en déduit bien

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\, g(x)\ dx = 0$$

4°) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} P(x)\, g(x)\, dx = 0$ pour tout polynôme P. On suppose $g(x_0) = a > 0$
Par continuité, il existe un $\delta > 0$ tel que $g(x) > \frac{a}{2}$ pout tout x tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$. On prend $\delta < 1$.
On pose $P(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - \delta^2)$: c'est un polynôme pair, décroissant pour $x \geqslant 0$

de $1+\frac{\delta^2}{2}$ à $1-\frac{1}{2}\left(4-\delta^2\right)=\frac{\delta^2}{2}-1>-1$ pour x = 2 en passant par 1 en $x=\delta$. On a bien $P(x)\geqslant 1$ pour $|x|\leqslant\delta$ et $|P(x)|\leqslant 1$ pour $\delta<|x|\leqslant 2$. Dès lors

$$\int_{-1}^{+1} g(x)\left(P(x-x_0)\right)^n dx = 0$$

car l'expression $\left(P(x-x_0)\right)^n$ est un polynôme de degré n au plus.

Mais ceci s'écrit avec $X = x - x_0$

$$0 = \int_{|x|\leqslant\delta} g(x)\left(P(x-x_0)\right)^n dx + \int_{\substack{|x|>\delta \\ |x|\leqslant 1}} g(x)\left(P(x-x_0)\right)^n dx$$

et

$$\int_{|x|\leqslant\delta} g(x)\left(P(x-x_0)\right)^n dx \geqslant \int_{|x|\leqslant\frac{\delta}{2}} g(x)\left(P(x-x_0)\right)^n dx \geqslant \frac{g}{2}\left(P\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^n$$

Tandis que

$$\left|\int_{\substack{|x|\geqslant\delta \\ |x|\leqslant 1}} g(x)\left(P(x-x_0)\right)^n dx\right| \leqslant \int_{\substack{|x|\geqslant\delta \\ |x|\leqslant 1}} |g(x)|\,dx$$

Mais :

$$\left(P\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^n = \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{4}-\delta^2\right)\right)^n = \left(1+\frac{3\delta^2}{8}\right)^n$$

qui tend vers $+\infty$ avec n, tandis que la deuxième intégrale reste bornée avec n. Donc il n'est pas possible que $g(x_0)>0$ (et donc que $g(x_0)<0$). D'où

$$\forall x \in [-1,+1] : g(x) = 0$$

ou encore

$$f(x) = \alpha P_{n_0}(x)$$

Il n'existe qu'une seule famille de solutions de $\mathbf{D}_{n(n+1)}$ régulières en ± 1 à savoir les multiples de P_n. Ce résultat peut être trouvé comme conséquence de la théorie des équations différentielles.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 10.

Par définition de la division de deux polynômes suivant les puissances croissantes à l'ordre n, on a l'écriture unique :

$$f(x) = g(x)\,Q_n(x) + x^{n+1} R_n(x) \quad \text{où le degré de } Q_n \leqslant n$$

On pose $Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et il faut remarquer qu'à l'ordre suivant $Q_{n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+1} x^{n+1} = Q_n(x) + a_{n+1} x^{n+1}$.

Ici

$$3x + 2 = (x^2 + x - 2)\,Q_n(x) + x^{n+1} R_n(x)$$

1°) En considérant les termes de degré 0 et 1 dans les deux membres de la division pour $n \geqslant 1$, on trouve

$$2 = -2a_0 \qquad \text{et} \qquad 3 = -2a_1 + a_0$$

Soit $\quad a_0 = -1 \quad$ et $\quad a_1 = -2$

Pour $n \geqslant 2$, considérons les termes de degré n dans les deux membres de la division. On trouve

$$0 = -2a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$$

Soit la relation de récurrence valable pour tout $n \geqslant 2$:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

Nous allons étudier cette relation de récurrence par un procédé matriciel. On remarque que l'on peut écrire pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = [A]^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de calculer les puissances successives de la matrice $[A]$.

On utilise pour cela la diagonalisation de la matrice $[A]$.

3°) Les valeurs propres de $[A]$ satisfont l'équation du second degré

$$\lambda \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{2} = 0$$

D'où les valeurs propres

$$\lambda_2 = +1 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

Un vecteur propre associé à λ_1 satisfait

$$x_1 + \frac{1}{2} y_1 = 0$$

et on normalise par convention $e_1 = (1, -2)$ selon l'énoncé.

Un vecteur propre associé à λ_2 satisfait

$$-\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} y_2 = 0$$

et on normalise selon la convention de l'énoncé. $e_2 = (1, 1)$

4°) Dans la base (e_1, e_2), la matrice $[A]$ est représentée par la matrice diagonale $[D]$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $[A]$ s'obtenant à partir de $[D]$ au moyen d'une matrice de passage $[P]$ dont les colonnes sont les composantes dans l'ancienne base des vecteurs propres e_1 et e_2

$$[A] = [P][D][P^{-1}]$$

où

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [P^{-1}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit

$$[A]^n = \Big([P][D][P^{-1}]\Big) \cdots\cdots \Big([P][0][P^{-1}]\Big)$$

$$= [P][D]^n[P^{-1}]$$

$$[A]^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n\frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+2\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}+1\right) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}+2\right) & \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}+1\right) \end{bmatrix}$$

Soit, en tenant compte de

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = [A]^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$a_n = \frac{-1}{3}\left[+2\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}+2\right)+\left(\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}+1\right)\right] = -\frac{1}{3}\left[5+\frac{1}{2^{n-1}}\left(2\,(-1)^{n+1}+(-1)^n\right)\right]$$

Par suite, on en déduit le terme général a_n selon :

$$a_n = \frac{1}{3}\left(-5+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) \qquad n \geqslant 2$$

Remarque 1: Une autre méthode pour calculer a_n est de décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+2}{x^2+x-2} = \frac{3x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-5}{1-x}+\frac{2}{1+\frac{x}{2}}\right)$$

Il suffit de faire la division suivant les puissances croissantes de -5 par $1-x$ et de $+2$ par $(1+\frac{x}{2})$ pour calculer a_n

$$= \frac{1}{3}\left[-5(1+x+\dots+x^n)+2\left(1-\frac{x}{2}+\dots+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\right)\right]+x^{n+1}R_n(x)/g(x)$$

Soit

$$f(x) = \left[-1-2x+\dots+\frac{x^n}{3}\left(-5+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)\right]g(x)+x^{n+1}R_n(x)$$

Remarque 2 :

Un autre procédé de calcul de a_n est celui exposé à l'exercice n° 4. On part de

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad \text{et} \quad a_0 = -1,\ a_1 = -2.$$

On cherche d'abord une solution $a_n = a^n$ de la seule équation

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

Il vient $a^2 = \frac{a+1}{2}$ donc

$$a = 1 \quad \text{ou} \quad a = -\frac{1}{2}$$

Par suite (cf exercice n° 4)

$$a_n = \alpha\, 1^n + \beta(-\tfrac{1}{2})^n$$

avec
$$\begin{cases} -1 = \alpha + \beta \\ -2 = \alpha - \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Soit $a_n = \frac{1}{3}\left[-5 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right] \qquad \forall n \geqslant 0$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

EXERCICE N° 11:

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps des nombres réels . On définit sur E une norme particulière liée au choix d'une base ($e_1, e_2, \ldots, e_n$).

Si x s'écrit (d'une manière unique) dans la base ($e_1, \ldots, e_n$)

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad \text{où} \quad x_K \in \mathbb{R}$$

On pose

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

$\|x\|$ est une norme provenant du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k$ et E est un espace **euclidien.**

1°) Soit A un élément de $Hom(E,E)$ représenté par une matrice $[A]$ dans la base ($e_1 \ldots e_n$). Montrer que

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$$

définit une norme sur $Hom(E,E)$.

2°) Vérifier l'inégalité :

$$\|A\,B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

3°) Supposons la matrice A **symétrique** sur E , de valeurs propres λ_i . Montrer que

$$\|A\| = \sup_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$$

4°) Pour une matrice quelconque, de coefficients réels a_{ij}, montrer que

$$\sup_{i} |\lambda_i| \leqslant n \sup_{i,j} |a_{ij}|$$

Que peut-on dire de $\|A\|$ par rapport aux valeurs propres de la matrice A ?

EXERCICE N° 12 :

On utilise les notations de l'exercice précédent.

Montrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\left([A].[A]^*\right)}$$

(où $[A]^*$ désigne la matrice adjointe de $[A]$), est une norme sur $\mathrm{Hom}(E,E)$, (la trace notée Tr A d'une matrice $[A]$ est la somme des coefficients de la diagonale de $[A]$).

EXERCICE N° 13 :

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $y \longrightarrow \|y\|$ est une application continue de E dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE N° 14 :

Soit E un espace vectoriel réel normé. On suppose que cette norme $x \longrightarrow \|x\|$ satisfait l'égalité d'Apollonius.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Montrer que cette norme provient d'un produit scalaire.

EXERCICE N° 15 :

Soit E un espace vectoriel normé réel et P un opérateur linéaire défini sur E , à valeurs dans F ($P \in \mathrm{Hom}(E,F)$), où F est un espace vectoriel normé réel.

Montrer qu'une condition nécessaire de continuité pour P est que l'ensemble des vecteurs X tels que $P(x) = 0$ (noyau de P) soit fermé. Examiner si la condition est suffisante. (cas F quelconque et cas $F = \mathbb{R}$).

Application : montrer que l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}[0,1]$ telles que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0 ,$$ est un ensemble fermé de $\mathcal{C}[0\,1]$

INDICATIONS DE SOLUTIONS POUR LES EXERCICES DU CHAPITRE I

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 11.

Première question :

Il importe de vérifier directement tout d'abord que $\operatorname{Sup} \|Ax\|$ pris lorsque $\|x\| = 1$, ce que l'on note $\displaystyle\operatorname{Sup}_{\|x\|=1} \|Ax\|$, est un nombre fini.

On a

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j$$

D'après l'inégalité de Schwarz

$$|(Ax)_i|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)$$

Ce qui fournit

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right) \|x\|^2$$

Soit la majoration

$$\operatorname{Sup}_{\|x\|=1} \|Ax\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Que le suprémum en question soit fini est aussi une conséquence du cours, car tout opérateur linéaire sur un espace de dimension finie est nécessairement continu. En outre, ce suprémum définit bien une norme, ce que l'on peut vérifier directement, ou déduire de ce qui a été fait dans le cours (E.A.F.)

En conséquence :

$$\|A\| = \operatorname{Sup}_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad \text{et} \quad \|A\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

La suite de ce problème consiste à calculer $\|A\|$ dans le cas d'une matrice euclidienne (On pourra adapter les calculs au cas hermitien).

<u>Remarque</u> : Nous n'avons pas utilisé de façon fondamentale le fait que l'on cherche la borne supérieure de $\|Ax\|$ sur l'ensemble des vecteurs de norme unité. Bien sûr, l'ensemble des $\|Ax\|$ n'est pas borné en général lorsque x ne reste pas dans une boule bornée. Cependant, il est clair que si $\|x\| = \alpha$, on aura

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \alpha$$

Montrons que

$$\|A\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\| = 1} \|Ax\|$$

peut se calculer aussi en prenant

$$\operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$$

En somme, on prend le sup non plus sur la sphère unité, mais sur la boule unité.

Posons

$$A_2 = \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$$

Il est clair que

$$A_2 \geqslant \|A\|$$

Par ailleurs, soit x un vecteur tel que $\|x\| \leqslant 1$. Si ce vecteur est différent de 0, $\dfrac{x}{\|x\|}$ est un vecteur de norme égale à 1. Donc

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|A\|$$

Soit

$$\|A(x)\| \leqslant \|A\|\|x\| \leqslant \|A\|$$

Ce qui revient à dire

$$A_2 \leqslant \|A\|$$

D'où l'égalité annoncée

$$\|A\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$$

Cette formule donne alors le résultat suivant, où l'on ne fait aucune hypothèse sur x :

(1) $$\boxed{\|A(x)\| \leqslant \|A\|\,\|x\|}$$

et $\|A\|$ est le plus petit nombre positif réalisant cette inégalité pour tous les vecteurs x. (Cf E.A.F. cours)

Deuxième question :

Soit x un vecteur de norme unité :

$$(A\,B)x = A\,(Bx)$$

par définition du produit de composition de deux opérateurs (Avec pour les matrices $[A]\,[B] = [AB]$. Une base étant fixée pour E, nous ne distinguerons plus entre l'opérateur A et une matrice représentative).

$$\|(A\,B)x\| = \|A\,(Bx)\|$$

Grâce à l'inégalité (1)

$$\|A\,(Bx)\| \leqslant \|A\|\,\|Bx\|$$

De même en vertu de (1), appliquée à la matrice B

$$\|Bx\| \leqslant \|B\|\,\|x\| \quad \text{et puisque} \quad \|x\| = 1$$

$$\|Bx\| \leqslant \|B\| \quad \text{ce qui entraîne}$$

$$\|(A\,B)x\| \leqslant \|A\| . \|B\|$$

pour tout x de norme unité.

On peut donc passer aux bornes supérieures :

$$\sup_{\|x\|=1} \|(A\,B)x\| = \|A\,B\|$$

On peut alors écrire la majoration de la norme de AB

(2) $$\boxed{\|A\,B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|}$$

Troisième question :

Si A est une matrice hermitienne, elle possède n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (distinctes ou non) et n vecteurs propres orthonormaux notés $E_1, E_2, \dots, E_n$ (Cf cours E.A.F. et la généralisation aux opérateurs intégraux).

$E_1, E_2, \dots, E_n$ constituent une base de E sur laquelle la matrice A prend la forme diagonale D.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'opérateur linéaire représenté par la matrice A dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de l'énoncé est représenté par la matrice diagonale D dans la base $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ formée par les vecteurs propres de la matrice A.
La matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est une matrice unitaire P ($P P^* = 1$) telle que

$$D = P^{-1} AP$$

Nous savons qu'une matrice unitaire P conserve la norme euclidienne c'est-à-dire que si x est un vecteur, de composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, et de composantes $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ dans la base $(E_1, E_2, \dots, E_n)$, également orthonormale, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x'_i|^2 = \|x\|^2$$

Par conséquent

$$\sup_{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=1\right)} \sum_{i=1}^{n} \left|(A(x))_i\right|^2 = \sup_{\left(\sum_{i=1}^{n}|x'_i|^2=1\right)} \sum_{i=1}^{n} \left|(D(x'))_i\right|^2$$

Or

$$\left(D(x')\right)_i = \lambda_i x'_i$$

D'où $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x'\|=1} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |x'_i|^2}$

Une autre méthode revient à écrire $\|D\| \leqslant \|P^{-1}\|\,\|A\|\,\|P\| \leqslant \|A\|$ car $\|P^{-1}\| = \|P\| =$ en utilisant la 2ème question. Réciproquement de $P_0\,P^{-1} = A$, on déduit $\|A\| \leqslant \|D\|$. D'où $\|A\| = \|D\|$

On doit donc calculer la borne supérieure de l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^2 |x'_i|^2$$

lorsque

$$\sum_{i=1}^{i=n} |x'_i|^2 = 1$$

Il existe plusieurs méthodes pour calculer cette borne supérieure. Une méthode est basée sur les multiplicateurs de Lagrange. Une méthode rapide est la suivante :

Visiblement, si l'on appelle λ le nombre égal à $\sup\limits_{i=1,\dots n} |\lambda_i|$, on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^2 |x'_i|^2 \leqslant \lambda^2 \sum_{i=1}^{i=n} |x'_i|^2 = \lambda^2$$

d'où la majoration

$$\|A\| \leqslant \lambda$$

Mais vérifions qu'il existe un vecteur x, de norme 1 et de composantes $x'_1, \dots, x'_n$ dans

Mais vérifions qu'il existe un vecteur x de norme 1 et de composantes

la base orthonormale $(E_1, \dots, E_n)$ tel que $\|Ax\| = \lambda$. Prenons $x = E_i$ où i est l'indice correspondant à un λ_i dont la valeur absolue est égale à λ ($|\lambda_i| = \lambda$). Il vient

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^2 |x'_i|^2 = \lambda_i^2 = \lambda^2$$

Soit pour ce vecteur particulier x, $\|x\| = 1_i$

$$\|Ax\| = \lambda$$

En définitive, on a obtenu l'expression explicite de la norme de l'opération A

$$\boxed{\|A\| = \sup_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|} \qquad (3)$$

Quatrième question :(Ici on peut supposer aussi bien E, espace vectoriel, complexe que réel).

Les équations donnant les valeurs propres de A sont :

$$\sum_j a_{ij}\, x_j = \lambda x_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Soit $\hat{\lambda}$ une valeur propre de plus grand module de la matrice A, supposée quelconque et non plus hermitienne comme dans le calcul précédent. (Il est alors possible que $\hat{\lambda} \in \mathbb{C}$ et non à $\mathbb{R}$).

$$|\hat{\lambda}| = \operatorname*{Sup}_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$$

Soient $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ les coordonnées d'un vecteur propre $\hat{V}$, correspondant à $\hat{\lambda}$. Les $\hat{x}_i$ vérifient les équations :

$$\sum_j a_{ij}\, \hat{x}_j = \hat{\lambda}\, \hat{x}_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Soit $\hat{x}_m$ une plus grande coordonnée (en module) du vecteur propre $\hat{V}$.

$$|\hat{x}_m| = \operatorname*{Sup}_i |\hat{x}_i|$$

Parmi les équations donnant les $\hat{x}_i$ considérons la m$^{\text{ième}}$. Elle s'écrit

$$\hat{\lambda}\, \hat{x}_m = \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}\, \hat{x}_j$$

d'où l'on déduit

$$|\hat{\lambda}|\,|\hat{x}_m| \leqslant \sum_j |a_{mj}|\,|\hat{x}_j|$$

On peut majorer :

$$|\hat{\lambda}|\,|\hat{x}_m| \leqslant \sum_j \left(\operatorname*{Sup}_{i,j} |a_{ij}|\right) |\hat{x}_m| = n\,|\hat{x}_m| \operatorname*{Sup}_{i,j} |a_{ij}|$$

d'où, en divisant par $\hat{x}_m$, non nul puisque $\hat{x}$ est vecteur propre :

$$|\hat{\lambda}| \leqslant n \operatorname{Sup} |a_{ij}|$$

On a donc bien l'inégalité annoncée :

$$(4) \qquad \boxed{\operatorname*{Sup}_i |\lambda_i| \leqslant n \operatorname*{Sup}_{i,j} |a_{ij}|}$$

On peut interpréter ces inégalités. Lorsque x est un vecteur propre de la matrice A, correspondant à la valeur propre λ, il est clair que

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

Si l'on norme le vecteur propre x, il vient

$$\|Ax\| = |\lambda|$$

Par conséquent, la borne supérieure des $\|Ax\|$ lorsque $\|x\| = 1$ est nécessairement supérieure à tout $|\lambda|$ où λ est une valeur propre de A .

$$\boxed{\|A\| \geqslant \operatorname*{Sup}_{i} |\lambda_i|}$$

Dans le cas des matrices hermitiennes, on a $\|A\| = \operatorname*{Sup}_{i}|\lambda_i|$. On vérifie (cf 3ème question) $\|A\|^2 = \|A^2\|$ dans le cas d'une matrice hermitienne. Par conséquent, lorsque A est hermitienne, on dispose de l'écriture :

$$\operatorname*{Sup}_{i} |\lambda_i| = \|A\| = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

On démontre dans le cas général d'une matrice quelconque l'existence de la limite $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. En fait, on obtient alors

$$\|A\| \geqslant \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \operatorname*{Sup}_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$$

L'inégalité pouvant être stricte lorsque la matrice A n'est pas une matrice hermitienne.

Exemple : On se place dans R^2 pour la base orthonormale canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\| = \operatorname*{Sup}_{x_1^2 + x_2^2 = 1} \left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right) = \operatorname*{Sup}_{x_1^2 + x_2^2 = 1} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$$

$$= 1 + \operatorname*{Sup}_{x_1^2 + x_2^2 = 1} (2x_1x_2 + x_2^2) > 1$$

(faire $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

Par contre la valeur propre double de la matrice A est la valeur 1.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant des majorations convenables et la croissance comparée de x et $\log x$.

Remarque : soit A une matrice hermitienne, nous avons démontré l'inégalité

$$\|Ax\| \leqslant$$

Calculons maintenant $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. On obtient

$$\begin{aligned}\|A^n\|^2 &= \operatorname*{Sup}_{x_1^2+x_2^2=1}((x_1 + nx_2)^2 + x_2^2) \\ &= 1 + \operatorname*{Sup}_{x_1^2+x_2^2=1}(n^2x_2^2 + 2n\, x_1 x_2) \\ &\leqslant 1 + n^2 + 2n = (n+1)^2\end{aligned}$$

Donc

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant (1 + n)^{\frac{1}{n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = 1$, par suite de la croissance comparée de n et de Log n, on déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$. Or il est clair que $\|A^n\| \geqslant 1$. Donc on a prouvé dans ce cas l'existence de

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$$

Par opposition nous avons vu que $\|A\| > 1$

Remarque : Si A est une matrice hermitienne, nous avons précédemment établi l'inégalité, valable pour tout x

$$\|Ax\| \leqslant (\operatorname*{Sup}_i |\lambda_i|)\, \|x\|$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A.

Supposons que A soit inversible (et hermitienne). Ses valeurs propres sont alors toutes différentes de 0 (puisque le noyau de A est réduit à $\{0\}$.

La matrice inverse A^{-1}, admet $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$ comme valeurs propres.

De $\sup_i \left|\frac{1}{\lambda_i}\right| = \frac{1}{\inf_i |\lambda_i|}$ on peut déduire une majoration de $\|A^{-1}\|$

$$\|A^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{\inf_i |\lambda_i|} \|x\|$$

Et faisant $y = Ax$

$$\inf_i |\lambda_i| \, \|y\| \leqslant \|Ay\|$$

Ce qui permet d'écrire la double majoration pour une matrice hermitienne inversible.

(6) $$\boxed{(\inf_i |\lambda_i|)\|y\| \leqslant \|Ay\| \leqslant (\sup_i |\lambda_i|)\|y\|}$$

Un tel résultat (6) se généralise de la façon suivante pour toute matrice inversible : il existe deux constantes positives $K \, (= \|A\|)$ et $k = \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$ telle que pour tout y :

(7) $$k\|y\| \leqslant \|Ay\| \leqslant K\|y\|$$

Nous avons examiné ce point dans le cours.

Mais les inégalités (7) sont encore valables pour tout opérateur linéaire, continu, et inversible quelconque, défini sur un espace vectoriel de Banach (non nécessairement de dimension finie).

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 12.

On pose $\|A\|_2 = \sqrt{T_r([A][A^*])}$ où la trace désigne la somme des termes de la diagonale principale. L'opérateur A est représenté par la matrice [A] dans une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

$$[A] = [a_{ij}]$$

$$[A]^* = [\overline{a_{ji}}]$$

Donc

$$[A]\,[A]^* = [c_{ij}]$$

et

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\overline{a_{jk}}$$

$$<f_i, AA^* f_i> = <A^* f_i, A^* f_i>$$

$$= <f_i, \mu_i f_i> = \mu_i \; <f_i, f_i>$$

Donc

$$\mu_i = \frac{\|A^* f_i\|^2}{\|f_i\|^2}$$

Les valeurs propres de AA^* sont donc positives ou nulles. En outre, dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, la matrice représentative de AA^* est diagonale. Donc

(7) $$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

D'après l'exercice II, 1ère question, nous avons établi $\|A\| \leqslant \|A\|_2$ puisque

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_j \sum_i |a_{ij}|^2}$$

Par ailleurs, dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, on calcule que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \leqslant n \sup_{\|x\|=1} <x, AA^* x>$$

puisque $<x, AA^* x> = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

Or $<x, AA^* x> = <A^*x, A^*x> = \|A^*x\|^2$

D'où $\sup_{\|x\|=1} <x, AA^*x> = \|A^*\|^2$

Au chapitre III, nous établirons que $\|A^*\| = \|A\|$ (§8.4.3). Donc

$$\|A\|_2 \leqslant \sqrt{n} \; \|A\|$$

En définitive, pour tout opérateur A

(8) $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leqslant \|A\| \leqslant \|A\|_2}$$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 13.

On part de l'inégalité triangulaire

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$$

De même

$$\|y\| = \|y-x+x\| \leqslant \|y-x\| + \|x\|$$

D'où l'inégalité

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$$

Par suite, si x_n converge vers y, alors $\|x_n\|$ converge vers $\|y\|$, ce qui établit bien la continuité de $x \longrightarrow \|x\|$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 14.

On se propose de donner une caractérisation des espaces vectoriels normés dont la norme dérive d'un produit scalaire (espaces préhilbertiens): c'est-à-dire des espaces tels que :

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

Dans tout ce qui suit nous supposons que le corps de base est <u>le corps des nombres réels</u>. (mais la même démonstration vaut pour les complexes)

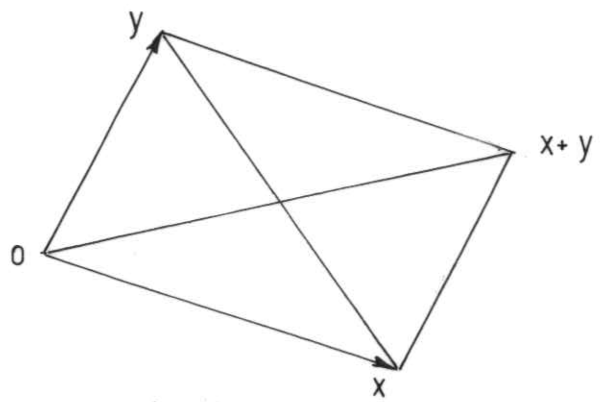
a) D'une part, si E est un espace préhilbertien, il vient facilement :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

soit

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

Cette égalité est bien connue en géométrie élémentaire sous le nom d'égalité de la médiane (ou d'égalité du parallélogramme, ou encore d'égalité d'Apollonius). Cette égalité signifie que dans un parallélogramme la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés du parallélogramme.



b) Réciproquement, supposons donné un espace vectoriel normé E , dont la norme satisfasse l'égalité du parallélogramme

(1) $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Nous allons montrer que la norme dérive d'un produit scalaire.

Posons

(2) $$[\![x,y]\!] = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

et donnons tout d'abord quelques formules résultant d'une simple combinaison de l'égalité (1) du parallélogramme et de la définition (2) de $[\![x,y]\!]$

(3) $$2[\![x,y]\!] = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$$

D'où :

(4) $$4[\![x,y]\!] = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

Vérifions pour $[\![\,,\,]\!]$ les propriétés d'un produit scalaire.

$\underline{\alpha}$: $[\![x,y]\!] = [\![y,x]\!]$ ceci est bien clair d'après (4)

$\underline{\beta}$: $[\![x,x]\!] = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ et $[\![x,x]\!] \geqslant 0$

En effet, on obtient d'après (4) que

$$[\![x,x]\!] = \|x\|^2$$

et il suffit d'utiliser la définition d'une norme pour conclure.

$\underline{\gamma}$: $[\![x+x',y]\!] = [\![x,y]\!] + [\![x',y]\!]$

Calculons la somme suivante en utilisant les deux expressions (3)

$$4([\![x,y]\!]+[\![x',y]\!]) = 2(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2+\|x'\|^2+\|y\|^2-\|x'-y\|^2)$$
$$= 2(\|x'\|^2+\|x+y\|^2)-2(\|x\|^2+\|x'-y\|^2)$$

Utilisant alors deux fois l'égalité (1), il vient

$$4([\![x,y]\!]+[\![x',y]\!]) = \|x'+x+y\|^2+\|x+y-x'\|^2-\|x+x'-y\|^2-\|x'-y-x\|^2$$
$$= \|x+x'+y\|^2+\|x+x'-y\|^2$$
$$= 4[\![x+x',y]\!]$$

Ce qui fournit bien la relation γ
Il reste maintenant à vérifier que pour tout réel λ on a

$$(\delta) \qquad [\![\lambda x,y]\!] = \lambda[\![x,y]\!]$$

D'une part ce résultat est exact pour $\lambda=-1$, puisque

$$[\![-x,y]\!] = -[\![x,y]\!]$$

d'après l'égalité (4). Il suffit donc de démontrer (δ) pour $\lambda \geqslant 0$.

Pour $\lambda = 0$, on a bien sûr $[\![0,y]\!] = 0$ d'après (4)

Pour $\lambda = p$ où p désigne un entier naturel, le calcul effectué en (γ) fournit le résultat
$$p[\![x,y]\!] = [\![px,y]\!]$$
et pour tout nombre entier naturel q, on a selon un procédé classique

$$[\![q\frac{x}{q},y]\!] = q[\![\frac{x}{q},y]\!]$$

d'où

$$\frac{1}{q}[\![x,y]\!] = [\![\frac{x}{q},y]\!]$$

Finalement, pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (où p et q sont des entiers) on obtient :

$$[\![\frac{p}{q}x,y]\!] = \frac{p}{q}[\![x,y]\!]$$

Pour étendre cette égalité au cas d'un nombre réel λ, on note que si $\{x_n\}_n$ est une suite de vecteurs dans E convergeant vers x, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\| = \|x-y\|$$
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n+y\| = \|x+y\|$$

et par conséquent

$$\lim_{n \to \infty} [\![x_n, y]\!] = [\![x, y]\!]$$

Soit donc $\lambda_n = \frac{p_n}{q_n}$ une suite de nombres rationnels qui converge vers le nombre réel λ . La suite de vecteurs $\{\lambda_n x\}_n$ converge vers λx (pour tout x) et par suite

$$\lim_{n \to \infty} [\![\lambda_n x, y]\!] = [\![\lambda x, y]\!]$$

Mais $[\![\lambda_n x, y]\!] = [\![\frac{p_n}{q_n} x, y]\!] = \lambda_n [\![x, y]\!]$ converge vers $\lambda [\![x, y]\!]$

D'où

$$[\![\lambda x, y]\!] = \lambda [\![x, y]\!]$$

ce qui termine la démonstration.

Finalement l'expression $[\![x,y]\!]$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel normé réel E , produit scalaire dont dérive la norme selon

$$\| x \|^2 = [\![x, x]\!]$$

On notera dans ce qui suit, conformément à une habitude héritée des physiciens

$$< x , y > = [\![x, y]\!]$$

<u>L'égalité du parallélogramme caractérise donc les espaces préhilbertiens</u>.

De fait on peut prouver beaucoup plus. Par exemple, si E est un espace vectoriel réel et $x \longrightarrow \|x\|$ une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que

(1) $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0$ si, et seulement si $x = 0$

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(3) $\|a-c\| \, \|b-d\| \leqslant \|a-b\| \, \|c-d\| + \|b-c\| \, \|a-d\|$

(inégalité de Ptolémée).

Alors $\|x\|$ est une norme sur E provenant d'un produit scalaire. La démonstration exige une grande habileté <u>combinatoire</u>.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 15.

Si $P : E \longrightarrow E$ est un opérateur continu, $\operatorname{Ker} P = P^{-1}[0]$ est fermé. En effet $x_n \in \operatorname{Ker} P$ et $x_n \longrightarrow x$ dans E alors $0 = P(x_n) \longrightarrow P(x)$ dans E donc $P(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} P$.

Application En particulier, prenons $P : \mathscr{C}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$Pf = \int_0^1 f(x)\,dx$$

P est un opérateur linéaire sur $\mathscr{C}[0, 1]$ (notation du cours E.A.F.) puisque

$$|Pf| \leqslant \|f\| = \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Donc Ker P est fermé dans $\mathscr{C}[0, 1]$. Autrement dit, l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}[0, 1]$ telles que

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

est un sous-ensemble fermé.

La réciproque de la propriété établie est inexacte. Nous allons construire un opérateur linéaire $P : E \longrightarrow E$, sur un espace vectoriel normé réel E, dont le noyau est fermé et qui n'est pas continu.

On reprend l'exemple du chapitre I, § 5.3.5. Soit E l'espace de tous les polynômes réels $t(x)$, muni de la norme

$$t(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \qquad \|t\| = \operatorname*{Sup}_{i=1,\dots,n} |a_i|$$

On définit $P : E \longrightarrow E$ par l'opérateur de dérivation $P(t)(x) = \frac{dt}{dx}(x)$.

C'est évidemment un opérateur linéaire, dont le noyau est le sous-ensemble des polynômes constants. C'est un ensemble fermé dans E.

Pourtant P n'est pas un opérateur linéaire continu. Il ne peut exister de constante A, réelle, telle que $\|P(t)\| \leqslant A\,\|t\|$ pour tout polynôme t de E.

En effet, prenons $t(x) = x^n$. On a $\|t\| = 1$ tandis que $\left\|\frac{dt}{dx}\right\| = n\|x^{n-1}\| = n$. Donc, si A existait, on devrait avoir pour tout entier n, $n \leqslant A$, ce qui est impossible.

Toutefois, la réciproque, fausse en général, est exacte lorsque $F = \mathbb{R}$. Autrement dit si $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire, celle-ci est continue si et seulement si, Ker P est fermé dans E.

La démonstration de ce résultat exige une certaine habileté. Lorsque x parcourt E, P(x) parcourt $\mathbb{R}$, du moins si P n'est pas identiquement nulle (auquel cas, le résultat est acquis). Donc P(x) est un nombre réel et on va définir une nouvelle norme $|||\cdot|||$ sur $\mathbb{R}$ par

$$|||y||| = \operatorname*{Inf}_{z \in \mathrm{Ker}\, P} \|x-z\| \quad \text{pour } y = P(x) \in \mathbb{R}$$

La définition a un sens dans la mesure où $|||y|||$ prend la même valeur si l'on prend x' tel que $y = P(x') = P(x)$. En effet $P(x-x') = 0$ donc $x - x' \in \mathrm{Ker}\, P$ et le calcul de la borne inférieure est le même avec x ou avec x'.

Montrons que $y \longrightarrow |||y|||$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

$$|||y + y'||| = \operatorname*{Inf}_{z \in \mathrm{Ker}\, P} \|x + x' - z\| \quad \text{pour } y + y' = P(x) + P(x') = P(x+x') \in \mathbb{R}$$

$$= \operatorname*{Inf}_{\substack{z \in \mathrm{Ker}\, P \\ z' \in \mathrm{Ker}\, P}} \|x + x' - z - z'\| \quad \text{car Ker P est un sous-espace vectoriel}$$

$$\leqslant \operatorname*{Inf}_{z \in \mathrm{Ker}\, P} \|x-z\| + \operatorname*{Inf}_{z' \in \mathrm{Ker}\, P} \|x' - z'\|$$

$$\leqslant |||y||| + |||y'||| \quad \underline{\text{Inégalité triangulaire}}$$

De même, pour $\lambda \neq 0$

$$|||\lambda y||| = \operatorname*{Inf}_{z \in \mathrm{Ker}\, P} \|\lambda x - z\| \quad \text{pour } y = P(x) \text{ puisque } \lambda y = P(\lambda x)$$

$$= \operatorname*{Inf}_{z' \in \mathrm{Ker}\, P} \|\lambda x - \lambda z'\| \quad \text{car Ker P est un sous-espace vectoriel}$$

$$= |\lambda| \operatorname*{Inf}_{z' \in \mathrm{Ker}\, P} \|x - z'\|$$

$= |\lambda| \; |||y|||$ relation qui subsiste si $\lambda = 0$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $|||y||| = 0$ implique $y = 0$. Or si $|||y||| = 0$, cela signifie qu'il existe une suite z_n de points de Ker P et $\|x - z_n\| \leqslant \frac{1}{n}$ où $y = P(x)$. Comme Ker P est fermé, ceci signifie que $\lim_{n \to \infty} z_n = x$, donc que x appartient à Ker P, auquel cas $P(x) = y = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons donc deux normes sur $\mathbb{R}$: la norme usuelle $|y|$ et la norme $|||y|||$. Ces deux normes sont nécessairement équivalentes (théorème du cours). en particulier ,il existe une constante $A > 0$ et pour tout y de $\mathbb{R}$

$$|y| \leqslant A|||y|||$$

Autrement dit $|P(x)| \leqslant A \inf_{z \in \text{Ker } P} \|x-z\|$ pour tout x de E

Or $\inf_{z \in \text{Ker } P} \|x-z\| \leqslant \|x\|$ si l'on fait $z = 0$. Donc

$$|P(x)| \leqslant A \|x\| \quad , \quad \forall x \in E$$

Ce qui établit la continuité de la forme $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II.

EXERCICE N° 16.

Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de E. F est muni d'une structure préhilbertienne en tant que sous-espace de F . Etablir l'assertion suivante :

Pour que F soit complet, il faut et il suffit que F soit fermé.

EXERCICE N° 17.

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque. Soit $[A]$ une matrice réelle $n \times n$. On définit la matrice

$$[S_n] = [I] + t\,[A] + \cdots\cdots + t^n \frac{[A]^n}{n!}$$

où $[I]$ désigne la matrice identité et $[A]^n$ la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice $[A]$.

1°) montrer que pour chaque vecteur x et chaque valeur t , la suite de vecteurs $[S_n](x)$ converge vers un vecteur noté $e^{t[A]}(x)$

2°) $e^{t[A]}$ définit-il une matrice ?

Montrer que $\quad e^{(t_1+t_2)[A]} = e^{t_1[A]}\, e^{t_2[A]}$

3°) calculer $e^{t[A]}$ pour

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(on trouvera : $\left[e^{tA}\right] = \dfrac{[A]+[I]}{3}\, e^{2t} + \dfrac{2[I]-[A]}{3}\, e^{-t}$).

EXERCICE N° 18.

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ un élément de l^2. Montrer que l'application Π_n, définie sur l^2 par :

$$\Pi_n(x) = x_n \qquad \text{(coordonnée d'ordre } n \text{)}$$

est une forme linéaire continue de norme 1.

EXERCICE N° 19.

Soit D le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$ $(|z| < 1)$
On appelle $L^2(D)$ l'espace vectoriel de Hilbert (Cf. II § 6), constitué par les fonctions (mesurables) et de carré intégrable, définies sur D et à valeurs complexes. On munit cet espace du produit scalaire.

$$< f,g > = \iint_D f(z)\,\overline{g}(z)\,dx\,dy\,, \quad \text{avec } z = x + iy$$

Montrer que le sous-espace vectoriel $HL^2(D)$ composé des fonctions holomorphes est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(D)$.

EXERCICE N° 20.

Soit F le sous-espace vectoriel de l^2 constitué par les suites $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ telles que seul un nombre fini de coordonnées x_n soient différentes de 0.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel dense de l^2.

EXERCICE N° 21.

Soit $\mathcal{C}[0,1]$ l'espace vectoriel normé pour la norme de la convergence uniforme des fonctions continues réelles définies sur $[0,1]$.

On définit l'opérateur P_n sur $\mathcal{C}[0,1]$, à valeurs dans $\mathcal{C}[0,1]$

$$P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Montrer que P_n est un opérateur linéaire continu, positif, de norme 1 sur $\mathcal{C}[0,1]$ (polynôme de Bernstein).

EXERCICE N° 22.

h désigne un nombre réel (strictement) positif et $\mathcal{C}[0,1]$ l'espace vectoriel normé, pour la norme de la convergence uniforme, des fonctions continues réelles, définies sur $[0,1]$.

On définit la forme P_h sur $\mathcal{C}[0,1]$ par ses valeurs

$$P_h(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\, f(x)\, dx$$

1°) montrer que $P_h(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}[0,1]$

2°) montrer que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}[0,1]$,

$$\lim_{h \to 0} P_h(f) = f(0)$$

Si l'on appelle P_0 la forme linéaire continue $f \longrightarrow f(0)$, définie sur $\mathcal{C}[0,1]$, peut-on assurer que P_h converge vers P_0 au sens de la norme du dual de $\mathcal{C}[0,1]$ lorsque h tend vers 0 ?

EXERCICE N° 23.

Soit f une fonction appartenant à $\mathbb{C}\,[0,1]$. Démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \qquad \text{existe et vaut} \qquad \|f\|_\infty$$

EXERCICE N° 24.

En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que l'on peut identifier $L_q[0,1]$ à un sous-espace du dual topologique de $L_p[0,1]$ lorsque $1 < p < +\infty$

[On peut en fait démontrer que par l'identification précédente, l'espace $L_q[0,1]$ est isométriquement isomorphe à l'espace ($(L_p[0,1])'$)]

EXERCICE N° 25

Démontrer le théorème suivant et en déduire une majoration de la constante a_n qui intervient dans l'exemple 5.3.5. du chapitre I

Théorème de Cebičev.

Parmi tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n, dont le terme de plus haut degré a l'unité pour coefficient, le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ où T_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Čebičev, est celui dont le maximum de la valeur absolue sur $[-1,+1]$ est la plus petite.

[Pour la définition des polynômes de Čebičev (du 1er type), on peut se reporter à l'exercice n° 36. Pour notre théorème, nous avons seulement besoin de quelques remarques :

$$T_n(x) = \cos\left(n\,(\operatorname{Arc}\cos x)\right) = x^n + C_n^2\, x^{n-2}\,(x^2-1) + \ldots +$$

On notera $T_n(x) = 2^{n-1} x^n$ + termes de degré inférieur, en outre le polynôme de degré n, $T_n(x)$, a n racines simples aux points $x_h = \cos \frac{2h-1}{2n}\pi$ et prend $n+1$ valeurs extrêmes, alternées, en $n+1$ points $x'_h = \cos \frac{2h}{2n}\pi$.

Pour démontrer le théorème, on écrit : $Q(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} - P(x)$ où

$P(x) = x^n$ + termes de degré inférieur, et $\sup\limits_{x\in[-1+1]} |P(x)| < \sup\limits_{x\in[-1+1]} \frac{|T_n(x)|}{2^{n-1}}$.

Q est de degré $n-1$, mais $Q(x'_h) = \frac{(-1)^h}{2^{n-1}} - P(x'_h)$ pour $h = 0, 1, 2, \ldots, n$

Par alternance, on en déduit que Q admet n zéros, donc est nul ; donc

$$P(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

ce qui est impossible.]

EXERCICE N° 26.

Soit E l'espace des fonctions numériques définies sur $[0, +\infty[$, bornées et continues telles que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe. On munit E de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,+\infty[} |f(x)|$$

On définit les deux opérateurs suivants P et Q sur E

$$P : \qquad Pf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy \qquad x \neq 0 \qquad \text{et} \quad Pf(o) = f(o)$$

$$Q : \qquad Qf(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2} f(y)\,dy \qquad x \neq 0$$

a) étudier la continuité des opérateurs P et Q.

b) montrer que l'application $L : f \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x)$ est une forme linéaire continue sur l'espace E,

c) montrer que $L \circ P = L$ c'est-à-dire

$$\lim_{x \to +\infty} Pf(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

et montrer que

$$\lim_{x \to 0} Qf(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = L(f)$$

EXERCICE N° 27.

Soit E_{n+1} l'espace des polynômes d'une variable complexe z et de degré inférieur ou égal à n. On pose comme norme sur E_{n+1}

$$\|P\| = \sup_{|z| \leqslant 1} |P(z)|$$

Soit L une forme linéaire sur E_{n+1}. On construit, à partir de L, un opérateur T, linéaire sur E_{n+1}, selon :

$$T(P)(z) = L(P_z) \quad \text{où} \quad P_z(y) = P(zy)$$

Montrer que T applique E_{n+1} dans E_{n+1} et à une norme égale à la norme de la forme linéaire L .

EXERCICE N° 28.

On appelle E l'espace vectoriel constitué par toutes les suites infinies $X = \{x_n\}_{n>0}$ de nombres réels, telles que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

On pose en outre

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geqslant 0} |x_n|$$

lère question : montrer que $X \longrightarrow \|X\|_\infty$ constitue une norme sur E ,

montrer que E est un espace vectoriel de Banach pour cette norme.

2ème question : soit $X^{(n)}$ l'élément de E défini par $X_k^{(n)} = 0$ si $k \neq n$ et 1 si $k = n$.

Montrer que $\sum_{n=0}^{p} x_n X^{(n)}$ converge vers $X = \{x_n\}_{n \geqslant 0}$

au sens de E lorsque p tend vers l'infini.

3ème question : nous nous proposons de déterminer l'espace dual topologique de E .

a) soit y une suite de nombres réels $y = \{y_n\}_{n \geqslant 0}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n| \quad \text{converge}$$

montrer que l'application $X \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ est une forme linéaire continue sur E . Déterminer la norme de cette forme linéaire continue.

b) on appelle ℓ^1 l'espace vectoriel constitué par les suites infinies $y = \{y_n\}_{n \geqslant 0}$ de nombres réels, telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$ converge .

Montrer que $\|y\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$ définit une norme sur ℓ^1 .

c) montrer que E' est isométriquement isomorphe à ℓ^1.

4ème question : E' peut être considéré, sans sa norme, comme un sous-espace vectoriel de E. Montrer que sur E', la topologie de dual est strictement plus fine que la topologie de sous-espace de E.

5ème question : montrer que E'', bidual topologique de E, peut s'identifier à l'espace vectoriel constitué par les suites bornées réelles.

EXERCICE N° 29.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer qu'il ne peut exister deux applications linéaires et continues, P et Q, de $\mathcal{L}(E)$, telles que

$$PQ - QP = I$$

où I désigne l'opérateur identité sur E

En déduire que l'espace E de l'exercice N°5 n'est pas normable.

INDICATIONS DE SOLUTIONS POUR LES EXERCICES
DU CHAPITRE II

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 16

Supposons F, sous-espace vectoriel complet d'un espace de Hilbert (ou de Banach). Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de points de F, convergeant vers $x \in E$. Cette suite est donc de Cauchy. Comme F est complet, elle converge donc dans F, ce qui établit que $x \in F$. Autrement dit F est un sous-espace fermé de E.

Réciproquement, supposons F fermé. Soit $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans F. En tant que suite de Cauchy dans E, $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ converge vers $x \in E$ puisque E est complet. Donc, comme F est fermé, $x \in F$. Autrement dit, toute suite de Cauchy dans F converge dans F, c'est-à-dire que F est un sous-espace vectoriel complet.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 17

Première question :

$[S_n]$ est une matrice, dépendant d'un paramètre t, $t \in \mathbb{R}$ ou $t \in \mathbb{C}$

$$[S_n] = [I] + t[A] + --- + \frac{t^n}{n!}[A]^n$$

(si l'on appelle $c_{ij}(t)$ le coefficient général de cette matrice, il est clair que ce coefficient est une fonction holomorphe de la variable t puisqu'il s'agit d'un polynôme. Si donc on prouve la convergence de S_n vers la matrice notée $e^{t[A]}$, on obtient que le coefficient d'ordre (i,j) de $e^{t[A]}$ est une fonction holomorphe de $t, t \in \mathbb{C}$ donc une fonction entière de t).

premier point Montrons que le vecteur $[S_n](x)$ converge vers un vecteur y de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ rapporté à une base $e_1 \ldots e_n$ et structuré en un espace normé d'une manière quelconque.

$$[S_n](x) \quad = \quad x + t[A](x) + --- + \frac{t^n}{n!}[A]^n(x)$$

Montrons que $[S_n](x)$ définit une suite de Cauchy sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Il suffit de calculer

$$\|[S_{n+p}](x) - [S_n](x)\| = \left\|\frac{t^{n+p}}{\overline{n+p}!}[A]^{n+p}(x) + --- + \frac{t^{n+1}}{\overline{n+1}!}[A]^{n+1}(x)\right\|$$

Mais on sait qu'une matrice représente un opérateur linéaire continu, donc

$$\| [A]^n(x) \| \leqslant \| [A]^n \| \, \| x \|$$

En outre, puisque $\|[A]^n\| = \|A^n\|$, on a

$$\| A^n \| \leqslant \| A \|^n$$

grâce à l'inégalité $\|A\,B\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$ que nous avons démontrée dans le cours ou encore à l'exercice N° 11.

Par conséquent

$$\| [S_{n+p}](x) - [S_n](x) \| \leqslant \left(\frac{|t|^{n+p} \|A\|^{n+p}}{\overline{n+p}\,!} + \text{---} + \frac{|t|^{n+1}}{\overline{n+1}\,!} \| A \|^{n+1} \right) \| x \|$$

Or l'expression en facteur devant x n'est que l'expression de la différence de Cauchy pour la série convergente (série numérique) suivante :

$$e^{|t| \, \|A\|} = 1 + \frac{|t| \, \|A\|}{1\,!} + \text{----} + \frac{|t|^n \, \|A\|^n}{n!} + \text{---}$$

Par tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre N tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $p \geqslant 0$, on ait

$$\left(\frac{|t|^{n+p} \|A\|^{n+p}}{\overline{n+p}\,!} + \text{---} + \frac{|t|^{n+1}}{\overline{n+1}\,!} \| A \|^{n+1} \right) < \varepsilon$$

Donc de même

$$\| [S_{n+p}](x) - [S_n](x) \| < \varepsilon \, \| x \|$$

Si dans l'inégalité ci-dessus, nous passons à la borne supérieure, en utilisant le vocabulaire des normes d'opérateurs, c'est-à-dire en posant

$$\sup_{\|x\| = 1} \| S_n(x) \| = \| S_n \|$$

on obtient

$$\| S_{n+p} - S_n \| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que S_n est une <u>suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé des opérateurs</u> $\mathcal{L}(E)$.

De même, $[S_n](x)$ est une suite de Cauchy sur E , qui est un espace vectoriel normé complet (ici, c'est un espace euclidien), donc $S_n(x)$ converge vers un vecteur y

$$\lim_{n \to \infty} [S_n](x) = y$$

On note

$$y = e^{t[A]}(x)$$

<u>2ème question</u> : Montrons que la correspondance $x \longrightarrow e^{t[a]}x$ est une correspondance linéaire.

On a noté que $[S_n]$ est une matrice, donc

$$[S_n](\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 [S_n](x_1) + \lambda_2 [S_n](x_2)$$

En passant à la limite

$$\lim_{n \to \infty} [S_n](\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = e^{t[A]}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

Donc

$$e^{t[A]}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 e^{t[A]}(x_1) + \lambda_2 e^{t[A]}(x_2)$$

Par conséquent $e^{t[A]}$ est une matrice carrée sur l'espace $E = \mathbb{R}^n$
On vient de démontrer, grâce à l'inégalité obtenue dans $\mathcal{L}(E)$, que $[S_n]$ converge au sens de $\mathcal{L}(E)$ vers $e^{t[A]}$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\| e^{t[A]} - [S_n] \| < \varepsilon$$

La matrice $e^{t[A]}$ est ainsi associée à la matrice $[A]$. Dans la base choisie, elle représente un opérateur linéaire. Cet opérateur est en fait lié à l'opérateur A. En effet, on peut raisonner directement sur les opérateurs linéaires. La convergence étant prise au sens de $\mathcal{L}(E)$, qui est un espace de Banach puisque E en est un (Cf. E.A.F. Chapitre I),

On pose donc

$$e^{tA} = I + tA + \cdots + \frac{t^n A^n}{n!} + \cdots$$

e^{tA} est un opérateur linéaire et la matrice associée à cet opérateur dans la base choisie n'est autre que $e^{t[A]}$ définie ci-dessus par limite de la suite $[S_n]$ de matrices.

De la même façon, on peut définir par un opérateur linéaire A.

$$\sin A = \frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i} \qquad \text{sh } A = \frac{e^{A}-e^{-A}}{2}$$

$$\cos A = \frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2i} \qquad \text{ch } A = \frac{e^{A}+e^{-A}}{2}$$

où A désigne un opérateur linéaire continu ($\in \mathscr{L}(E)$). Cette définition avec un opérateur s'étend au cas où E est un espace de Banach. Mais il ne faudrait pas croire que les propriétés usuelles des fonctions exponentielles soient toutes vérifiées.

Si A et B ne commutent pas ($AB \neq BA$), on n'a pas en général

$$e^{A+B} = e^{A} . e^{B}$$

Par contre on a toutes les formules de duplication (cos 2A, etc.) de la trigonométrie hyperbolique ou circulaire

Deuxième question Nous raisonnons ici en termes d'opérateurs.

$$\begin{aligned} e^{(t_1+t_2)A} &= I + (t_1+t_2)A + \cdots + \frac{(t_1+t_2)^n}{n!}A^n + \cdots \\ &= I + (t_1+t_2)A + \cdots + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{C_n^k t_1^k t_2^{n-k}}{n!} A^n + \cdots \\ &= I + (t_1+t_2) \quad + \cdots + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t_1^k t_2^{n-k}}{k!\,\overline{n-k}!} A^n + \cdots \end{aligned}$$

Grâce au théorème sur les produits de séries absolument convergentes, à valeurs dans un espace de Banach, on déduit :

$$= (e^{t_1 A})(e^{t_2 A})$$

d'où la formule

$$\boxed{e^{(t_1+t_2)A} = (e^{t_1 A})(e^{t_2 A})}$$

Troisième question :

La transformation A envisagée est une transformation linéaire définie sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On se donne sa représentation par une matrice dans la base choisie. Le vecteur (X,Y,Z), image de (x,y,z) est fourni par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice [A] est

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut calculer par récurrence sa puissance d'ordre n. Une autre méthode est la diagonalisation de [A]. Les valeurs propres de A s'obtiennent en annulant le déterminant de $[A - \lambda I]$. Mais on note que $\lambda=2$ est valeur propre pour le vecteur propre $x = y = z = 1$.

$$\text{dét}\,[A - \lambda I] = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est divisible par $(\lambda + 1)$ et par $(\lambda - 2)$ donc est de la forme $-(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda + t)$. Pour $\lambda = 0$, le déterminant vaut +2 donc $t = 1$. On vérifie directement par la règle de Sarrus :

$$\text{dét}\,[A - \lambda I] = -(\lambda+1)^2\,(\lambda - 2)$$

La matrice admet la valeur propre $\lambda = 1$ comme valeur propre double et la valeur propre $\lambda = 2$ comme valeur propre simple.

Déterminons les vecteurs propres.

a) $\lambda = -1$

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le plan $x + y + z = 0$ est donc un plan propre, c'est-à-dire que tout vecteur de ce plan est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$ (vecteur non nul).

b) $\lambda = +2$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Un vecteur propre associé doit vérifier $x = y = z$. La droite $x = y = z$ orthogonale au plan propre relatif à $\lambda = -1$ est donc droite propre.

On pourra déterminer trois vecteurs propres formant une base orthogonale ce qui ne doit pas surprendre puisque la matrice A est hermitienne et même symétrique, puisque nous sommes sur un espace vectoriel réel. On sait qu'une matrice hermitienne est diagonalisable dans le groupe linéaire orthogonal. Nous savons donc qu'il existe une matrice de passage $[P]$ telle que $[P]^{-1}[A][P]$ soit une matrice diagonale. Cette matrice de passage est d'ailleurs une matrice unitaire permettant de passer de la base initialement choisie à la base orthogonale formée par les vecteurs propres. Dans le cas présent nous disposons d'un certain arbitraire dans le choix de deux vecteurs propres orthogonaux du plan $x + y + z = 0$.

Supposons avoir pris les trois vecteurs propres suivants, V_1 et V_2 appartenant au plan propre associé à $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} V_1 &= (a, b, c) \\ V_2 &= (a', b', c') \end{aligned}\right\} & \text{valeur propre } \lambda = -1 \\ \left.V_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} & \text{valeur propre } \lambda = 2 \end{cases}$$

de telle sorte que V_1 , V_2 et V_3 soient <u>orthonormés</u>. La matrice de passage $[P]$ s'écrit

$$[P] = \begin{bmatrix} a & a' & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b & b' & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c & c' & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

La matrice inverse de la matrice P se calcule très aisément puisque P est une matrice réelle unitaire : ${}^{t}[P] = [P]^{-1}$

$$[P]^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

On peut calculer

$$[P]^{-1}[A][P] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+c & b'+c' & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ a+c & a'+c' & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ a+b & a'+b' & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Mais on doit tenir compte de ce que V_1 et V_2 sont dans le plan propre.

Soit $a + b + c = 0$; $a' + b' + c' = 0$

D'où le calcul

$$[P]^{-1}[A][P] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -a' & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -b & -b' & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ -c & -c' & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a^2+b^2+c^2) & -(aa'+bb'+cc') & \frac{2}{\sqrt{3}}(a+b+c) \\ -(aa'+bb'+cc') & -(a'^2+b'^2+c'^2) & \frac{2}{\sqrt{3}}(a'+b'+c') \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(a+b+c) & \frac{2}{\sqrt{3}}(a'+b'+c') & 2 \end{bmatrix}$$

Il faut maintenant à nouveau tenir compte du fait que $a+b+c = 0$ et que $a' + b' + c' = 0$, mais aussi de l'orthogonalité de V_1 et V_2 et de leur norme pour chacun égale à 1. C'est-à-dire

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$$

d'où le résultat

$$[D] = [P]^{-1}[A][P] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il s'agit bien sûr d'une matrice diagonale selon les résultats théoriques du cours.

Pour calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de $[A]$, on remarque que l'on peut faire le calcul, simple, de la puissance $n^{\text{ième}}$ de $[D]$ et obtenir ensuite $[A]^n$

$$[A] = [P][D][P]^{-1}$$

donc

$$[A]^n = [P][D]^n[P]^{-1} = \left([P][D][P]^{-1}\right)\left([P][D][P]^{-1}\right) \ldots$$

Or on a

$$[D]^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Un calcul simple en choisissant V_1 et V_2

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & c = 0 \\ a' = \dfrac{1}{\sqrt{6}} & b' = \dfrac{1}{\sqrt{6}} & c' = -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

conduit à la matrice $[A]^n$:

$$[A]^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n}{3} + (-1)^n \frac{2}{3} & \frac{2^n}{3} - (-1)^n \frac{1}{3} & \frac{2^n}{3} - (-1)^n \frac{1}{3} \\ \frac{2^n}{3} - (-1)^n \frac{1}{3} & \frac{2^n}{3} + (-1)^n \frac{2}{3} & \frac{2^n}{3} - (-1)^n \frac{1}{3} \\ \frac{2^n}{3} - (-1)^n \frac{1}{3} & \frac{2^n}{3} - (-1)^n \frac{1}{3} & \frac{2^n}{3} + (-1)^n \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

D'ailleurs on sait que $[A]^n$ est symétrique, puisque $[A]$ l'est, donc il suffisait de calculer une partie seulement des coefficients. Visiblement on peut noter $[A]^n$ d'une manière plus agréable à partir de $[A]$

$$[A]^n = \left(\frac{2^n}{3} + (-1)^n \frac{2}{3}\right)[I] + \left(\frac{2^n}{3} - (-1)^n \frac{1}{3}\right)[A]$$

$$= \frac{2^n}{3}\left([A] + [I]\right) + \frac{(-1)^n}{3}\left(2[I] - [A]\right)$$

$$= a_n[I] + b_n[A] \qquad \text{où} \quad a_n = \frac{2}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)$$

$$\text{et} \quad b_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$$

Donc on calcule maintenant la matrice exponentielle

$$\left[e^{tA}\right] = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!}\left(\frac{2^n}{3}\left([A] + [I]\right) + \frac{(-1)^n}{3}\left(2[I] - [A]\right)\right)$$

$$= \left(\frac{[A]+[I]}{3}\right)\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2t)^n}{n!} + \frac{(2[I]-[A])}{3}\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-t)^n}{n!}$$

Ce qui donne le résultat matriciel

$$[e^{tA}] = \frac{[A]+[I]}{3}\, e^{2t} + \frac{2[I]-[A]}{3}\, e^{-t}$$

ou $e^{tA} = \frac{A+I}{2}\, e^{2t} + \frac{2I - A}{3}\, e^{-t}$ en termes d'opérateurs

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 18.

On utilise l'inégalité suivante

$$|x_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

Elle établit que la forme π_n est continue, de norme au plus 1. La norme est 1 en fait si l'on applique π_n au vecteur ayant 1 comme $n$ième coordonnée et 0 par ailleurs.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 19.

$HL^2(D)$ est un sous-espace de $L^2(D)$. Montrons que cet espace est fermé. Soit f_n une suite de fonctions holomorphes dans D qui converge vers une fonction f au sens de $L^2(D)$.

$$\lim_{n\to\infty} \iint_D |f_n(z) - f(z)|^2\, dx\, dy = 0$$

Soit Z_0 un point de D et Γ un cercle orienté positivement, de rayon r_0, de centre Z_0, inclus dans D et appelons Δ le domaine plan limité par Γ. On sait, d'après le théorème de Cauchy, que

$$f_m(z_0) - f_n(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f_m(z) - f_n(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$= \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_\Delta (f_m(z) - f_n(z)\; dx\, dy$$

où $z = x + iy$

Donc

$$\left| f_m(z_0) - f_n(z_0) \right| \leqslant \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_\Delta \left| f_m(z) - f_n(z) \right| dx\, dy$$

Utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\leqslant \frac{1}{\pi r_0^2} \left(\iint_\Delta \left| f_m(z) - f_n(z) \right|^2 dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}} (\text{Aire de } \Delta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\iint_D \left| f_m(z) - f_n(z) \right|^2 dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\, r_0}$$

Par suite f_n est une suite de Cauchy pour la norme uniforme dans le disque de centre 0 et de rayon α où $\alpha < 1$ (puisque $\frac{1}{r_0} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$). Cette suite f_n converge donc vers une fonction holomorphe laquelle coïncide presque partout avec f , ce qui termine la démonstration puisque f peut être considérée comme appartenant à $H\,L^2(D)$.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 20

Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert ℓ^2. Par ailleurs, soit $x \in \ell^2$ où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots\, x_n, 0, 0, \ldots)$$

$x^{(n)} \in F$ et $\|x - x^{(n)}\|_2 = \sqrt{\sum_{n+1}^{\infty} |x_k|^2}$. Par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x^{(n)}\|_2 = 0$.

Donc F est dense dans ℓ^2.

Une autre démonstration utilise directement le théorème des bases hilbertiennes du cours et la base canonique de ℓ^2.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 21

$P_n(f)$ est un polynôme de degré n au plus, donc peut être considéré comme un élément de $\mathcal{C}[0, 1]$.

En outre $P_n(f+g)(x) = P_n(f)(x) + P_n(g)(x)$; $P_n(\lambda f)(x) = \lambda P_n(f)(x)$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tous f, g de $\mathcal{C}[0, 1]$ car

$$P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; x^k(1-x)^{n-k} \; f(\frac{k}{n})$$

En outre, puisque $x \in [0, 1]$, on dispose de la majoration

$$|P_n(f)(x)| \leqslant (\sum_{k=0}^{n} C_n^k \; x^k \; (1-x)^{n-k}) \; \|f\|$$

$$\leqslant (x + 1 - x)^n \; \|f\| = \|f\|$$

Donc P_n est un opérateur linéaire, continu. Comme $P_n(1) = 1$, sa norme en tant qu'opérateur continu, est précisément 1. Enfin, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0, 1]$, on a bien $Pf(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0, 1]$. C'est un opérateur positif.

On peut établir (théorème de Bernstein) que pour toute f de $\mathcal{C}[0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\| = 0$. Par une démonstration, voir Nanta Iremica, vol. N° 11, Méthodes Mathématiques modernes utilisées en théorie de l'approximation. Cette démonstration utilise toutes les propriétés explicitées dans cet exercice de l'opérateur P_n.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 22

1ère question $P_h : \mathcal{C}[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie comme forme linéaire. En outre

$$|P_h(f)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left(\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\,dx\right)\|f\|$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left[\text{Arctg}\,\frac{x}{h}\right]_0^{\frac{1}{h}}\|f\|$$

Soit

$$\|P_h\| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\ \text{Arctg}\ \frac{1}{h^2}\right)\ \|f\|$$

Or

$$P_h(1) = \frac{2}{\pi}\ \text{Arctg}\ \frac{1}{h^2}\ .\ \text{Donc}\quad \|P_h\| = \frac{2}{\pi}\ \text{Arctg}\ \frac{1}{h^2} \leqslant 1$$

<u>2ème question</u> : $P_h(f)-f(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0)dx + f(0)\left[\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2} - 1\right]$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \text{Arctg}\,\frac{1}{h^2} = \frac{\pi}{2}$. Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}\,dx = 1$

On va majorer la première partie du second membre. On laisse d'abord $\eta > 0$ libre entre 0 et 1.

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}\big(f(x)-f(0)\big)\,dx\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta}\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,dx$$

$$+\ \frac{2}{\pi}\int_{\eta}^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,dx$$

$\varepsilon>0$ <u>étant donné</u>, on fixe η de sorte que $|f(x)-f(0)| < \varepsilon$ pour tout $|x| < \eta$ grâce à la continuité de f en 0. On appelle $\|f\|$ la borne supérieure de f sur $[0,1]$. Il vient

$$|P_h(f)-f(0)| \leqslant \varepsilon + \left(2\|f\|\frac{2}{\pi}\ \frac{h}{h^2+\eta^2}\right) + \|f\|\left(1-\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}\,dx\right)$$

Lorsque h est choisi assez petit, le second membre peut être rendu inférieur à 2ε. On a donc montré que pour toute fonction f de $\mathcal{C}[0,1]$

$$\lim_{h\to 0} P_h(f) = P_0(f) = f(0)$$

Avec l'opérateur de convolution on peut considérablement généraliser ce résultat. (Cf. Nanta-Iremica, Vol N°11, <u>méthodes mathématiques modernes utilisées en théorie de l'approximation</u>).

Le dual de $\mathcal{C}[0,1]$ peut être normé comme à l'accoutumée

$$\| P_h \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | P_h(f) | = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{1}{h^2} \leqslant 1$$

Mais on n'a pas $\lim\limits_{h \to 0} \| P_h - P_0 \| = 0$. C'est-à-dire que la limite n'est pas atteinte uniformément pour toutes les fonctions de même norme.

En effet, posons $f_h(x) = \operatorname{Sup}(1 - \frac{x}{h}, 0)$ pour $1 \geqslant x \geqslant 0$

Il vient

$$P_h(f_h) = \frac{2}{\pi} \int_0^h (1 - \frac{x}{h}) \frac{h}{h^2 + x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t) \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{\pi}$$

Donc on obtient une quantité constante non nulle :

$$P_h(f_h) - P_0(f_h) = - \left(\frac{\log 2}{\pi} + \frac{1}{2} \right)$$

Pourtant: $\| f_h \| = 1$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 23.

On a évidemment $\| f \|_p \leqslant \| f \|_\infty$ pour $p \geqslant 1$. Pour avoir l'inégalité contraire on se place autour d'un point x_0 tel que $|f(x_0)| = \| f \|_\infty$
Par continuité, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un $\eta > 0$ tel que $|f(x)| \geqslant \|f\|_\infty (1 - \varepsilon)$ pour $|x - x_0| < \eta$. Dès lors

$$\| f \|_p^p \geqslant \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} |f(x)|^p dx \geqslant \| f \|_\infty^p (1 - \varepsilon)^p \, 2\eta$$

Soit

$$\| f \|_p \geqslant \| f \|_\infty (1 - \varepsilon) (2\eta)^{1/p}$$

Lorsque p tend vers l'infini, $(2\eta)^{1/p}$ tend vers 1 (η fixe). Donc on a bien

$$\| f \|_\infty \geqslant \| f \|_p \geqslant \| f \|_\infty (1 - 2\varepsilon)$$

ce qui termine la démonstration de $\lim\limits_{p \to \infty} \| f \|_p = \| f \|_\infty$ pour $f \in \mathbb{C}[0, 1]$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 24. On se place sur $L_p([0, 1], \mathbb{R})$.

$$\left| \int_0^1 f(x) g(x) dx \right| \leqslant \| f \|_p \| g \|_q$$

avec $1 < p < \infty$

et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Par suite si g est fixé dans $L_q[0,1]$, l'application $f \longrightarrow \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est une application linéaire et continue de $L_p[0\,1]$ dans $\mathbb{R}$, donc définit un élément T_g du dual de $L_p[0,1]$. De plus, on montre que la norme de cet élément T_g en tant qu'élément du dual est précisément $\|g\|_q$

$$\|T_g\| = \|g\|_q$$

Si $g_1 \neq g_2$ dans $L_q[0,1]$ alors $T_{g_1} \neq T_{g_2}$. On a réalisé une injection isométrique de $L_q[0,1]$ dans le dual (normé) de $L_p[0,1]$. Un théorème plus puissant montre que cette injection est bijective.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 25

Appelons E_n l'espace vectoriel de dimension $(n+1)$ des polynômes à coefficients réels et de degré au plus égal à n. Appelons F_n le sous-ensemble de E_n formé des polynômes dont le terme de plus haut degré n a l'unité pour coefficient.

Posons $T_n(x) = \cos n(\text{Arc}\cos x)$: il s'agit d'un polynôme de degré n que l'on peut écrire d'ailleurs de façon explicite. En effet

$$\cos nx = \mathrm{Re}(e^{inx}) = \mathrm{Re}(\cos x + i\sin x)^n$$
$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{h=0}^{h=n} i^h C_n^h (\cos x)^{n-h} (\sin x)^h\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_n^{2k} (\cos x)^{n-2k} (1-\cos^2 x)^k$$

où $N = \frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{1}{2}(n-1)$ si n est impair.

En particulier, on obtient pour $T_n(x)$ le polynôme suivant

$$T_n(x) = \cos (n \text{ Arc} \cos x) = \sum_{k=0}^{k=N} C_n^{2k} \; x^{n-2k} \; (x^2 - 1)^k$$

Le terme de plus haut degré est celui du degré n. Son coefficient vaut a_n

$$a_n = \sum_{k=0}^{k=N} C_n^{2k} = 1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2n}$$

On sait que $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ à condition de considérer que $C_n^k = 0$ si $k > n$.

$$a_n = 1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{2N-1} + C_{n-1}^{2N}$$

Si n est impair, $2N = n-1$, donc $a_n = 2^{n-1}$

Si n est pair, $2N = n$ et $C_{n-1}^n = 0$ donc $a_n = 2^{n-1}$

En définitive $a_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Plus généralement, le terme de degré $n-2m$ de $\cos (n \text{ Arc} \cos x)$ est donné par

$$(-1)^m \sum_{h=0}^{N-m} C_n^{2m+2h} \; C_{m+h}^h$$

$T_n(x)$ possède n racines simples, aux valeurs

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \qquad k=1, 2, \ldots, n$$

En outre $|T_n(x)| \leqslant 1$ pour $x \in [-1, +1]$ et $T_n(x)$ prend sur $[-1, +1]$ les valeurs extrêmes $+1$ et -1, alternativement, en $(n+1)$ points, à savoir

$$y_k = \cos \frac{2k}{2n} \pi \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Et

$$T_n(y_k) = \cos k\pi = (-1)^k$$

Considérons maintenant le polynôme $Q_n(x)$ défini par

$$Q_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Q_n est de degré n et appartient à F_n (c'est-à-dire que son coefficient de plus haut degré est 1).

Montrons que pour tout polynôme P de F_n on a

$$(1) \qquad \sup_{x \in [-1, +1]} |P(x)| \geqslant \sup_{x \in [-1, +1]} |Q_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

On raisonne par l'absurde en supposant qu'un polynôme P de F_n satisfasse l'inégalité contraire

$$(2) \qquad \sup_{x \in [-1, +1]} P(x) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

On pose $Q = Q_n - P$. On calcule $Q(y_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P(y_k)$.

Comme $|P(y_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, on constate que Q change alternativement de signe aux points $y_o, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Donc, par la propriété des zéros, le polynôme Q possède n zéros distincts. Or Q est de degré $(n-1)$ au plus, puisque Q_n et P sont dans F_n. La seule possibilité est donc $Q = 0$, soit $Q_n = P$ ce qui est refusé par (2). Donc (1) est satisfaite.

Soit maintenant P un polynôme de degré n au plus mais dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1. Soit k le degré de P. D'après ce qui précède

$$\sup_{x \in [-1, +1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

et l'inégalité est stricte si P diffère de T_k. En particulier

$$\sup_{x \in [-1, +1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ce qui termine la démonstration du théorème de Čebičev.

Ce résultat est une première étape dans le calcul de la constante a_n qui intervient au chapitre I, §5.3.5. Il s'agit là de comparer sur E_n, espace vectoriel réel de dimension n+1, deux normes

$$\|P\|_1 = \sup_{i=0,\ldots,n} |a_i|$$

et

$$\|P\|_\infty = \sup_{x \in [-1,+1]} |P(x)|$$

lorsque $P(x) = a_o + \ldots + a_n x^n$. On a évidemment $\|P\|_\infty \leqslant (n+1) \|P\|_1$ et il y a égalité pour $P(x) = 1 + \ldots + x^n$. Donc

$$\sup_{P \in E_n} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_1} = n+1.$$

Il reste à calculer $a_n = \inf_{P \in E_n} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_1}$. Le théorème de Čebičev nous assure que

$$a_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

Il faudrait une analyse plus précise pour calculer explicitement a_n.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 26.

a) $\quad Pf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy \quad (x \neq 0)$ et $Pf(0) = f(0)$

Naturellement, $Pf(x)$ est bien définie et continue pour toute valeur non nulle de $x \geqslant 0$. En outre,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = f(0)$$

puisque l'on peut écrire

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy - f(0) = \frac{1}{x}\int_0^x (f(y) - f(0))dy$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, grâce à la continuité en 0 de la fonction f, il existe un $\eta > 0$ tel que $|f(y) - f(0)| < \varepsilon$ pour tout $0 \leqslant y \leqslant \eta$.

Soit

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x [f(y) - f(0)]dy\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant x \leqslant \eta$$

Comme on a pris $Pf(0) = f(0)$ On en déduit que $x \longrightarrow Pf(x)$ est une fonction continue sur $[0, \infty[$.

Clairement P est un opérateur linéaire défini sur E.

En outre $|Pf(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(y)|dy \leqslant \|f\|_\infty \qquad$ pour $x \neq 0$

et donc (puisque $Pf(0) = f(0)$) :

$$\sup_{x\in[0,\infty[} |Pf(x)| \leqslant \|f\|_\infty \qquad \text{soit } \|Pf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

Cette inégalité montre donc que P est un opérateur linéaire continu de E (normé) dans l'ensemble des fonctions continues bornées sur $[0, \infty[$, espace muni de la norme uniforme. Nous démontrerons plus loin qu'en fait $Pf \in E$ et donc que P est continu de E dans E. On l'appelle l'<u>opérateur de Césaro</u>.

De même considérons

$$Qf(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(xy)^2} f(y)dy$$

Lorsque $f \in E$, $Qf(x)$ est définie et continue en chaque point $x > 0$ puisque l'intégrale est absolument et uniformément convergente. On a même

$$|Qf(x)| \leqslant \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^\infty e^{-(xy)^2}dy\right)\|f\|_\infty$$

or $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(xy)^2}dy = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2x}\sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

D'où la majoration

$$\| Q f \|_{\infty} \leqslant \| f \|_{\infty}$$

Q est donc un opérateur linéaire et continu de E (normé) dans l'ensemble des fonctions continues bornées sur $]0,\infty[$ et muni de la norme uniforme. Nous démontrerons plus loin qu'en fait $Q f \in E$ et donc que Q est continu de E dans E.

b) $L : f \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x)$ est une application évidemment linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Cette forme est continue grâce à la majoration facile

$$|L(f)| \leqslant \operatorname{Sup}_{x \in [0, \infty[} |f(x)|$$

c) $L \circ P$ est une forme linéaire continue sur E. Nous allons montrer que $L \circ P = L$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\,dy = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Or pour un nombre $0 < X_0$ à fixer, on écrit :

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(y)\,dy - L(f) = \frac{1}{x} \int_0^x \big(f(y) - L(f)\big)\,dy$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^{X_0} \big(f(y) - L(f)\big)\,dy + \frac{1}{x} \int_{X_0}^x (f(y) - L(f))\,dy$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit X_0 de sorte que $|f(y) - L(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$

dès que $y \geqslant X_0 > 0$. Dans ce cas, pour $x \geqslant X_0$, on a la majoration

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(y)\,dy - L(f) \right| \leqslant 2 \frac{X_0}{x} \| f \|_{\infty} + \frac{x - X_0}{x} \varepsilon \leqslant 2 \frac{X_0}{x} \| f \|_{\infty} + \frac{\varepsilon}{2}$$

On choisit alors $X' > X_0$ de sorte que pour tout $x > X'$ on ait $2 \frac{X_0}{x} \| f \|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui est possible puisque X_0 est déjà fixé. Dès lors, on a bien le résultat limite désiré.

On démontrerait de même que

$\lim\limits_{x \to +\infty} Qf(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ puisque l'on écrit :

$$Qf(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(xy)^2} f(y)\,dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \longrightarrow f(0)$$

et que $f\left(\frac{t}{x}\right) \longrightarrow f(0)$ lorsque $x \longrightarrow \infty$ (en utilisant l'absolue uniforme convergence de l'intégrale).

Considérons maintenant $\lim\limits_{x \to 0} Qf(x)$. On a de la même façon

$$Q f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt$$

et pour les mêmes raisons, utilisant l'absolue uniforme convergence de l'intégrale et pour $t > 0$ le résultat

$$\lim_{x \to +0} f\left(\frac{t}{x}\right) = L(f)$$

On constate que :

$$Q f(x) \longrightarrow L(f) \quad \text{lorsque} \quad x \longrightarrow +\infty$$

Finalement P et $Q \in \mathcal{L}(E)$.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 27.

1°) $TP(z) = L(P_z)$ où $P_z(y) = P(zy)$

Dans $L(P_z)$, L agit sur P_z en tant que polynôme en y.

Montrons que $T : E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$ et pour ce faire prenons

$P(z) = z^h$ donc $L(P_z) = z^h L(y^h)$ et $L(y^h) = a_h$ $a_h \in \mathbb{C}$

Donc on peut calculer $TP(z)$ pour un polynôme quelconque de E_{n+1}

$$T P(z) = \sum_{h=0}^{n} \alpha_h a_h z^h$$

lorsque $P(z) = \sum\limits_{h=0}^{n} \alpha_h z^h$. Il est clair que T est un opérateur linéaire.

En outre :

$$\|T(P)\| = \sup_{|z| \leqslant 1} |T P(z)|$$

$$= \sup_{|z| \leqslant 1} |L(P_z)|$$

$$\leqslant \sup_{|z| \leqslant 1} \|L\| \, \|P_z\| = \|L\| \sup_{|z| \leqslant 1} \|P_z\|$$

Mais pour $|z| \leqslant 1$, on a

$$\|P_z\| = \sup_{|y| \leqslant 1} |P(zy)| \leqslant \sup_{|t| \leqslant 1} |P(t)| = \|P\|$$

Donc :

$$\|T(P)\| \leqslant \|L\| \|P\|$$

Ce qui prouve que $\|T\| \leqslant \|L\|$, oùla première expression désigne la norme dans $\mathcal{L}(E_{n+1})$, la seconde la norme dans le dual de E_{n+1} .

Puisque E_{n+1} est de dimension finie, il existe $P_0 \in E_{n+1}$ tel que $|L(P_0)| = \|L\|$ et $\|P_0\| = 1$. Dans ce cas, en $z = 1$:

$$|T(P_0)(1)| = |L(P_1)| = |L(P_0)| = \|L\|$$

Donc

$$\|T(P_0)\| = \|L\|$$

Si l'on ne veut pas utiliser le théorème (non démontré dans le cours) assurant l'existence de P_0 , on passera à la limite. Pour tout ε, $1 > \varepsilon > 0$ il existe $P_\varepsilon \in E_{n+1}$ tel que $|L(P_\varepsilon)| \geqslant \|L\|(1-\varepsilon)$ et $\|P_\varepsilon\| = 1$ et on conclura facilement.

Remarque : T est un opérateur linéaire sur E_{n+1} représenté par une matrice diagonale dans la base $(1, x, \dots, x^n)$.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 28.

L'ensemble E des suites infinies $x = \{x_n\}_{n \geqslant 0}$ de nombres réels telles que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ constitue visiblement un espace vectoriel réel (de dimension infinie).

Puisque $|x_n|$ devient petit lorsque n est suffisamment grand, le $\sup_n |x_n|$ a un sens. On note

$$\| x \|_\infty = \operatorname*{Sup}_n |x_n|$$

Vérifions que $x \longrightarrow \| x \|_\infty$ définit une norme sur E . En effet

(1) $$\| x \|_\infty \geqslant 0$$

(2) $$\| x \|_\infty = 0$$

implique $|x_n| = 0$ pour tout n, donc x est la suite nulle

(3) $$\| \lambda x \|_\infty = |\lambda| \, \| x \|_\infty$$

(4) $$\| x + y \|_\infty \leqslant \| x \|_\infty + \| y \|_\infty$$

puisque

$$|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| \text{ donc } \operatorname*{Sup}_n |x_n + y_n| \leqslant \operatorname*{Sup}_n |x_n| + \operatorname*{Sup}_n |y_n|$$

E est un espace vectoriel normé. Il s'agit en fait d'un espace de Banach. Pour le démontrer, soit $x^{(n)}$ une suite de Cauchy d'éléments de E . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre N tel que pour m et n supérieurs à N , on ait

(1) $$\| x^{(n)} - x^{(m)} \|_\infty \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire pour chaque p fixé

(2) $$| x_p^{(n)} - x_p^{(m)} | \leqslant \varepsilon$$

Pour p fixé, la suite $x_p^{(m)}$ est une suite de Cauchy de nombres réels, donc converge vers un nombre noté x_p . On a $| x_p^{(n)} - x_p| \leqslant \varepsilon$ en faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité (2). Ceci étant valable pour tout p , on a bien (3) $\| x^{(n)} - x \|_\infty \leqslant \varepsilon$ en posant $x = \left\{ x_p \right\}_{p \geqslant 0}$. Il reste à montrer que x appartient bien à E. Choisissons donc N de telle sorte que l'on ait pour $n \geqslant N$, l'inégalité (3). On a alors, n étant fixé, une valeur de p telle que pour $p \geqslant P$: $|x_p^{(n)}| \leqslant \varepsilon$ (car $x^{(n)}$ est un élément de E). D'où pour $p \geqslant P$

$$| x_p - x_p^{(n)} | \leqslant \| x - x^{(n)} \|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Soit $|x_p| \leqslant 2\,\varepsilon$ ce qui établit l'appartenance de x à E .

Grâce à la norme choisie, on utilise les méthodes de raisonnement de la convergence uniforme. On pourra comparer la démonstration de cette question à celle utilisée pour prouver que $\mathcal{C}[0,1]$ est un espace de Banach pour la norme uniforme.

Deuxième question :

Calculons la norme de la différence $x - \sum_{n=0}^{n=p} x_n\, x^{(n)}$

$$\|x - \sum_{n=0}^{n=p} x_n\, x^{(n)}\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n > p} |x_n|$$

Pour p suffisamment grand, on a bien

$$\operatorname*{Sup}_{n > p} |x_n| \leqslant \varepsilon$$

Donc $\lim\limits_{p \to \infty} \sum_{n=0}^{n=p} x_n\, x^{(n)} = x$ au sens de l'espace de Banach E.

Troisième question :

Rappelons que le dual topologique d'un espace vectoriel normé est l'ensemble des formes linéaires continues définies sur cet espace. Nous nous proposons de déterminer l'espace dual topologique de E.

a) Soit y une suite de nombres réels $y = \{y_n\}_{n \geqslant 0}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|$ converge.

Etudions le nombre $F(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x_n\, y_n$. Montrons que $F(x)$ est bien défini. On a :

(1) $$|F(x)| \leqslant \left(\operatorname*{Sup}_{n} |x_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{n=+\infty} |y_n|\right) < +\infty$$

D'autre part

$$F(x + x') = F(x) + F(x')$$

$$F(\lambda x) = \lambda F(x)$$

Par ailleurs, l'inégalité (1) peut s'écrire avec les notations de la première question

(2) $$|F(x)| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{n=0}^{n=+\infty} |y_n|$$

ce qui montre que F définit une forme linéaire continue sur E, donc un élément du dual topologique E' de l'espace E.

L'inégalité (2) fournit une majoration a priori de la norme de la forme linéaire continue F. On a

$$\|F\| < \sum_{n=0}^{n=+\infty} |y_n| \tag{3}$$

En fait, on a effectivement

$$\|F\| = \sum_{n=0}^{n=+\infty} |y_n|$$

Pour le démontrer, il suffit de prendre une suite x, élément de E et de norme 1, telle que pour un nombre $\varepsilon>0$ donné, on ait :

$$x_n = \operatorname{sgn} y_n \qquad \text{pour } n \leqslant N \quad (\text{où } \operatorname{sgn} z = \frac{z}{|z|} \text{ si } z \neq 0 \text{ et } 0 \text{ si } z = 0)$$

$$x_n = 0 \qquad \text{pour } n > N, \ N \text{ étant choisi de sorte que}$$

$$\sum_{N+1}^{\infty} |y_n| \leqslant \varepsilon$$

On a alors pour cette suite $x = \{x_n\}$, qui appartient évidemment à E

$$|F(x)| = \sum_{n=0}^{N} |y_n| \geqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|\right) - \varepsilon$$

Soit puisque $\|x\| = 1$, la minoration

$$\|F\| \geqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|\right) - \varepsilon$$

Mais $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Donc on a le résultat limite

d'où, puisque $\varepsilon>0$ est arbitra

$$\|F\| = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$$

b) On constate facilement que ℓ^1 est un espace vectoriel. De même, il est facile de vérifier que l'expression $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$ définit une norme sur ℓ^1. On peut montrer que ℓ^1 est un espace de Banach. Indiquons seulement l'idée de la démonstration.

Soit $y^{(n)}$ une suite de Cauchy d'éléments de ℓ^1. Pour chaque p fixé, on a

$$\left| y_p^{(n)} - y_p^{(m)} \right| \leqslant \| y^{(n)} - y^{(m)} \|_1$$

Donc $y_p^{(n)}$ est une suite de Cauchy de nombres réels laquelle doit converger vers un nombre noté y_p. Il reste donc à vérifier que $y = \{y_p\}_{p \geqslant 0}$ est un élément de ℓ^1 et que $y^{(n)}$ converge vers y au sens de ℓ^1, ce qui est bien facile et analogue à ce qui fut fait à la première question pour l'espace E.

c) Notons par E' l'espace dual topologique de l'espace E. Par la question (a), nous avons montré que l'on peut identifier ℓ^1 à un sous-espace de E'

$$\ell^1 \subset E'$$

En effet, à tout élément y de ℓ^1, on peut associer la forme linéaire continue sur E définie par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n$$

et la correspondance est isométrique entre ℓ^1 et un sous-espace vectoriel de E'.

Nous désirons montrer qu'en fait l'isométrie précédente permet d'identifier l'espace ℓ^1 et E'.

Donnons nous donc une forme linéaire continue L sur l'espace E. Posons $y_n = L(x^{(n)})$ où $x^{(n)}$ est l'élément de E défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_p^{(n)} = 0 & \text{si } n \neq p \\ x_n^{(n)} = 1 & \end{cases}$$

Naturellement, y_n est alors un nombre réel. Montrons que $y = \{y_n\}_{n \geqslant 0}$ est un élément de ℓ^1. Pour cela, envisageons la suite X_N, élément de E, définie selon

$$X_N = \{x_n\}_{n \geqslant 0} \quad \begin{cases} x_n = \operatorname{sgn} y_n & \text{pour } n \leqslant N \\ x_n = 0 & \text{pour } n > N \end{cases}$$

Il vient

$$\| X_N \|_\infty = 1$$

$$| L(X_N) | \leqslant \| L \| \, \| X_N \|_\infty$$ car L est continue(et de norme $\|L\|$)

Cependant $X_N = \sum_0^N x_n x^{(n)}$. Ce qui permet d'écrire

$$L(X_N) = \sum_{n=0}^N y_n \operatorname{sgn} y_n = \sum_{n=0}^N |y_n|$$

D'oũ, pour tout entier positif N, $\quad \sum_{n=0}^N |y_n| \leqslant \|L\|$

Ce qui montre que $\sum_{n=0}^\infty |y_n|$ converge et donc que y appartient à ℓ^1 .

Maintenant il nous faut établir que la valeur de L au point x de E est bien déterminée par la donnée de $y = \{y_n\}_{n \geqslant 0}$ selon la relation

$$L(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$$

Calculons

$$L\left(\sum_{n=0}^P x_n x^{(n)}\right)$$

On trouve facilement

$$L\left(\sum_{n=0}^P x_n x^{(n)}\right) = \sum_{n=0}^P x_n y_n$$

Mais $y = \{y_n\}_{n \geqslant 0}$ est un élément de ℓ^1. Or L est une forme linéaire continue sur E , et à la deuxième question nous avons établi que $\sum_{n=0}^p x_n x^{(n)}$ converge, lorsque $p \to \infty$, vers x. Donc $L(x) = \lim_{p \to \infty} \sum_0^n x_n L(x^n)$ cette limite est

Donc

(1) $$L(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$$

En résumé, tout élément de ℓ^1 détermine une forme linéaire continue unique sur E et réciproquement toute forme linéaire continue sur E provient selon (1) d'un élément de ℓ^1 . De plus, la norme de la forme linéaire continue est précisément la norme de l'élément correspondant de ℓ^1 . L'espace ℓ^1 est donc isométriquement isomorphe au dual topologique de E muni de sa norme.

Quatrième question :

Toute suite x appartenant à ℓ^1 est telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ et par suite l'espace ℓ^1 est un sous-espace vectoriel de l'espace E . Sur ℓ^1, nous disposons de deux normes

la norme $\|.\|_\infty$ héritée de E

la norme $\|.\|_1$ provenant de la définition de ℓ^1 .

Comparons ces deux normes. Une première inégalité est facile

$$(1) \qquad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$$

(en effet $|x_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ ce qui donne l'inégalité (1) en passant aux bornes supérieures).

Une inégalité en sens contraire est-elle possible ? Nous allons montrer que non, ce qui revient à dire que la topologie de ℓ^1, c'est-à-dire la topologie duale, est strictement plus fine que la topologie que ℓ^1 possède comme sous-espace de E.
Nous allons établir qu'une inégalité du type (2) :

$$(2) \qquad \|x\|_1 \leqslant A\|x\|_\infty$$

où A est une constante positive, est impossible pour tout x dans ℓ^1.
En effet, prenons la suite Z_N définie par (notations de la 2ème question)

$$Z_N = \sum_{n=0}^{n=N} x^{(n)}$$

D'une part

$$\|Z_N\|_1 = N+1$$

D'autre part

$$\|Z_N\|_\infty = 1$$

L'inégalité (2) donne alors

$$(N+1) \leqslant A \quad \text{pour tout} \quad N$$

Ceci montre que (2) est impossible.

Cinquième question:

Par E'' on désigne le dual topologique de $\ell^1 = E'$, c'est-à-dire le bidual topologique de E. Nous nous proposons de déterminer cet ensemble en suivant la même démarche qu'à la troisième question.

a) Si $z = \{z_n\}_{n \geqslant 0}$ est une suite bornée (c'est-à-dire telle que $\|z\|_\infty = \sup\limits_{n \geqslant 0} |z_n|$ existe et est finie), la correspondance $y \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n z_n$ définit une forme linéaire continue sur ℓ^1.

En effet

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} y_n z_n \right| \leqslant \|z\|_\infty \|y\|_1$$

Il est facile de montrer que la norme de cette forme linéaire continue est précisément $\|z\|_\infty$ en utilisant une méthode identique à celle utilisée en a à la troisième question.

Réciproquement, soit L une forme linéaire continue sur ℓ^1. Posons

$$z_n = L(x^{(n)})$$

(on remarque que $x^{(n)}$ est un élément de $\ell^1 \subset E$).

De plus

$$|z_n| = |L(x^{(n)})| \leqslant \|L\| \|x^{(n)}\|_1 = \|L\|$$

car L est une forme linéaire continue sur ℓ^1 et $x^{(n)}$ un élément de norme 1 de ℓ^1. Par suite $z = \{z_n\}_{n \geqslant 0}$ est un élément de l'espace des suites bornées.

Enfin, en montrant que $\sum\limits_{n=0}^{p} x_n x^{(n)}$ converge vers $x = \{x_n\}_{n \geqslant 0}$ au sens de ℓ^1, lorsque p tend vers l'infini, on démontre comme en (c)

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n y_n$$

En résumé, E'' peut s'identifier à l'espace des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Nous avons vu qu'en général E s'identifie à un sous-espace vectoriel de E''. Il est facile de voir ici que E est un sous-espace vectoriel fermé de E''(soit directement, soit en disant que E est complet pour la norme $\|.\|_\infty$ et donc qu'une suite d'éléments de E, convergeant vers un élément x au sens de E'', est une suite de Cauchy dans E, ce qui entraîne l'appartenance de x à E).

Dans l'exemple de cet exercice nous venons de construire un ensemble E qui par la correspondance canonique de E dans E'' est un sous-espace vectoriel strict de E''.

Lorsque E est de dimension finie, on sait que E est canoniquement identifiable à E''. Nous venons de voir que ce résultat n'est plus valable en dimension infinie, en général. Toutefois les espaces de Banach tels que E s'identifie ainsi à E" jouent un grand rôle en analyse fonctionnelle où ils sont connus sous le nom d'espaces réflexifs.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 29. E désigne un espace vectoriel normé réel ou complexe.

Supposons donc avoir construit deux opérateurs P et Q de $\mathcal{L}(E)$ tel que

$$PQ - QP = I$$

Vérifions par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$PQ^{n+1} - Q^{n+1}P = (n+1)\,Q^n$$

Pour $n = 0$, c'est l'équation de définition. Pour $n = 1$, on multiplie à droite et à gauche l'équation de définition par Q, puis on ajoute

$$\left\{\begin{aligned} PQ^2 - QPQ &= Q \\ QPQ - Q^2P &= Q \end{aligned}\right.$$

soit

$$PQ^2 - Q^2P = 2Q$$

En supposant la relation exacte au rang (n-1), on écrit donc

$$PQ^{n-1} - Q^{n-1}P = (n-1)\,Q^{n-2}$$

et en la multipliant à droite par Q :

$$PQ^n - Q^{n-1}PQ = (n-1)\,Q^{n-1}$$

Mais en multipliant l'équation de définition à gauche par Q^{n-1}, il vient

$$Q^{n-1} P Q - Q^n P = Q^{n-1}$$

Soit, en additionnant

$$P Q^n - Q^n P = (n-1+1)\, Q^{n-1} = n\, Q^{n-1}$$

ce qui termine la démonstration.

Estimons maintenant la norme des opérateurs P et Q (au sens de $\mathcal{L}(E)$) et en utilisant

$$\|P Q\| \leqslant \|P\| \|Q\| \quad \text{et} \quad \|Q^{n+1}\| \leqslant \|Q\| \|Q^n\|$$

Soit

$$\|P Q^{n+1} - Q^{n+1} P\| = (n+1) \|Q^n\|$$

et donc $\quad (n+1)\|Q^n\| \leqslant \|P\| \|Q^{n+1}\| + \|Q^{n+1}\| \|P\|$

$$\leqslant 2 \|P\| \|Q\| \|Q^n\|$$

Par suite, pout tout n, si l'on suppose $\|Q^n\| \neq 0$, on a

$$(n+1) \leqslant 2 \|P\| \|Q\|$$

Une telle relation est impossible. Supposons alors $\|Q^{n_0}\| = 0$ c'est-à-dire $Q^{n_0} = 0$ pour un certain n_0. Grâce à la relation de récurrence, on a $Q^{n_0 - 1} = 0$ et donc $Q = 0$, ce qui est impossible puisque $P Q - Q P = I$.

A l'exercice N° 5, nous avons défini un espace E et une convergence sur E (communément appelé <u>espace S des fonctions à décroissance rapide</u>). En outre nous avons construit des opérateurs A, B linéaires et continus sur E et satisfaisant

$$A B - B A = I$$

Par suite la convergence sur S ne peut provenir de l'existence d'une norme sur S : on dit que S <u>n'est pas normable</u>.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

Exercice n° 30

Polynôme d'Hermite

On part du développement

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Qn(X)$$

1°) Montrer que les Qn sont des polynômes tels que

$$Qn(x) = e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$$

2°) Montrer que la suite $H_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} Q_n(x)$ est orthogonale sur $L^2[-\infty, +\infty]$ en intégrant par rapport à x le produit des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x)$$

Etablir précisément

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\, H_m(x) dx &= 0 \qquad \text{pour } n \neq m \\ &= 2^n\, n! \sqrt{\pi} \quad \text{pour } n = m \end{aligned}$$

Exercices n° 31

Avec les notations de l'exercice précédent, calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}\, H_n(s) ds$$

En déduire que $H_n(x)$ est solution de l'équation intégrale

$$\lambda H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}\, H(s) ds \quad \text{pour} \quad \lambda_n = i^n \sqrt{2\pi}$$

Exercice n° 32

Montrer qu'il n'existe pas de poids h pour lequel les monômes x^n sont orthogonaux sur l'espace de Hilbert $L^2([-1, +1], h)$.

Exercice n° 33

Utilisation des bases orthogonales.

On désigne par $\mathcal{C}[0, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions (à valeurs réelles ou complexes) d'une variable réelle, définies et continues sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

On structure $\mathcal{C}[0, 1]$ en espace préhilbertien noté $\mathfrak{C}[0, 1] = E$ à l'aide du produit scalaire usuel :

$$<f, g> = \int_0^1 f(x)\, \overline{g(x)}dx$$

On désigne par H la partie de $\mathfrak{C}[0, 1]$ formée des fonctions deux fois continûment dérivables (dérivée à droite en x = 0, à gauche en x = 1), et vérifiant les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} f(0) + f(1) = 0 \\ f'(0) + f'(1) = 0 \end{cases}$$

On considère l'opérateur intégral $\mathbb{A}$, appliquant E dans E, qui à toute fonction f appartenant à E fait correspondre la fonction $Af = F$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 (1-2\,|x-y|)\; f(y)dy$$

1°) démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E,

2°) a- démontrer que, pour toute fonction f appartenant à E, $Af = F$ appartient à H et vérifie la relation :

$$F''(x) = -4f(x)$$

b- démontrer qu'inversement, quelle que soit la fonction F appartenant à H, il existe une fonction unique f, appartenant à E, telle que $Af = F$

3°) vérifier que l'opérateur $\mathbb{A}$ est hermitien,

4°) démontrer la relation : $\|Af\|^2 \leqslant \frac{1}{3}\|f\|^2$ valable pour toute fonction $f \in E$ et qui montre que l'opérateur $\mathbb{A}$ est borné, avec $\|A\| \leqslant 1/\sqrt{3}$

5°) déterminer les valeurs propres de l'opérateur $\mathbb{A}$ et montrer qu'à chaque valeur propre λ_n correspond un espace propre P_n de dimension 2.

6°) a- on désigne par $(f_{1,n}, f_{2,n})$ une base orthonormée de l'espace propre P_n.
Montrer que la fonction : $\varphi_n(x, y) = f_{1,n}(x), f_{1,n}(y) + f_{2,n}(x)\, f_{2,n}(y)$

est indépendante de la base orthonormée de P_n choisie.

b- soit $s(t)$ la fonction périodique de période 2, définie par :

$$s(t) = 1-2|t|$$

sur l'intervalle $[-1, +1]$. Calculer le développement en série de Fourier de $s(t)$.
En déduire la relation :

$$1-2|x-y| = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x, y)$$

Préciser le domaine de validité de cette relation dans le plan des (x, y).

Exercice n° 34

Calcul de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $\mathcal{H}$ un espace préhilbertien réel et $x_1, x_2, \dots x_n$, n vecteurs linéairement indépendants. Montrer qu'il existe n éléments $y_1, y_2, \dots y_n$, formant un système orthonormal de sorte que l'espace vectoriel engendré par $y_1, \dots y_p$ coïncide avec l'espace vectoriel engendré par $x_1, \dots x_p$ (construire pas à pas le vecteur y_p), pour tout $p \leqslant n$

$$\text{Soient} \quad G(x_1, x_2, \dots x_p) = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_1, x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_p, x_1\rangle & \langle x_p, x_2\rangle & \langle x_p, x_p\rangle \end{bmatrix}$$

et $g(x_1, x_2, \dots x_n)$ le déterminant de cette matrice. A un signe près, montrer que y_n peut s'écrire (sauf pour n = 1 auquel cas $y_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{g(x_1)}}$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{g(x_1, \dots, x_{n-1})\, g(x_1, \dots, x_n)}} \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_2, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_1\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_{n-1}\rangle & \langle x_2, x_{n-1}\rangle & \dots & \langle x_n, x_{n-1}\rangle \\ x_1 & x_2 & & x_n \end{vmatrix}$$

(on utilisera les règles de Cramer pour le calcul de y_n en remarquant qu'on obtient y_n en minimisant

$$\| x_n - (a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}) \|$$

Retrouver ainsi les trois premiers polynômes de Legendre.

Exercice n° 35

Pour une famille de polynômes orthonormaux, établir la relation

$$\sum_{n=0}^{n} P_n^2(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} (P'_{n+1}(x)\, P_n(x) - P'_n(x)\, P_{n+1}(x))$$

(utiliser la formule de Christoffel-Darboux en faisant tendre y vers x).

Exercice n° 36

Soient $T_n(x)$ les polynômes de Čebičev de premier type, c'est-à-dire les polynômes orthogonaux sur $L^2[(-1, +1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$ (on remarque que ces polynòmes sont des cas particuliers des polynômes de Jacobi avec $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$).

Vérifier les diverses propriétés suivantes (avec une normalisation convenable)

1°) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (T_n(x))^2 dx = \frac{\pi}{2}$ si $n \geqslant 1$ et π si $n = 0$

2°) $a_n = 2^{n-1}$

3°) $A_n = 2$, $B_n = 0$ et $C_n = 1$

4°) $T_n(\cos x) = \cos nx$

5°) $\displaystyle (1 - x^2) \frac{d^2T_n(x)}{dx} - x \frac{d\ T_n(x)}{dx} + n^2T_n(x) = 0$

6°) $$2^n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma[\frac{1}{2}]} T_n(x) = (-1)^n \sqrt{1-x^2}\ \frac{d^n((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})}{dx^n}$$

7°) $$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]=k} (-1)^k \frac{(n-k-1)}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

où $[\frac{n}{2}]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$

8°) $|T_n(x)| \leqslant 1$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$

Exercice n° 37

1°) Soit f une fonction développable en série de polynômes de Čebičev de première espèce selon

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \quad \text{où } |x| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Montrer que :

$$\int_{-1}^{x} f(t)dt = \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k-1} - a_{k+1}}{2k}\right) T_k(x) \qquad |x| \leqslant 1$$

2°) montrer que le développement d'une fonction $f(x)$ en série de polynômes de Čebičev de première espèce correspond au développement de $f(\cos x)$ en série de cosinus. En déduire le développement de $\frac{1}{1+x^2}$ en séries de polynômes de Čebičev.

$$\frac{1}{1+x^2} \sim \sqrt{2}\ \left(\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)^2\ T_2 + \ldots + (-1)^n\ (\sqrt{2}-1)^{2n}\ T_{2n}(x) + \ldots\right)$$

Exercice n° 38

Propriété des zéros des polynômes orthogonaux

Considérons la famille des polynômes orthogonaux de Legendre sur $[-1, +1]$ pour l'espace $L^2[-1, +1]$

a) montrer que les n racines de $P_n(x)$ sont réelles, distinctes et situées dans l'intervalle $[-1, +1]$.

(pour effectuer la démonstration, on remarque que $\int_{-1}^{+1} P_n(x)dx = 0$, donc que P_n admet au moins un zéro dans $[-1, +1]$ autour duquel $P_n(x)$ change de signe. On raisonne alors par l'absurde en supposant qu'il existe ℓ racines distinctes $x_1, x_2, \dots x_\ell$ dans $[-1, +1]$ et en considérant $P_n(x)\ (x-x_1)\dots(x - x_\ell)$

On en déduira que nécessairement $\ell = n$)

b) soient $x_1, x_2, \dots x_n$ les zéros de $P_n(x)$ et posons $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = +1$

Dans chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ pour $k = 0, \dots n$, il y a exactement un seul zéro de $P_{n+1}(x)$.

On pourra en déduire une décomposition de la fraction rationnelle où y_k désigne les zéros de $P_{n+1}(x)$

$$\frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\alpha_k}{x-y_k} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_k > 0$$

Les démonstrations de cet exercice sont généralisables à toute famille de polynômes orthogonaux sur $L^2[(a, b), h]$ pour a et b finis.

Exercice n° 39

Soit $\{P_n\}$ une famille de polynômes orthonormaux sur $L^2([a, b], h(x))$.

Soit $\pi(x) = (x - x_1)\dots(x - x_h)$ où $x_1, x_2, \dots x_h$ sont des nombres distincts de sorte que $\pi(x) \geqslant 0$ sur $[a, b]$.

Montrer que la famille Q_n où

$$Q_n(x) = \frac{1}{\pi(x)} \begin{vmatrix} P_n(x) & \dots & P_{n+h}(x) \\ P_n(x_1) & \dots & P_{n+h}(x_1) \\ P_n(x_h) & \dots & P_{n+h}(x_h) \end{vmatrix}$$

est orthogonale sur $L^2([a, b], \pi(x)\, h(x))$

Exercice n° 40

Soit E un espace de Hilbert et $\mathcal{U}$ un opérateur hermitien linéaire et continu de E dans E. On suppose que

$$\|\mathcal{U}^n\| \leqslant C \qquad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 0$$

où C est une constante positive.

En utilisant le théorème de projection, montrer que pour chaque x de E

$$P_\infty(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} \mathcal{U}^h(x)$$

existe au sens de l'espace E. Montrer que P_∞ définit un opérateur linéaire, projecteur orthogonal, tel que :

$$P_\infty \circ \mathcal{U} = \mathcal{U} \circ P_\infty = P_\infty$$

Exercice n° 41

Soit E un espace vectoriel préhilbertien sur le corps des complexes. Soient P et Q deux opérateurs hermitiens de E dans E tels que :

$$[P, Q] = PQ - QP = iI$$

où I est l'opérateur identité ; $[P, Q]$ s'appelle le crochet de Poisson de P et Q.

On pose :

$$A = P + iQ$$

$$A^* = P - iQ$$

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$$

1°) calculer $A A^*$ et $A^* A$ en fonction de H.

En déduire que : $[A, H] = A$

$$[H, A^*] = A^*$$

2°) x_λ étant un vecteur propre relatif à une valeur propre λ de H (s'il en existe), montrer que :

$$\|A^* X\|^2 = (2\lambda + 1)\|X_\lambda\|^2$$

$$\|A X\|^2 = (2\lambda - 1)\|X_\lambda\|^2$$

$$H A X_\lambda = (\lambda - 1) AX_\lambda$$

$$H A^* X_\lambda = (\lambda + 1) A^* X_\lambda$$

3°) déduire de ces formules que :

1) Si le spectre S(c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de H) est non vide, il est borné inférieurement

2) Si $\lambda = 1/2$ n'appartient pas à S, S est vide

3) Si $\lambda = 1/2$ appartient à S, alors $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ sont des valeurs propres

4) Tous les vecteurs propres correspondant à la valeur propre λ_n sont de la forme :

$$X_{\lambda_n} = (A^*)^n X_{\lambda_o}$$

où X_{λ_o} est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_o

5) $\lambda_o = 1/2$ est valeur propre de H si, et seulement si, il existe un vecteur X tel que $AX = 0$. Quels sont les vecteurs propres $X_{1/2}$ de H ?

Exercice n° 42

On considère l'équation différentielle $xy'' + y' + \lambda xy = 0$ où λ est un nombre réel donné, et on appelle problème P_λ la recherche des solutions y non nulles et à valeurs réelles de cette équation satisfaisant les conditions C suivantes :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

1ère question

Montrer que pour deux valeurs distinctes de λ, les solutions (supposée exister) correspondantes des problèmes P_λ respectifs vérifient une propriété d'orthogonalité relativement à un certain produit scalaire. En déduire qu'elles sont linéairement indépendantes.

2ème question

Montrer que l'ensemble Λ des valeurs λ, pour lesquelles P_λ admet une solution, est formé de nombres positifs.

3ème question

On appelle E l'espace formé par les fonctions f d'une variable réelle et à valeurs réelles telles que $x(f(x))$ soit intégrable entre 0 et 1.

a) par analogie avec $L^2[0, 1]$, définir de façon simple un produit scalaire et une norme sur l'espace vectoriel E,

b) établir les relations d'inclusion entre les espaces E, $L^1[0, 1]$ et $L^2[0, 1]$. Comparer les normes définies sur ces trois espaces pour une fonction appartenant à l'intersection de ces trois espaces fonctionnels,

c) construire à partir des questions précédentes un système orthonormé dans l'espace E.

4ème question

Etablir l'équation différentielle que vérifie la fonction $y_\lambda(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$ où $y_\lambda(x)$ désigne une solution du problème P_λ. En déduire que le problème P_λ possède au plus une solution en utilisant quelques résultats classiques sur les fonctions de Bessel.

Donner une caractérisation de l'ensemble Λ.

5ème question

Le système $\{y_\lambda\}$ pour $\lambda \in \Lambda$ est-il total dans l'espace E ?
Calculer le développement de 1 en série de Fourier généralisée relativement à ce système (utiliser les relations de récurrence définies sur les fonctions de Bessel d'ordre 1 et 0 et de première espèce).

6ème question

Montrer avec un minimum de calcul qu'un intervalle de longueur finie de l'axe réel ne contient qu'un nombre fini de valeurs λ appartenant à Λ.

Que peut-on en déduire pour l'ensemble Λ ?

Peut-on préciser ce résultat ?

Exercice n° 43

Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E.

1°) récapituler les propriétés de l'opérateur de projection orthogonale sur M,

2°) soit P un opérateur linéaire et continu, idempotent et hermitien sur E.
Montrer que P est un projecteur orthogonal,

3°) montrer que $(M^{\perp})^{\perp} = M$ et plus généralement que $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$ lorsque F est un sous-espace vectoriel quelconque de E.

INDICATIONS DE SOLUTIONS POUR LES EXERCICES

DU CHAPITRE III

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 30.

1°) On part de
$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q_n(x)$$

La fonction e^{-t^2+2tx} est une fonction entière en t, donc la série précédente est convergente. On note que
$$e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q_n(x) e^{-x^2}$$

Avec le théorème donnant le terme général de la série de Taylor en $t = 0$, on déduit

$$(1) \qquad Q_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n (e^{-x^2})}{d x^n} \right)$$

En particulier :

$Q_0(x) = 1$; $Q_1(x) = 2x$; $Q_2(x) = 4x^2 - 2$ etc

Nous allons montrer que la suite des Q_n constitue une suite orthogonale sur l'espace $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/2})$. Les Q_n sont appelés polynômes d'Hermite.

Il est facile d'en déduire que Q_n est un polynôme de degré n.

2°) $$e^{-t^2+2tx-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-u^2+2ux-\frac{x^2}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{u^h}{h!} Q_h(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Soit

(2) $$e^{-t^2-u^2+2(t+u)x-x^2} = \sum_{n,h=0}^{\infty} \frac{t^n u^h}{n!\,h!} Q_n(x)\, Q_h(x)\, e^{-x^2}$$

Montrons d'abord que $\left|\frac{Q_n(x)}{n!}\right| \leqslant e^{1+2|x|}$. Pour ce faire, on pose $t = e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel. Il vient

$$e^{-e^{2i\theta}+2xe^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} Q_n(x)$$

On applique la formule de Parseval à cette série de Fourier, ce qui est possible puisqu'il s'agit d'une fonction 2π périodique et continue en θ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|e^{-e^{2i\theta}+2xe^{i\theta}}\right|^2 d\theta = Q_0^2(x) + --- + \frac{Q_n^2(x)}{(n!)^2} + ---$$

Or

$$\left|e^{-e^{2i\theta}+2xe^{i\theta}}\right|^2 \leqslant e^{2(1+2|x|)}$$

Donc a fortiori

$$|Q_n(x)| \leqslant n!\; e^{1+2|x|}$$

Dès lors

$$\left|\frac{Q_n(x)\,Q_h(x)}{n!\;h!} e^{-x^2}\right| \leqslant e^{2+4|x|-x^2}$$

La série double (2) converge donc uniformément et absolument dans tout intervalle fini de variation de x. Nous allons maintenant intégrer en x de $-\infty$ à $+\infty$, et il faut un raisonnement particulier.

On écrit :

$$e^{-t^2-u^2-2(t+u)x-x^2} = S_{N,K}+R_{N,K}$$

$R_{N,K}$ désignant le reste pour $n \geqslant N$ et $k \geqslant K$. On a

$$|R_{N,K}(x)| \leqslant \left(\sum_{\substack{n\geqslant N\\ k\geqslant K}} |t^n u^k|\right) e^{2+4|x|-x^2}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{N,K}(x)|dx \leqslant \left(\sum_{\substack{n\geqslant N\\ k\geqslant K}} |t^n u^k|\right) \int_{-\infty} e^{2+4|x|-x^2} dx$$

On peut donc intégrer terme à terme la série double. D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2(t+u)x-t^2-u^2} dx = \sum_{\substack{n=0\\ k=0}}^{\infty} \frac{t^n u^k}{n!\,k!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x)\, Q_k(x)\, e^{-x^2} dx\right)$$

Or $\quad x^2-2(t+u)x+t^2+u^2 = (x-t-u)^2-2ut$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t-u)^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Donc

$$\sqrt{\pi}.e^{2ut} = \sum_{\substack{n=0\\ k=0}}^{\infty} \frac{t^n u^k}{n!\,k!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x)\, Q_k(x)\, e^{-x^2} dx\right)$$

Cependant le premier membre se développe directement et n'a que des termes selon les puissances de ut dans son développement. Par identification

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x)\, Q_k(x)\, e^{-x^2} dx = 0 \qquad \text{pour} \quad n \neq k$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n^2(x)\, e^{-x^2} dx = 2^n n!\,\sqrt{\pi}$$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 31.

On reprend les notations de l'exercice précédent. Il s'agit de calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \, Q_n(s)\, e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds$$

On part de

$$e^{-t^2+2ts-\frac{s^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q_n(s) e^{-\frac{s^2}{2}}$$

On peut intégrer terme à terme, en multipliant au préalable par e^{isx} selon une démonstration analogue à celle donnée précédemment. (Ex 30)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2ts-\frac{s^2}{2}} e^{isx} \, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(s)\, e^{-\frac{s^2}{2}} e^{isx} \, ds \right)$$

On sait que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{isx} ds = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tous calculs faits, on trouve

$$\sqrt{2\pi} \, . \, e^{-t^2+2tx-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{i}\right)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(s) e^{-\frac{s^2}{2}} e^{isx} ds \right)$$

D'où le résultat avec $\lambda_n = i^n \sqrt{2\pi}$

$$\lambda_n H_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(s)\, e^{isx} \, ds$$

La fonction d'Hermite est vecteur propre de la transformée de Fourier.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 32.

Supposons qu'il existe une fonction h positive et mesurable de sorte que $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ forme une suite orthonormale sur $L^2([-1,+1], h)$

On aurait pour $n \neq m$

$$0 = \int_{-1}^{+1} x^n \, x^m \, h(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x^{n+m} \, h(x)\,dx$$

Avec n et m impairs, on aurait la nullité d'une intégrale de fonctions positives, ce qui implique

$$x^{n+m} \, h(x) = 0 \qquad \text{presque partout}$$

ou encore

$$h(x) = 0 \qquad \text{presque partout.}$$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 33.

1°) Si f_1 et f_2 appartiennent à H, et si λ est un nombre complexe quelconque, on a aussi :

$$\begin{cases} f_1 + f_2 \text{ est deux fois continûment dérivable } ; \\ \lambda f_1 \text{ est deux fois continûment dérivable.} \end{cases}$$

ainsi que :

$$\begin{cases} (f_1 + f_2)(0) + (f_1 + f_2)(1) = 0 \\ \\ (f_1 + f_2)'(0) + (f_1 + f_2)'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda f_1(0) + \lambda f_1(1) = 0 \\ \\ \lambda f_1(0) + \lambda f_1'(1) = 0 \end{cases}$$

et par conséquent $f_1 + f_2$ et λf_1 appartiennent à H.

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$$

2°)a. On peut écrire :

$$F(x) = \int_0^1 (1 - 2\,|x-y|\,F(y)\,dy = \int_0^x (1-2x+2y) f(y)\,dy + \int_x^1 (1+2x-2y) f(y)\,dy$$

Les fonctions sous les signes $\int$ sont définies et continues, leurs dérivées par rapport à x sont définies et continues, les intégrales de ces dérivées existent, l'intervalle d'intégration est fini. Il ne se posera donc aucune difficulté pour dériver sous le signe $\int$.

Utilisant les formules :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x K(x,y)\,dy = \int_a^x \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)\,dy + K(x,x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b K(x,y)\,dy = \int_x^b \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)\,dy - K(x,x)$$

nous pouvons affirmer que les dérivées $F'(x)$ et $F''(x)$ existent, leurs expressions étant :

$$F'(x) = [-2\int_0^x f(y)\,dy + f(x)] + [\,2\int_x^1 f(y)\,dy - f(x)]$$

$$= 2[\int_0^x f(y)\,dy - \int_x^1 f(y)\,dy]$$

et

(2) $$F''(x) = -4f(x)$$

Nous avons donc montré que $F = Af$ est deux fois continûment dérivable et vérifie la relation (2). Il nous reste à montrer que F vérifie les relations (1), ce qui achèvera de prouver que F appartient à H :

$$F(0) = \int_0^1 (1-2y)\,f(y)\,dy \quad , \quad F(1) = \int_0^1 (-1+2y)\,f(y)\,dy$$

$$F'(0) = 2\int_0^1 f(y)\,dy \quad , \quad F'(1) = -2\int_0^1 f(y)\,dy$$

donc

$$F(0) + F(1) = 0 \quad \text{et} \quad F'(0) + F'(1) = 0$$

$$\boxed{F = \mathbb{A}f \text{ appartient à } H \text{ et vérifie } F'' = -4f}$$

b) si F est une fonction de H, elle est deux fois dérivable, et si la fonction f telle que $\mathbb{A}f = F$ existe, elle est unique et égale à $-\frac{1}{4}F''$
Posant $f(x) = -\frac{1}{4}F''(x)$ et $\mathbb{A}f = g$, il reste à démontrer que $g(x) = F(x)$

Mais F appartient à l'espace vectoriel H (par hypothèse), ainsi que g (par construction). Donc $(g - F)$ appartient à H et vérifie les conditions (1) :

$$\begin{cases} (g - F)(0) + (g - F)(1) = 0 \\ (g - F)'(0) + (g - F)'(1) = 0 \end{cases}$$

En outre $g'' = -4f = F''$ soit $(g - F)'' = 0$

Les trois équations que nous venons d'écrire possèdent la solution unique $(g - F) = 0$, ce qui termine la démonstration

$$\boxed{\text{si } F \in H, \text{ il existe } f \in E \text{, unique, telle que } \mathbb{A}f = F}$$

3°) Nous avons :

$$< \mathbb{A}f, g > = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx$$

$$< f, \mathbb{A}g > = \int_0^1 f(x) \overline{\left(\int_0^1 K(x,y) g(y) dy \right)} dx$$

en désignant par $K(x,y)$ le noyau $(1 - 2|x - y|)$ de l'opérateur intégral $\mathbb{A}$.

Comme $\overline{K(x,y)} = K(y,x)$, les produits scalaires $<\mathbb{A}f, g>$ et $<f, \mathbb{A}g>$ sont tous deux égaux à l'intégrale double :

$$\int_0^1 \int_0^1 K(y,x) f(x) \overline{g(y)} dx dy$$

$$\boxed{\mathbb{A} \text{ est hermitien}}$$

4°) On a, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$|\mathbb{A} f(x)|^2 = \left| \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \right|^2 \leqslant \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \int_0^1 |f(y)|^2 dy$$
$$\leqslant \|f\|^2 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx\, dy$$

d'où on déduit :

$$\|\mathbb{A}f\|^2 = \int_0^1 |\mathbb{A}f(x)|^2 dx \leqslant \|f\|^2 \int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^2 dx\, dy$$

Calcul de

$$\int_0^1\int_0^1 (1-2|x-y|)^2 dx\ dy :$$

$$\int_0^1\int_0^1 (1-2|x-y|)^2 dx\ dy \quad = \quad \int_0^1\int_0^1 [1-4|x-y|+4(x-y)^2]\,dx\ dy$$

et on a :

$$(i)\quad \int_0^1\int_0^1 dx\ dy \quad = \quad 1$$

$$(ii)\quad \int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dx\,dy \quad = \quad \int_0^1 dy\ [\int_0^y (y-x)\,dx + \int_y^1 (x-y)\ dx]$$

$$= \quad \int_0^1 dy([xy-\frac{x^2}{2}]_0^y + [\frac{x^2}{2}-xy]_y^1)$$

$$= \quad \int_0^1 (\frac{1}{2}-y+y^2)\,dy \quad = \quad [\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$(iii)\quad \int_0^1\int_0^1 (x-y)^2 dx\ dy \quad = \quad \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2-2xy+y^2)\,dx$$

$$= \quad \int_0^1 dy([\frac{x^3}{3}-x^2y+xy^2]_0^1)$$

$$= \quad \int_0^1 (\frac{1}{3}-y+y^2)\,dy \quad = \quad [\frac{y}{3}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Ces trois intégrales permettent de trouver le résultat :

$$\int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^2 dx\ dy \quad = \quad 1-\frac{4}{3}+\frac{4}{6} \quad = \quad \frac{1}{3}$$

Plus directement, on remarque

$$\int_0^1\int_0^1 (1-2|x-y|)^2 dx\ dy \quad = \quad 2\int_0^1 dx \int_0^x (1-2(x-y))\,dy \quad = \quad 2[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\|Af\|^2 \leqslant \frac{1}{3}\|f\|^2}$$

5°) De la relation $\mathbb{A} f = F = \lambda f$, nous déduisons :

$$F'' = \lambda f'' = -4f$$

Remarquons que l'on ne peut avoir $\lambda = 0$; en effet f appartient au sous-espace H, et les conditions (1) entraîneraient alors $f = 0$.

Si ω est un nombre (éventuellement complexe) tel que $\frac{4}{\lambda} = \omega^2$ nous avons alors l'équation différentielle :

$$f'' + \omega^2 f = 0$$

de solution générale :

$$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

Mais f, nous l'avons déjà noté, appartient à H. Les conditions (1) appliquées à f donnent alors :

$$\begin{cases} f(0) + f(1) = 0 \quad \text{ou} \quad A(1 + \cos\omega) + B \sin\omega x = 0 \\ f'(0) + f'(1) = 0 \quad \text{ou} \quad -A\omega \sin\omega + B\omega(1 + \cos\omega) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est égal à $-\cos^2 \frac{\omega}{2}$ et doit donc être nul car nous cherchons des solutions en A, B non nulles simultanément. Soit donc

$$\omega_n = (2n+1)\pi$$

ce qui donne :

$$\lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2}$$

On vérifie bien que les valeurs propres sont réelles ce qui provient de l'hermiticité de $\mathbb{A}$.

On vérifie alors immédiatement que A et B peuvent être choisis quelconques.

Valeurs propres de $\mathbb{A}$: $\lambda_n = \dfrac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$

A chaque λ_n correspond un espace propre P_n de dimension 2 dont une base orthonormée est, par exemple :

$$f_{1,n} = \sqrt{2}\cos(2n+1)\pi x$$

$$f_{2,n} = \sqrt{2}\sin(2n+1)\pi x$$

6°)a. Etant donnée ($f_{1,n}$, $f_{2,n}$) une base orthonormée de P_n, toute autre base orthonormée ($g_{1,n}$, $g_{2,n}$) est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} g_{1,n} = \alpha f_{1,n} + \beta f_{2,n} \\ g_{2,n} = \beta f_{1,n} - \alpha f_{2,n} \end{array}\right. \qquad \text{avec} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

De fait, il faudrait prendre une matrice complexe quelconque unitaire puisque nous avons pris comme possible le corps des complexes (la dimension 2 est alors à prendre sur le corps des nombres complexes). Le lecteur vérifiera qu'avec la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \qquad \text{où} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & = & 1 \\ \alpha'\bar{\alpha}' + \beta'\bar{\beta}' & = & 1 \\ \alpha'\bar{\alpha} + \beta'\bar{\beta} & = & 0 \end{array}\right.$$

Les calculs se conduisent de la même façon, mais l'invariant serait écrit différemment en écriture complexe. Nous supposerons maintenant rester dans le domaine réel. Nous avons alors :

$$g_{1,n}(x)\,g_{1,n}(y) + g_{2,n}(x)\,g_{2,n}(y) = [\alpha f_{1,n}(x) + \beta f_{2,n}(x)][\alpha f_{1,n}(y) + \beta f_{2,n}(y)]$$
$$+ [\beta f_{1,n}(x) - \alpha f_{2,n}(x)][\beta f_{1,n}(y) - \alpha f_{2,n}(y)]$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)[f_{1,n}(x)f_{1,n}(y) + f_{2,n}(x)\,f_{2,n}(y)]$$

$\varphi_n(x,y)$ ne dépend que de P_n sans dépendre de la base orthonormée choisie

b) $S(t)$ est une fonction paire, on aura donc $b_k = 0$ pour tout k, et donc :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + --- + a_k \cos k\pi t + ---$$

Les coefficients a_k étant donnés par :

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-1}^{+1} S(t)\cos k\pi \cancel{t/T} = 2\int_0^1 (1-2t)\cos k\pi t \, dt$$

$$= 2\left[(1-2t)\frac{\sin k\pi t}{k\pi}\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \, dt$$

$$= 0 - 4\left[\frac{\cos k\pi t}{k^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{4}{k^2\pi^2}\left\{1-(-1)^k\right\}$$

Soit

$$a_{2h} = 0$$

$$a_{2h+1} = \frac{8}{(2h+1)^2\pi^2}$$

$$\boxed{S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi t}$$

Si nous posons $t = (x-y)$, nous en déduisons, pour $(x-y)$ dans l'intervalle $[-1,+1]$:

$$S(x-y) = 1-2|x-y| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi(x-y)$$

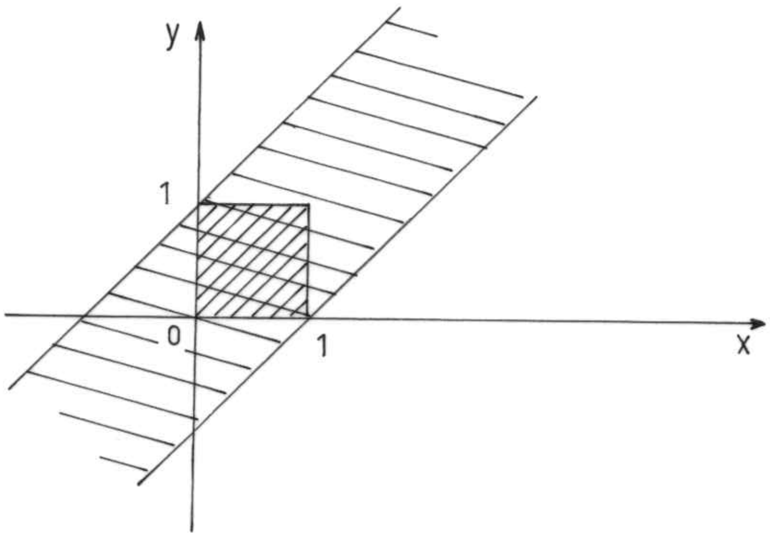
Or

$$\varphi(x,y) = (\sqrt{2}\cos(2n+1)\pi x)(\sqrt{2}\cos(2n+1)\pi y) + (\sqrt{2}\sin(2n+1)\pi x)(\sqrt{2}\sin(2n+1)\pi y)$$

$$= 2\cos(2n+1)\pi(x-y)$$

et donc :

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi(x-y)$$



Quant au domaine de validité de notre expression de $1-2\,|x-y|$ il est défini par :

$$-1 \leqslant x - y \leqslant 1$$

C'est la bande diagonale située entre les deux droites $y = x+1$ et $y = x-1$. Elle comprend en particulier le carré $(0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$ sur lequel est défini le noyau $K\,(x,y)$ de l'opérateur intégral $\mathbb{A}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} 1-2|x-y| \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, \varphi_n\,(x,y) \\ \text{relation valide pour } |x-y| \leqslant 1 \end{array}}$$

Grâce à la décroissance en $\frac{1}{n^2}$ de λ_n , on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int$ pour le calcul de Af .

$$F(x) = Af(x) = \int_0^1 (1-2\,|x-y|)\, f(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\, \varphi_n(x,y) \right) f(y)\, dy$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \int_0^1 \varphi_n(x,y)\, f(y)\, dy$$

Or

$$\lambda_n \varphi_n(x,y) = \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos(2n+1)\pi\,(x-y)$$

$$= \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \Big[\cos(2n+1)\pi x \, \cos(2n+1)\pi y$$

$$+ \sin(2n+1)\pi x \, \sin(2n+1)\pi y\Big]$$

$$Af(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \Big(\cos(2n+1)\pi x \int_0^1 \cos(2n+1)\pi y \, f(y)\, dy$$

$$+ \sin(2n+1)\pi x \int_0^1 \sin(2n+1)\pi y \, F(y)\, dy\Big)$$

Posons

$$a_n = 2\int_0^1 \cos(2n+1)\pi y \, f(y)\, dy$$

$$b_n = 2\int_0^1 \sin(2n+1)\pi y \, f(y)\, dy$$

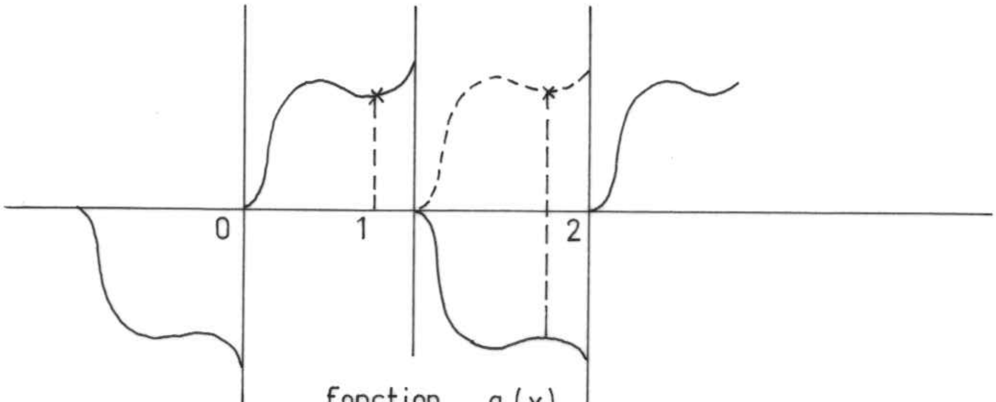
Il vient

$$Af(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2} \Big(a_n \cos(2n+1)\pi x + b_n \sin(2n+1)\pi x\Big)$$

D'après l'énoncé, $f(x)$ est définie sur le segment $[0,1]$. Définissons $\tilde{f}(x)$ sur $[0,2]$ par ses valeurs :

Pour $x \in [0,1]$ $\quad \tilde{f}(x) = f(x)$

Pour $x \in]1,2[$ $\quad \tilde{f}(x) = -f(x-1)$



fonction $g(x)$

Puis prolongeons $\tilde{f}(x)$ par périodicité, de période 2, en une fonction $g(x)$ sur l'axe réel. Pour $g(x)$, on a l'écriture de Fourier

$$g(x) \sim \sum_n a_n \cos(2n+1)\pi x + b_n \sin(2n+1)\pi x$$

Bien sûr la série de Fourier ci-dessus n'ait aucune raison de converger puisque l'on ne suppose que la continuité de $f(x)$ (qui d'ailleurs n'entraîne pas celle de $g(x)$). Cependant la série de Fourier analogue de $Af(x)$

$$Af(x) \sim \sum_n^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} (a_n \cos(2n+1)\pi x + b_n \sin(2n+1)\pi x)$$

converge uniformément vers la fonction $Af(x)$ (de H).

On constate que l'opérateur intégral $\mathbb{A}$ représente une somme infinie d'homothéties suivant les vecteurs propres et, en somme, $\mathbb{A}$ est "diagonalisé" suivant la famille de fonctions $\cos(2n+1)\pi x$ et $\sin(2n+1)\pi x$. Mais nous sommes en dimension infinie, et bien que $\mathbb{A}$ soit injectif ($Af = 0 \Longrightarrow f = 0$) $A(E)$ est strictement inclus dans E (nous avons démontré $A(E) = H \subset \mathbb{E}$). Par ailleurs il se pose des problèmes de convergence, ce qui n'était pas le cas en dimension finie.

La possibilité de "diagonalisation" de $\mathbb{A}$ tient à ce que A est hermitien mais aussi à ce que $\mathbb{A}$ est un opérateur intégral. L'hermiticité ne suffit pas en dimension infinie.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 34.

Le problème considéré est celui du calcul explicite de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soient donc $x_1, x_2, \dots, x_n$, n vecteurs linéairement indépendants dans un espace préhilbertien $\mathcal{H}$. Nous cherchons à déterminer n vecteurs orthonormaux $y_1, y_2, \dots, y_n$ de sorte que $(y_1, \dots, y_p)$ engendre le même espace que $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ pour tout p où $1 \leqslant p \leqslant n$

Le cours montre qu'une façon d'obtenir y_p est la suivante : on prend la projection orthogonale z_p de x_p sur l'espace vectoriel engendré par $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ (ou par $(y_1, y_2, \dots, y_{p-1})$) et alors

$$y_p = \frac{x_p - z_p}{\| x_p - z_p \|}$$

Pour obtenir z_p, il faut résoudre le système linéaire

$$< x_p - z_p , x_h > = 0 \qquad \forall h = 1, 2, \dots, p-1$$

soit

$$< z_p , x_h > = < x_p , x_h > \qquad \forall h = 1, 2, \dots, p-1$$

Exprimons $z_p = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{p-1} x_{p-1}$ et il vient

$$\sum_{i=1}^{i=p-1} \alpha_i < x_i , x_h > = < x_p , x_h > \qquad \forall h = 1, 2, \dots, p-1$$

Les formules de Cramer fournissent, par exemple α_1, en posant au préalable :

$$g(x_1, x_2, \dots, x_h) = \begin{vmatrix} < x_1 , x_1 > & \cdots & < x_h , x_1 > \\ \vdots & & \vdots \\ < x_1 , x_h > & \cdots & < x_h , x_h > \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{g(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})} \begin{vmatrix} < x_p , x_1 > & < x_2 , x_1 > & \cdots & < x_{p-1} , x_1 > \\ < x_p , x_2 > & < x_2 , x_2 > & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < x_p , x_{p-1} > & < x_2 , x_{p-1} > & \cdots & < x_{p-1} , x_{p-1} > \end{vmatrix}$$

De même

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & i^{\underline{\text{ème}}}\ \text{colonne} & & \\
 & & \downarrow & &
\end{array}
$$

$$
\alpha_i = \frac{1}{g(x_1,---,x_{p-1})}
\begin{vmatrix}
<x_1\ ,x_1> & --- & <x_p\ ,x_1> & --- & <x_{p-1},x_1> \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
<x_1\ ,x_{p-1}> & --- & <x_p\ ,x_{p-1}> & --- & <x_{p-1},x_{p-1}>
\end{vmatrix}
$$

Pour regrouper ces formules en une seule, en tenant compte de ce que

$$
Z_p = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i\ x_i
$$

on note, en considérant que le déterminant suivant doit être <u>formellement calculé</u> en développant suivant la dernière ligne

$$
Z_p = \frac{-1}{g(x_1,---,x_{p-1})}
\begin{vmatrix}
<x_1\ ,x_1> & --- & <x_{p-1},x_1> & <x_p\ ,x_1> \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
<x_1\ ,x_{p-1}> & --- & <x_{p-1},x_{p-1}> & <x_p\ ,x_{p-1}> \\
x_1 & & x_{p-1} & 0
\end{vmatrix}
$$

Puis $x_p - Z_p$ s'obtient suivant l'écriture

$$
x_p - Z_p = \frac{1}{g(x_1,---,x_{p-1})}
\begin{vmatrix}
<x_1\ ,x_1> & --- & <x_{p-1},x_1> & <x_p\ ,x_1> \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
<x_1\ ,x_{p-1}> & --- & <x_{p-1},x_{p-1}> & <x_p\ ,x_{p-1}> \\
x_1 & & x_{p-1} & x_p
\end{vmatrix}
$$

L'expression $\|x_p - z_p\|$ est la distance du vecteur x_p à l'espace engendré par $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$. Il n'est pas difficile de vérifier que cette distance vaut

$$\sqrt{\frac{g(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}, x_p)}{g(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})}}$$

En effet, cette distance Δ satisfait la relation de Pythagore

$$\Delta^2 + \langle z_p, z_p \rangle = \langle x_p, x_p \rangle$$

ou encore, grâce à l'orthogonalité $\langle z_p, x_p - z_p \rangle = 0$

$$\Delta^2 + \langle z_p, x_p \rangle = \langle x_p, x_p \rangle$$

ce qui fournit l'équation linéaire en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$

$$\alpha_1 \langle x_1, x_p \rangle + \cdots + \alpha_{p-1} \langle x_{p-1}, x_p \rangle = \langle x_p, x_p \rangle - \Delta^2$$

On ajoute à cette équation linéaire en $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{p-1}$ le système des p-1 équations linéaires en $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ qui permit de calculer $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$, à savoir :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \langle x_i, x_h \rangle = \langle x_p, x_h \rangle \qquad h = 1, \cdots, p-1$$

On obtient un système homogène de p équations à p inconnues $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, -1)$ qui, puisqu'il possède une solution non nulle, doit avoir un déterminant nul. Soit

$$0 = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_{p-1}, x_1 \rangle & -\langle x_p, x_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_1, x_{p-1} \rangle & \cdots & \langle x_{p-1}, x_{p-1} \rangle & -\langle x_p, x_{p-1} \rangle \\ \langle x_1, x_p \rangle & \cdots & \langle x_{p-1}, x_p \rangle & \Delta^2 - \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}$$

Soit en décomposant en deux ce déterminant

$$\Delta^2 g(x_1,\dots,x_{p-1}) = \begin{vmatrix} < x_1 , x_1 > & \cdots & < x_p , x_1 > \\ \vdots & & \vdots \\ < x_1 , x_p > & \cdots & < x_p , x_p > \end{vmatrix} = g(x_1,\dots,x_p)$$

et finalement le résultat anoncé, qui justifie l'orthonormalisation :

$$\Delta = \sqrt{\frac{g(x_1,\dots,x_p)}{g(x_1,\dots,x_{p-1})}}$$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 35.

Soit $\{P_n\}_{n \geq 0}$ une famille de polynômes orthonormaux sur un espace $L^2([a,b],h)$. La formule de Darboux-Christoffel enseigne

$$\sum_{h=0}^{n} P_h(x)\, P_h(y) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \; \frac{P_{n+1}(x)\, P_n(y) - P_n(x)\, P_{n+1}(y)}{x - y}$$

où a_n désigne le coefficient du terme de degré n dans $P_n(x)$.
On écrit en passant à la limite

$$\lim_{y \to x} \sum_{h=0}^{n} P_h(x) P_h(y) = \sum_{h=0}^{n} \left(P_h(x)\right)^2$$

tandis que la limite du second nombre devient

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \left(\frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)}{x-y} P_n(y) + \frac{P_n(y) - P_n(x)}{x-y} P_{n+1}(y) \right)$$

$$= \frac{a_n}{a_{n+1}} \left[P'_{n+1}(x)\, P_n(x) - P'_n(x)\, P_{n+1}(x) \right]$$

ce qui termine la démonstration.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 36.

Nous nous proposons de montrer les propriétés les plus remarquables des polynômes de Čebičev du premier type, c'est-à-dire des polynômes orthogonaux sur l'espace $L^2\left[(-1,+1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

1°) On part de la relation d'orthogonalité de définition

$$\int_{-1}^{+1} T_n(x)\, T_m(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad \text{si} \quad n \neq m$$

On pose $x = \cos y$: il vient en choisissant $y \in [0,\pi]$

$$\int_0^{\pi} T_n(\cos y)\, T_m(\cos y)\, \frac{\sin y}{\sin y}\, dy = \int_0^{\pi} T_n(\cos y)\, T_m(\cos y)\, dy$$

soit, si l'on pose $f_m(y) = T_m(\cos y)$

$$\int_0^{\pi} f_n(y)\, f_m(y)\, dy = 0$$

On note que, n et m étant des entiers positifs ou nuls, non nuls tous les deux.

$$\int_0^{\pi} \cos ny . \cos my . dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos(n+m)y + \cos(n-m)y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\,y}{(n+m)}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)\,y}{(n-m)}\right]_0^{\pi}$$

$$= 0 \qquad (n \neq m)$$

Par suite, on peut essayer de prendre $f_n(y) = \cos ny$

ou encore $T_n(\cos y) = \cos ny$

(ce qui est la relation (4) de l'énoncé) c'est-à-dire, en revenant à la variable x.

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$$

Il reste à vérifier que T_n est un polynôme en x, ce qui est bien facile et a d'ailleurs déjà été établi à l'exercice n° 25 auquel nous renvoyons

$$\cos ny = \operatorname{Re}(e^{iny}) = \operatorname{Re}(\cos y + i \sin y)^n$$

$$= \operatorname{Re}\left(\sum_{h=0}^{n} C_n^h i^h (\sin y)^h (\cos y)^{n-h}\right)$$

Soit

$$\cos ny = \sum_{h=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^h C_n^{2h} (1 - \cos^2 y)^h (\cos y)^{n-2h}$$

où $[\frac{n}{2}]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$, c'est-à-dire $\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair.
Par conséquent, on a bien un polynôme de degré n

$$T_n(x) = \sum_{h=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^h C_n^{2h} (1 - x^2)^h x^{n-2h}$$

Il convient de calculer la norme au sens L^2 d'un tel polynôme

$$\int_{-1}^{+1} (T_n(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} (f_n(y))^2 dy = \int_0^{\pi} \cos^2 ny \, dy = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2ny + 1}{2} dy = \frac{\pi}{2}$$

si $n \neq 0$

tandis que $\displaystyle\int_{-1}^{+1} (T_0(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$ (ce qui est la relation (1) de l'énoncé)

On remarque la normalisation $T_n(1) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

Par suite, les polynômes $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(\operatorname{arc}\cos x)$, ---, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \operatorname{arc}\cos x)$, ---

forment une suite de polynômes orthonormaux sur $L^2 [(-1,+1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$, ce qui est la relation (8) de l'énoncé.

On note bien sûr que $|T_n(x)| \leqslant 1$

Cette suite forme une base hilbertienne dans l'espace de Hilbert considéré : $L^2 [(-1+1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$. En effet, la correspondance

$$f \longrightarrow g \quad \text{où} \quad g(y) = f(\cos y)$$

établit une isométrie linéaire et bijective entre $L^2\,[(-1,+1),\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$ et $L^2\,[0,\pi]$ selon

$$\int_{-1}^{+1} f_1(x)\,\overline{f_2(x)}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} g_1(y)\,\overline{g_2(y)}\,dy$$

Or il est facile de déduire du cours que la suite $\{\cos ny\}_{n\geqslant 0}$ est totale dans $L^2\,[0,\pi]$. Par conséquent la suite des polynômes de Čebičev du premier type est totale dans $L^2\,[(-1,+1),\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$.

Pour déterminer la relation de récurrence entre trois polynômes successifs, on peut faire la remarque suivante :

$$\cos(n+1)\,y = \cos ny \cos y - \sin ny \sin y$$

$$\cos(n-1)\,y = \cos ny \cos y + \sin ny \sin y$$

Donc

$$\cos(n+1)y+\cos(n-1)\,y = 2\cos ny.\cos y$$

ou encore avec $y = \text{Arc}\cos x$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\,T_n(x)$$

ce qui donne bien la relation de récurrence cherchée (relation (3) de l'énoncé)

$$T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n \geqslant 1$$

On en déduit aussitôt le coefficient a_n de x^n dans $T_n(x)$ en utilisant les formules démontrées dans le cours.

$$A_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad \text{où} \qquad A_{n+1} = 2 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1$$

Par suite

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1}a_1 \text{ et } \qquad T_1(x) = x \qquad \text{donc} \qquad a_1 = 1$$

On a

$a_n = 2^{n-1}$ (ce qui est la relation (2) de l'énoncé et pourrait aussi être calculé directement sur la formule donnant $T_n(x)$).
(on vérifie bien que $c_n = 1 = \dfrac{2^{n-1}.\, 2^{n-3}}{2^{(n-2)^2}}$ conformément à la théorie).

L'équation différentielle satisfaite par le polynôme T_n s'obtient facilement en notant que

$$\frac{d\left(\cos(n \operatorname{Arc}\cos x)\right)}{dx} = -n\left(\sin(n \operatorname{Arc}\cos x)\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\frac{d^2(\cos(n \operatorname{Arc}\cos x))}{dx^2} = -n^2\left(\cos(n \operatorname{Arc}\cos x)\right)\frac{1}{1-x^2} - nx\left(\sin(n \operatorname{Arc}\cos x)\right)\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Soit

$$(1-x^2)\,\frac{d^2 T_n}{dx^2}(x) - x\,\frac{d\,T_n}{dx}(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

ce qui est la relation (5) de l'énoncé.

Considérons maintenant la série entière absolument convergente dans le disque ouvert $\{z \mid |z| < 1\}$ définie par

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, z^n$$

Posons $x = \cos y$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos ny = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z e^{iy})^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z e^{-iy})^n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ze^{iy}} + \frac{1}{1-ze^{-iy}}\right)$$

$$= \quad \frac{1}{2}\ \frac{2 - z(e^{iy} + e^{-iy})}{1 + z^2 - z\,(e^{iy} + e^{-iy})}$$

$$= \quad \frac{1 - z\cos y}{1 - 2z\cos y + z^2}$$

Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, z^n \;=\; \frac{1 - zx}{1 - 2zx + z^2} \qquad |x| \leqslant 1 \quad \text{et } |z| < 1$$

La fonction $\frac{1 - zx}{1 - 2zx + z^2}$ s'appelle <u>la fonction génératrice</u> des polynômes de Čebičev du premier type.

En particulier
$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\left(\frac{1 - zx}{1 - 2zx + z^2}\right)}{dz^n}\right]_{z=0} = T_n(x)$$

Des méthodes analogues conduisent à la formule

$$\frac{n}{2}\sum_{h=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^h\,\frac{(n-h-1)!}{h!(n-2h)!}\,(2x)^{n-2h} = T_n(x)$$

et

$$2^n\,\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,T_n(x) = (-1)^n\sqrt{1 - x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}\right]$$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 37.

On part de $f(x) = \frac{a_0}{2}T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x)$. Un tel développement existe pour toute fonction f appartenant à l'espace $L^2\left([-1,+1], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ et au sens de cet espace, puisque la suite des polynômes de Čebičev est totale dans cet espace. Notons que l'énoncé suppose $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$, donc que f est suffisamment régulière (en particulier continue).

La condition $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$ permet d'intégrer terme à terme la série uniformément convergente (puisque $|T_n(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [-1,+1]$).

Donc

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_{-1}^{x} T_n(t)\,dt \right) - \frac{a_0}{2}$$

Or les polynômes de Čebičev de première espèce satisfont une relation particulière

$$2(n^2-1)\,T_n(x) = (n-1)\,T'_{n+1}(x) - (n+1)\,T'_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 1)$$

comme on le vérifie aisément en tenant compte de

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x)$$

et

$$T'_n(x) = n \sin(n \operatorname{Arc}\cos x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ce qui donne pour $n \geqslant 1$:

$$2(n^2-1)\int_{-1}^{x} T_n(t)\,dt = \Big[(n-1)\,T_{n+1}(t) - (n+1)\,T_{n-1}(t)\Big]_{-1}^{x}$$

Soit

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\,a_n \left[\frac{T_{n+1}(t)}{(n+1)} - \frac{T_{n-1}(t)}{(n-1)}\right]_{-1}^{x} + \frac{a_1}{2}\,(x^2-1) + \frac{a_0}{2}\,(x+1)$$

ce qui s'écrit encore, avec $T_2(x) = 2x^2-1$, $T_1(x) = x$ et $T_0(x) = 1$

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2n}\,T_n(x) + \frac{1}{2}\left(a_0 - \frac{1}{2}a_1\right)T_0 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)}\,a_n$$

$$= \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2n}\,T_n(x) \quad \text{où} \quad |x| \leqslant 1$$

et $\lambda = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)}a_n + \frac{1}{2}\left(a_0 - \frac{1}{2}a_1\right)$

D'ailleurs le membre de droite doit s'annuler pour $x = -1$, donc

$$\lambda = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2n}\,(-1)^n$$

2°) A tout f de $L^2\left([-1,+1], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ faisons correspondre g où $g(x) = f(\cos x)$. Nous avons déjà montré (Cf Exercice N° 36) que cette correspondance est une bijection linéaire et isométrique avec $L^2\ [0,\pi]$. Par suite comme à la base $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ des polynômes de Čebičev correspond la base $\{\cos nx\}_{n\geq 0}$, on a

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x)$$ développement en série de Čebičev,

et

$$g(x) = f(\cos x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$ développement en série de Fourier

(on peut considérer $L^2\ [0,\pi]$ comme le sous-espace de $L^2\ [-\pi,+\pi]$ constitué par les fonctions paires).

Prenons par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, il lui correspond

$$g(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$$

On a donc

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1+\cos^2 x}\,dx = \begin{cases} (-1)^{n/2}\left(\sqrt{2}-1\right)^n\sqrt{2} & \text{si } n \text{ est pair } (n \geq 0) \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ce dernier résultat s'obtient par la formule des résidus d'une fonction de variable complexe en posant $e^{ix} = z$ et nous ne détaillerons pas les calculs intermédiaires.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 38.

a) Soit donc $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la famille des polynômes orthogonaux de Legendre sur l'espace $L^2\ [-1,+1]$. Montrons que P_n possède n racines réelles et distinctes sur $[-1,+1]$.

Supposons que P_n n'ait aucune racine sur $[-1,+1]$, son signe reste donc constant sur ce segment ce qui rend impossible la nullité de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,dx = 0 \qquad (\langle 1, P_n\rangle = 0)$$

De même supposons que P_n change de signe en p points seulement sur $]-1,+1[$. On note x_1 , $x_2, \ldots, x_p$ ces p points et on forme $Q(x) = (x-x_1) \ldots (x-x_p)\, P_n(x)$. Le polynôme Q garde donc un signe constant sur $]-1,+1[$. Mais si $p < n$, on doit avoir la relation contradictoire

$$\int_{-1}^{+1} Q(x)\, dx = 0$$

puisque P_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n (construction de Gram-Schmidt). Donc $p \geqslant n$. Le degré de P_n étant n, il y a donc n racines réelles et distinctes, d'ailleurs simples de P_n dans $]-1,+1[$.

b) Notons $x_0 = -1$ et $x_{n+1} = 1$ tandis que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les n racines de P_n situées dans $]-1,+1[$. A l'exercice N° 35, nous avons obtenu comme conséquence de la formule de Darboux - Christoffel

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \left[P'_{n+1}(x)\, P_n(x) - P'_n(x)\, P_{n+1}(x) \right] = \sum_{h=0}^{h=n} \left(P_h(x)\right)^2$$

qui prouve aisément que P_n et P_{n+1} ne peuvent avoir un même zéro ($P_0(x) = 1$). Si donc x_h et x_{h+1} sont deux zéros consécutifs de P_n , on a d'une part puisque les racines x_h , x_{h+1} , ... sont simples

$$P'_n(x_h)\, P'_n(x_{h+1}) < 0$$

Mais la formule précédente assure d'autre part que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \quad P'_n(x_h)\, P_{n+1}(x_h) < 0$$

et

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \quad P'_n(x_{h+1})\, P_{n+1}(x_{h+1}) < 0$$

Donc

$$P_{n+1}(x_h)\, P_{n+1}(x_{h+1}) < 0$$

Cette dernière relation assure que P_{n+1} possède au moins un zéro entre x_h et x_{h+1} . On dénombre donc $(n-1)$ zéros de P_{n+1} . Maintenant regardons ce qui se passe sur $]x_n, x_{n+1} = 1[$. Il vient $P'_n(x_n) > 0$ ($P_n(1) = 1$ et il n'y a plus de zéros après x_n, donc le polynôme est croissant après x_n). La formule déjà invoquée fournit

$$P_{n+1}(x_n) < 0$$

donc il existe un zéro de P_{n+1} entre X_n et 1 puisque $P_{n+1}(1) = 1$
On agit de même pour $X_n = -1$ ce qui termine la démonstration.

b) On écrit par décomposition en éléments simples (zéros simples)

$$\frac{P_n(X)}{P_{n+1}(X)} = \sum_{h=1}^{n+1} \frac{\alpha_h}{X - X_h}$$

où $\{X_h\}_{h=1,---,n+1}$ désigne les $(n+1)$ zéros simples de P_{n+1}, distincts de ceux de P_n. Il est bien connu que

$$\alpha_h = \frac{P_n(X_h)}{P'_{n+1}(X_h)}$$

ce que l'on écrit encore astucieusement

$$\alpha_h = \frac{P'_{n+1}(X_h)P_n(X_h) - P_{n+1}(X_h)P'_n(X_h)}{\left(P'_{n+1}(X_h)\right)^2}$$

et ce nombre est strictement positif compte tenu de l'exercice N° 35.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 39.

Posons

$$Q_n(X) = \frac{1}{\pi(X)} \begin{vmatrix} P_n(X) & ------- & P_{n+e}(X) \\ P_n(X_1) & ------- & P_{n+e}(X_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(X_e) & ------- & P_{n+e}(X_e) \end{vmatrix}$$

où $\{P_n\}_{n \geqslant 0}$ est une famille de polynômes orthonormaux sur $L^2([a,b],\mu)$ et $X_1, X_2, \ldots, X_h$ sont des nombres distincts et réels de sorte que $\pi(X) = (X-X_1)---(X-X_h) \geqslant 0$ sur $[a, b]$.

Le polynôme Q_n est de degré n au plus puisque le déterminant est a priori de degré $(n + h)$ mais s'annule en $X = X_1, X_2, \ldots, X_h$ et l'on divise justement par $\pi(X)$.

En outre Q_n est orthogonal, sur $L^2[a,b]$ et pour le poids μ multiplié par π à tout polynôme P de degré $(n-1)$ au plus, puisque combinaison linéaire des polynômes $P_n, P_{n+1}, \ldots, P_{n+h}$.

$$\int_a^b Q_n(X)\, P(X)\, \pi(X)\, d\mu(X) = 0$$

Montrons que Q_n n'est pas identiquement nul et est de degré n exactement. En effet, le terme de degré n dans Q_n provient du mineur relatif à P_{n+h} dans le déterminant fournissant Q_n . Si ce mineur est nul, il existe h constantes $\alpha ,\dots, \alpha_{h-1}$ telles que le polynôme

$$R(x) = \sum_{h=0}^{h-1} \alpha_k P_{n+k}(x)$$

s'annule en $x = x_1, x_2, \dots, x_h$. Donc

$$R(x) = \pi(x) R_1(x)$$

Le degré de R_1 étant $(n-1)$ au plus. Dès lors, on dispose de la relation d'orthogonalité

$$\int_a^b R(x) R_1(x) \, d\rho(x) = 0$$

Soit

$$\int_a^b (R_1(x))^2 \pi(x) \, d\rho(x) = 0$$

La positivité de π sur $[a,b]$ implique donc $R_1 \equiv 0$, ce qui est impossible puisque les P_{n+k}, k variant de 0 à (h-1), sont linéairement indépendants.

Finalement la famille $\{Q_n\}_{n \geqslant 0}$ fournit une famille orthogonale pour le produit scalaire

$$< f , g > = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \pi(x) \, d\rho(x)$$

Ce résultat est du à Christoffel.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 40.

Cet exercice est une application du théorème de projection et constitue le théorème ergodique principal.

Les hypothèses sont les suivantes :

U est un opérateur hermitien, linéaire et continu, dont les puissances $p^{\text{ièmes}}$ sont toutes bornées en norme par une même constante réelle C .

On pose

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} U^k$$

A_n est un opérateur linéaire sur l'espace de Hilbert E, dont la norme est majorée par C :

$$\| A_n \| \leqslant c$$

a) Calculons d'abord l'action de A_n sur un vecteur x de la forme $U(y)-y$

$$A_n\Big(U(y)-y\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} U^k\Big(U(y)\Big) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} U^k(y)$$

$$= \frac{1}{n}\Big(U^{n+1}(y) - U(y)\Big)$$

lorsque n tend vers l'infini $\lim\limits_{n \to \infty} A_n\Big(U(y) - y\Big) = 0$. En effet

$$\| A_n\Big(U(y)-y\Big) \| \leqslant \frac{1}{n}\Big(\| U^{n+1} \| + \| U \|\Big) \| y \|$$

$$\leqslant \frac{2c \| y \|}{n}$$

Soit M l'ensemble des vecteurs x de la forme $U(y)-y$ où y parcourt E , c'est-à-dire que $M = (U-I)(E)$.

Soit $\overline{M}$ le sous-ensemble de E constitué par les limites de suites (de Cauchy) d'éléments de E : c'est-à-dire la fermeture de l'espace M.

D'une part, $\overline{M}$ est un sous-espace vectoriel de E comme il est facile de le constater : en effet si $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$ où x_n et y_n sont des éléments de E , alors

$$\lambda x + \mu y = \lim_{n \to +\infty} (\lambda x_n + \mu y_n)$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

De plus $\overline{M}$ est un sous-espace vectoriel complet de E (ce que nous démontrons en ce moment est un résultat topologique qui peut s'énoncer simplement en disant que la fermeture d'un sous-espace vectoriel, dans un espace de Hilbert E , est un espace complet).

En effet, soit $x^{(n)}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\overline{M}$, chaque élément $x^{(n)}$ étant lui-même obtenu comme une limite d'une suite (de Cauchy) $x_k^{(n)}$ d'éléments de M.

Comme $x^{(n)}$ est une suite de Cauchy dans E, il existe un vecteur limite x x de E et $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. De même $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(n)} = x^{(n)}$

Posons $y_1 = x^{(1)}$

puis, cet élément déterminé dans M, nous posons

$y_2 = x_k^{(2)}$ où k est le plus petit entier tel que $\| x_k^{(2)} - x^{(2)} \| \leqslant \frac{1}{2}$ et $\| x_m^{(2)} - x^{(2)} \| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $m \geqslant k$.

Plus généralement : $y_n = x_h^{(n)}$ où h est le plus petit entier, supérieur à l'entier ayant servi à déterminer y_{n-1}, tel que pour $m \geqslant h$, $\| x_m^{(n)} - x^{(n)} \| \leqslant \frac{1}{n}$. La suite $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite dans M et qui converge vers le point x de E. En effet :

$$\| x - y_n \| \leqslant \| x - x^{(n)} \| + \| x^{(n)} - x_h^{(n)} \| \leqslant \| x - x^{(n)} \| + \frac{1}{n}$$

ε étant donné positif si l'on choisit n tel que $\| x - x^{(n)} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$ et $\frac{1}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, il vient

$$\| x - y_n \| \leqslant \varepsilon$$

ce qui termine la démonstration en assurant que x est bien la limite d'une suite d'éléments de M. Donc $\overline{M}$ est un sous-espace de Hilbert de E.

Pour tout élément x de $\overline{M}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n(x) = 0$. En effet, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n(x^{(k)}) = 0$ pour tout $x^{(k)}$, élément de M. Or tout x de $\overline{M}$ est limite d'éléments $x^{(k)}$ de M et A_n forme une suite uniformément bornée d'opérateurs linéaires, donc :

$$\begin{aligned} \| A_n(x) \| &\leqslant \| A_n(x - x^{(k)}) \| + \| A_n(x^{(k)}) \| \\ &\leqslant C \, \| x - x^{(k)} \| + \| A_n(x^{(k)}) \| \end{aligned}$$

On choisit d'abord k pour que $C \| x - x^{(k)} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ puis k fixé, on choisit n suffisamment grand pour assurer $\| A_n(x^{(k)}) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, pour n assez grand

$$\| A_n(x) \| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout x dans } \overline{M}.$$

ε étant arbitraire (>0), on déduit bien $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = 0$ si $x \in \overline{M}$

b) D'après le théorème de projection, tout vecteur x de E se décompose d'une manière unique sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{où } x_1 \text{ est un élément de } \overline{M}$$
$$\text{et } x_2 \text{ est un élément de } (\overline{M})^{\perp}$$

et l'on a, grâce à la linéarité :

$$A_n(x) = A_n(x_1) + A_n(x_2)$$

Il reste donc à déterminer la limite de $A_n(x_2)$ lorsque n tend vers l'infini. Pour ce faire, nous allons utiliser l'hypothèse d'hermiticité de l'opérateur U (cette hypothèse assure en particulier que A_n est également un opérateur hermitien).

Soit y un élément quelconque de E. On a, puisque x_2 est orthogonal à $\overline{M}$, donc en particulier à M :

$$< x_2, U(y) - y > = 0$$

d'où

$$< x_2, U(y) > - < x_2, y > = 0$$

et grâce à l'hermiticité :

$$< U(x_2) - x_2, y > = 0$$

pour tout y de E. Par suite

$$U(x_2) = x_2$$

pour tout x_2 de $(\overline{M})^{\perp}$, ce qui entraîne

$$A_n(x_2) = x_2$$

pour tout x_2 de $(\overline{M})$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} A_n(x_2) = x_2$$

D'ailleurs réciproquement si x est tel que $U(x) = x$, alors x est un élément de $(\overline{M})^{\perp}$.

Finalement, $\lim_{n \to +\infty} A_n(x)$ existe pour tout élément x de E et vaut $P_{\infty}(x)$ où P_{∞} désigne la projection orthogonale de E sur $(\overline{M})^{\perp}$.

$$\lim_{n \to +\infty} A_n(x) = P(x) \qquad \forall x \in E$$

L'opérateur limite est donc bien linéaire et continu.

Finalement, nous avons obtenu le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : <u>si U est un opérateur hermitien sur un espace de Hilbert E et dont toutes les puissances restent bornées en norme par un même nombre, si P_∞ désigne la projection orthogonale sur l'ensemble des vecteurs invariants par U , alors</u>

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^{(k)}(x) = P_\infty(x) \qquad \underline{\text{pour tout } x \text{ dans } E} \quad .$$

On remarque en outre que

$$U(A_n)(x) = \frac{n+1}{n} A_{n+1}(x) - \frac{U(x)}{n}$$

$$A_n(U)(x) = U(A_n)(x)$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} A_n(U)(x) = \lim_{n \to +\infty} U(A_n(x) = \lim_{n \to +\infty} A_n(x) = P_\infty(x)$$

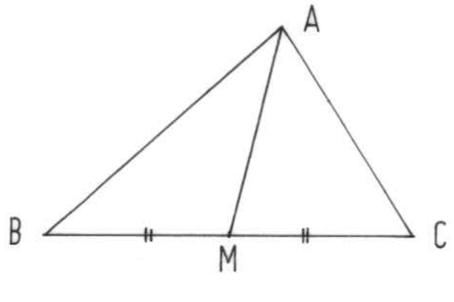
Soit pour tout x de E.

$$P_\infty(U)(x) = U\left(P_\infty(x)\right) = P_\infty(x)$$

On pourra retrouver tous ces résultats sur le cas particulier des matrices.

<u>Conclusion</u>.

Le théorème que nous venons de démontrer repose essentiellement sur l'égalité d'Apollonius puisque c'est sur cette égalité que repose le théorème de projection. Cette égalité donne la longueur de deux côtés d'un triangle en fonction de la longueur de la médiane relative au troisième côté et de la longueur de ce troisième côté.



$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 + 4\|\overrightarrow{AM}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$$

Une telle égalité caractérise les espaces préhilbertiens (cf Exercice N°14).

Par application de la seule inégalité triangulaire, valable dans tout espace normé, on obtient les inégalités :

(1) $$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{AC}\|}{2} \geqslant \|\overrightarrow{AM}\| \geqslant \frac{\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{AC}\|-\|\overrightarrow{BC}\|}{2}$$

A étant fixé ainsi que $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$, par exemple prenons $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 1$, tandis que $\|\overrightarrow{BC}\|$ reste minoré par une quantité positive ε, on ne peut pas majorer $\|\overrightarrow{AM}\|$ par une quantité strictement inférieure à 1 lorsque l'on dispose seulement de (1).

Au contraire, l'égalité d'Apollonius donne

(2) $$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2}{2} - \frac{\|\overrightarrow{BC}\|^2}{4}$$

donc assure, si $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 1$ tandis que $\|\overrightarrow{BC}\| > \varepsilon$, que $\|\overrightarrow{AM}\|$ est majorée par une quantité strictement inférieure à 1 et ne dépendant que de ε:

(3) $$\|\overrightarrow{AM}\|^2 \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Or si l'on reprend les calculs menant au théorème de projection, on remarque qu'une inégalité du type (3) suffit. On convient alors de dire : un espace normé est dit uniformément convexe si pout tout $\varepsilon, (2 > \varepsilon > 0)$ et pour tous vecteurs x et y tels que $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ on a un nombre $\delta(\varepsilon)$ strictement positif tel que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$$

Un espace préhilbertien est un espace uniformément convexe.

Sur un espace uniformément convexe, les théorèmes précédents se généralisent assez bien. De tels espaces sont utiles en théorie de l'approximation.

Ajoutons que les espaces L^p sont uniformément convexes. $(\infty > p > 1)$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 41.

Première question : Calcul de $A A^*$ et de $A^* A$.

$$A A^* = (P+iQ)(P-iQ) = P^2+Q^2-i[P,Q]$$

$$= 2H+I \qquad \text{avec les notations de l'énoncé.}$$

De même

$$A^* A = (P-iQ)(P+iQ) = P^2+Q^2+i[P,Q]$$
$$= 2H-I$$

[Il convient de remarquer dès cette étape que $P-iQ$ est l'adjoint de A . En effet, on connaît les propriétés de l'opération qui fait passer de A à son adjoint, (on note avec un astérique l'adjoint d'un opérateur).

L'adjoint d'une somme est la somme des adjoints $(A+B)^* = A^* + B^*$

L'adjoint de λA et le produit de l'adjoint de A par $\overline{\lambda}$: $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$

(rappelons que l'adjoint d'un opérateur A , s'il existe, est un opérateur tel que

$$< A x, y > = < x, A^* y >$$

pour tous les éléments x et y de l'espace préhilbertien E).

On a donc l'adjoint de A en prenant la somme de l'adjoint de P et de l'adjoint de (iQ). Comme P est hermitien, c'est-à-dire égal à son adjoint, et comme Q l'est également, on a bien :

$$A^* = P-iQ \qquad A^* \text{est l'adjoint de } A \,].$$

Les notations de l'énoncé sont donc cohérentes.

Calcul de $[A,H]$ et de $[H,A]$.

$$[A,H] = AH - HA$$

Or

$$H = \frac{A^* A + I}{2}$$

par conséquent :

$$[A,H] = A \frac{A^* A + I}{2} - \frac{A^* A + I}{2} A$$

$$= \frac{A A^* - A^* A}{2} A$$

$$= I A$$

$$[A,H] = A$$

De même, un calcul semblable conduit à

$$[H, A^*] = A^*$$

Toutefois, on peut obtenir directement ce résultat en utilisant les propriétés des adjoints

$$[A, H]^* = (AH)^* - (HA)^* = H^* A^* - A^* H^*$$
$$= [H^*, A^*]$$

Or

$$H^* = \frac{1}{2}\left(P^{*2} + Q^{*2}\right) = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$$
$$H^* = H$$

Soit

$$[A, H]^* = [H, A^*]$$

De $[A, H] = A$, on déduit bien $[H, A^*] = A^*$.

Deuxième question.

Soit λ une valeur propre de l'opérateur hermitien H et X_λ un vecteur propre, donc non nul, associé à cette valeur propre λ .

X_λ est alors vecteur propre de $A A^*$ pour la valeur propre $2\lambda + 1$ puisque $AA^* = 2H + I$ et de $A^* A$ pour la valeur propre $2\lambda - 1$.

Soit

$$A\,A^*(X_\lambda) = (2\lambda+1)\,X_\lambda$$

$$A^*A\,(X_\lambda) = (2\lambda-1)\,X_\lambda$$

Rappelons également que les valeurs propres d'un opérateur hermitien sont réelles (λ réelle). Dès lors

$$\|A(X_\lambda)\|^2 = \langle A(X_\lambda), A(X_\lambda)\rangle = \langle X_\lambda, A^*A(X_\lambda)\rangle$$

puisque A^*est l'adjoint de A

$$= \langle X_\lambda, (2\lambda-1)\,X_\lambda\rangle$$

$$= (2\lambda-1)\,\langle X_\lambda . X_\lambda\rangle$$

Soit

(1) $$\|A(X_\lambda)\|^2 = (2\lambda-1)\,\|X_\lambda\|^2$$

De même, on calculerait

(2) $$\|A^*(X_\lambda)\|^2 = (2\lambda+1)\,\|X_\lambda\|^2$$

Enfin, on a

(3) $$HA(X_\lambda) = AH(X_\lambda) - A(X_\lambda) = (\lambda-1)\,A(X_\lambda)$$

et

(4) $$H\,A^*(X_\lambda) = A^*H(X_\lambda) + A^*(X_\lambda) = (\lambda+1)\,A^*(X_\lambda)$$

Troisième question.

a) Le spectre de l'opérateur H , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de H , peut a priori être vide. Supposons d'abord que S ne soit pas vide.

Puisqu'un vecteur propre est nécessairement non nul, c'est que $2\lambda+1$ et $2\lambda-1$ sont des nombres positifs, ou nuls et par conséquent tout élément du spectre est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, grâce aux relations

(1) et (2) $\quad \lambda \geqslant \frac{1}{2}$

b) Supposons maintenant que la valeur 1/2 n'appartienne pas au spectre de l'opérateur hermitien H .

Supposons que λ appartienne au spectre de S pour un vecteur propre associé X_λ . Bien sûr, compte tenu des hypothèses, $\lambda > \frac{1}{2}$.

Montrons alors par récurrence que $A^n(X_\lambda)$ est un vecteur propre de l'opérateur H pour la valeur propre $\lambda - n$.

Pour $n = 0$, X_λ est bien, par hypothèse, un vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda \neq \frac{1}{2}$

Pour $n = 1$, $A(X_\lambda)$ satisfait les deux relations suivantes :

(1) $$\|A(X_\lambda)\|^2 = (2\lambda - 1)\|X_\lambda\|^2$$

et

(2) $$H A(X_\lambda) = (\lambda - 1) A(X_\lambda)$$

Comme $\|X_\lambda\|$ est différent de 0 et que $2\lambda - 1 \neq 0$, on a

$$\|A(X_\lambda)\| \neq 0$$

ce qui assure que $A(X_\lambda)$ n'est pas nul. La relation (2) établit alors que $A(X_\lambda)$ est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda - 1$.

Supposons donc avoir à l'ordre n, les deux résultats suivants :

(1) $\quad A^n(X_\lambda)$ n'est pas nul

(2) $$H A^n(X_\lambda) = (\lambda - n) A^n(X_\lambda)$$

Le vecteur $A^n(X_\lambda)$ est donc vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda - n$. Comme 1/2 n'appartient pas au spectre, cela prouve d'une part que $\lambda - n \neq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $2\lambda - 2n - 1 \neq 0$

Par ailleurs, si l'on pose $Y = A^n(X_\lambda)$, on doit avoir, conformément aux résultats de la question 2 :

(3) $$\|A(Y)\|^2 = \left(2(\lambda - n) - 1\right)\|Y\|^2$$

et

(4) $$H A(Y) = (\lambda - n - 1)\, A(Y)$$

Soit en remarquant que $A(Y) = A^{n+1}(X_\lambda)$

(1 bis) $$\| A^{n+1}(X_\lambda) \|^2 = (2\lambda - 2n - 1)\, \| A^n(X_\lambda) \|^2$$

et

(2 bis) $$\| H A^{n+1}(Y) \| = (\lambda - n + 1)\, A^{n+1}(Y)$$

Puisque $A^n(X_\lambda)$ n'est pas nul (relation (1) de récurrence) et puisque $2\lambda - 2n - 1 \neq 0$, la relation (1 bis) assure que $A^{n+1}(X_\lambda)$ n'est pas nul.

La relation (2 bis) établit alors que $A^{n+1}(X_\lambda)$ est vecteur propre de l'opérateur hermitien H pour la valeur propre $\lambda - n - 1$. Ceci termine la démonstration par récurrence.

Dès lors, pour un entier n suffisamment grand, $\lambda - n$ est inférieur à 1/2 mais appartient cependant au spectre. Ceci est contraire au résultat de (2) et implique que S est vide lorsque 1/2 n'appartient pas à S .

c) Supposons maintenant le spectre S de H non vide et supposons que $\frac{1}{2} = \lambda$ soit un élément de S pour un vecteur propre associé $X_{\frac{1}{2}} = X_\lambda$
On a les deux relations suivantes, valables pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

(1) $$\| A^* (X_\lambda) \|^2 = (2\lambda + 1)\, \|X_\lambda\|^2$$

et

(2) $$H A^*(X_\lambda) = (\lambda + 1)\, A^*(X_\lambda)$$

Ces deux relations assurent que 1/2 + 1 est valeur propre de H pour le vecteur propre (non nul d'après (1)) $A^*(X_\lambda)$. Par récurrence, il est facile de constater que $(A^*)^n\,(X_{1/2})$ est un vecteur non nul, vecteur propre de H pour la valeur propre $\frac{1}{2} + n$, où n est un entier naturel.

En définitive, lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$ appartient au spectre de H, toute valeur $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ où n parcourt l'ensemble des entiers naturels, est également une valeur appartenant au spectre de S.

Donnons une réciproque en établissant que seules les valeurs $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ peuvent être valeurs propres de l'opérateur hermitien H. En effet, supposons que λ soit distincte de toutes les valeurs $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ lorsque n parcourt les entiers naturels et supposons en outre que λ soit valeur propre de l'opérateur H. En suivant la démarche de (b), il est facile de prouver que la famille des vecteurs $A^p(X_\lambda)$, où X_λ est un vecteur propre associé à λ, constitue une famille de vecteurs propres de l'opérateur H.

Par récurrence, on obtient facilement

$$\text{(1)} \qquad \| A^p(X_\lambda) \|^2 = \big(2\lambda - (2p-1)\big) \| A^{p-1}(X_\lambda) \|^2$$

$$= \big(2\lambda - (2p-1)\big)\big(2\lambda - (2p-3)\big) --- (2\lambda - 1) \| X_\lambda \|^2$$

et

$$\text{(2)} \qquad H\big(A^p(X_\lambda)\big) = (\lambda - p)\, A^p(X_\lambda)$$

lorsque $\lambda \neq \lambda_n$(pout tout n), la relation (1) assure que $A^p(X_\lambda)$ n'est pas nul et la relation (2) permet de dire que $A^p(X_\lambda)$ est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda - p$ de l'opérateur H.

Dès lors, on peut choisir p assez grand pour que $\lambda - p$ soit inférieur à 1/2 et ce résultat contredit (a). Par conséquent, si λ est valeur propre de H, il existe un entier n tel que $\lambda = \lambda_n$.

La recherche des vecteurs propres de H est donc ramenée à la recherche des vecteurs propres qui correspondent aux valeurs propres λ_n. Nous allons ramener cette recherche à la seule considération des vecteurs propres relatifs à $\lambda = \frac{1}{2}$. Enfin, nous déterminerons l'ensemble des vecteurs propres relatifs à $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.

On peut remarquer que $\| A^n(X_{\lambda_n}) \|^2 = 2^n n! \| X_{\lambda_n} \|^2$

d) Nous cherchons maintenant à savoir si, lorsque $S \neq 0$, les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ peuvent être obtenus à partir des vecteurs propres associés à $\lambda_0 = \frac{1}{2}$

En (c) d'une part, nous avons établi que tout vecteur de la forme $X_{\lambda_n} = (A^*)^n X_{\lambda_0}$ est vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ lorsque X_{λ_0} est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_0 = \frac{1}{2}$

Il nous faut donc établir la réciproque. Nous allons procéder par récurrence. Soit d'abord le cas $n = 1$.

Soit $X_{\frac{3}{2}}$ un vecteur propre de H relatif à la valeur propre $\lambda_1 = \frac{3}{2}$

Formons $A(X_{\frac{3}{2}}) = Y$. Le vecteur Y satisfait les relations

$$H(Y) = \frac{1}{2} Y$$

$$\| H \|^2 = 2 \| X_{\frac{3}{2}} \|^2$$

Le vecteur Y est donc vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = \frac{1}{2}$. Il est du type $X_{\frac{1}{2}}$.

Formons alors $A^* Y = A^* A(X_{\frac{3}{2}})$. Il vient, à partir de $A^* A = 2H - I$

$$A^*(Y) = 2H(X_{\frac{3}{2}}) - I(X_{\frac{3}{2}}) = (2 \cdot \frac{3}{2} - 1) X_{\frac{3}{2}} = 2 X_{\frac{3}{2}}$$

Finalement, posons $X_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} A(X_{\frac{3}{2}})$. Le vecteur $X_{\frac{1}{2}}$ est vecteur propre de H pour la valeur propre 1/2 et $A^*(X_{\frac{1}{2}})$ est précisément égal au vecteur $X_{\frac{3}{2}}$ dont nous sommes partis. Cela prouve que tout vecteur propre relatif à $\lambda = \frac{3}{2}$ est de la forme $A^* X_{\frac{1}{2}}$ ou $X_{\frac{1}{2}}$ est un vecteur propre relatif à $\lambda = \frac{1}{2}$.

Supposons ce résultat exact à l'ordre n. Donnons-nous alors un vecteur propre X de H relatif à $\lambda_{n+1} = (n+1) + \frac{1}{2}$. Formons

$$Y = \frac{A(X)}{2(n+1)}$$

Le vecteur Y satisfait

$$H(Y) = (n + \frac{1}{2}) Y$$

et

$$\| Y \|^2 = \frac{2(n+1)}{4(n+1)} \| X \|^2 = \frac{1}{2(n+1)} \| X \|^2$$

Y est donc un vecteur propre relatif à $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$. Formons maintenant $A^*(Y)$ Il vient aussitôt :

$$A^*(Y) = \frac{1}{2(n+1)} A^*A(X) = \frac{1}{2(n+1)}(2H - I)(X) = H(X) - \frac{1}{2}(x) = \frac{(n+1)X}{n+1}$$

$$A^*(Y) = X$$

Finalement, on obtient X comme image par A^* d'un vecteur propre relatif à $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$. Mais par l'hypothèse de récurrence, il existe un vecteur Z , vecteur propre relatif à 1/2, tel que $(A^*)^n(Z) = Y$. D'où $X = (A^*)^{n+1}(Z)$ avec Z vecteur propre relatif à $\lambda = \frac{1}{2}$.

La récurrence est donc établie, ainsi que l'assertion de (d).

e) Si $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ est valeur propre de H , alors il existe un vecteur $X_{\frac{1}{2}}$ non nul tel que $H X_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} X_{\frac{1}{2}}$. Ceci permet d'écrire que

$$\| A X_{\frac{1}{2}} \|^2 = 0 \qquad \text{et donc} \qquad A(X_{\frac{1}{2}}) = 0$$

Réciproquement, soit X un vecteur de E , non nul, et tel que $A(X) = 0$ Montrons que $\lambda = \frac{1}{2}$ est une valeur propre de H .

Nous avons effectivement

$$A^*A(X) = 2H(X) - X$$

d'après la première question.

D'où
$$H(X) = \frac{1}{2} X$$

ce qui montre que X (non nul), est vecteur propre de H pour la valeur propre 1/2.

En résumé, pour qu'un vecteur X soit vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda = \frac{1}{2}$, il faut et il suffit que X soit un vecteur non nul du noyau de A .

Nous pouvons maintenant résumer les résultats de ce problème.

Soient P et Q deux opérateurs hermitiens sur un espace préhilbertien complexe E dont le crochet de Poisson ($[P, Q]$) soit égal à iI, où I désigne l'opérateur identité. On pose

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) \qquad \text{et} \qquad A = P + iQ$$

Le spectre de H , s'il n'est pas vide, est composé des valeurs $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$ où n parcourt les entiers naturels (positifs ou nuls).

Les vecteurs propres de H sont les vecteurs non nuls du noyau de A .

Si A est injectif, le spectre de H est vide.

De façon plus précise, si $X \neq 0$ appartient au noyau de A , X est vecteur propre de H pour la valeur propre 1/2 et $(A^*)^n(X)$ est vecteur propre de H pour la valeur propre $n + \frac{1}{2}$.

Les résultats de ce problème servent en mécanique quantique pour déterminer les différents états d'un atome d'hydrogène.

<u>CORRIGE DE L'EXERCICE N° 42</u>. Etude directe d'un problème de Sturm-Liouville sans utilisation de la théorie développée en cours.

<u>Première question</u>:

Soit λ un nombre réel. On appelle problème P_λ la recherche des solutions non nulles et à valeurs réelles de l'équation

$$(1) \qquad x y'' + y' + \lambda x y = 0$$

satisfaisant les conditions C

$$(C) \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle (1) peut s'écrire d'une autre manière

$$\frac{d(x y')}{dx} + \lambda x y = 0$$

On appelle y_λ une solution du problème P_λ. Soient λ_1, λ_2 deux nombres réels distincts. On dispose de :

$$\frac{d(x y'_{\lambda_1})}{dx} + \lambda_1 x y_{\lambda_1} = 0$$

et $$\frac{d(x y_{\lambda_2})}{dx} + \lambda_2 x y_{\lambda_2} = 0$$

Multipliant la première équation par y_{λ_2}, la deuxième par y_{λ_1} puis soustrayant les expressions obtenues, il vient

$$\frac{d[x(y_{\lambda_2} y'_{\lambda_1} - y_{\lambda_1} y'_{\lambda_2})]}{dx} = (\lambda_2 - \lambda_1) x y_{\lambda_1} y_{\lambda_2}$$

Intégrant entre 0 et 1, en utilisant les conditions (C), on obtient

$$0 = [x(y_{\lambda_2} y'_{\lambda_1} - y_{\lambda_1} y'_{\lambda_2})]_0^1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^1 x y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} dx$$

L'intégration ci-dessus est licite car les fonctions y_{λ_1} et y_{λ_2} sont supposées définies pour toutes les valeurs de x et deux fois continûment dérivables.

On obtient donc

$$\int_0^1 x y_{\lambda_1}(x) y_{\lambda_2}(x) dx = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

ce qui est bien une relation d'orthogonalité.

Bien entendu, deux fonctions y_{λ_1} et y_{λ_2} solutions du problème P_{λ_1} (respectivement P_{λ_2}) ne peuvent être linéairement dépendantes. En effet, si l'on avait

$$\alpha y_{\lambda_1}(x) + \beta y_{\lambda_2}(x) = 0$$

il viendrait en multipliant par $x y_{\lambda_2}$ ou $x y_{\lambda_1}$ et en intégrant entre 0 et 1 :

$$\alpha \int_0^1 x y_{\lambda_1}^2(x) dx = 0$$

et

$$\beta \int_0^1 x y_{\lambda_2}^2(x) dx = 0$$

Par hypothèse y_{λ_1} et y_{λ_2} ne sont pas identiquement nulles, les intégrales ne sont pas nulles et donc

$$\alpha = \beta = 0$$

D'ailleurs géométriquement l'orthogonalité correspond bien à la notion d'indépendance linéaire (elle implique même une indépendance linéaire topologique comme on l'a montré dans le cours).

Deuxième question :

Multiplions les deux membres de l'équation différentielle (1) par $x y'_\lambda$ et intégrons entre 0 et 1. Il vient

$$\frac{1}{2}\left[(x\, y'_\lambda)^2\right]_0^1 + \lambda \int_0^1 x^2 y_\lambda\, y'_\lambda\, dx = 0$$

On peut encore effectuer une intégration par parties et tenir compte des conditions C pour obtenir

$$\frac{[y'_\lambda(1)]^2}{2} - \lambda \int_0^1 x\, y_\lambda^2\, dx = 0$$

Si l'on avait $y'_\lambda(1) = 0$, on aurait alors une fonction y_λ de la variable x satisfaisant l'équation différentielle (1) et les conditions de Cauchy en x = 1

$$y_\lambda(1) = y'_\lambda(1) = 0$$

Or au point x =1, l'équation (1) est régulière et satisfait les conditions d'unicité du théorème de Cauchy. Par suite $y_\lambda \equiv 0$ donc n'est pas solution du problème P_λ selon les hypothèses faites. En résumé $y'_\lambda(1) \neq 0$ Par suite, comme y_λ n'est pas identiquement nulle, on dispose de

$$\int_0^1 x\, y_\lambda^2\, dx \neq 0$$

et on a

$$\lambda = \frac{[y'_\lambda(1)]^2}{2\int_0^1 x y_\lambda^2\, dx} > 0$$

Par suite, si P_λ possède une solution, ce ne peut être que pour une valeur de λ strictement positive (on pouvait voir directement que $\lambda = 0$ ne peut convenir puisqu'alors la solution générale de (1) est de la forme $\alpha_1 \log|x| + \alpha_2$ et ne peut satisfaire les conditions C car elle possède une singularité à l'origine).

Troisième question:

a) E est l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles f telles que $\int_0^1 x\, f^2(x)\, dx$ soit fini (nour prenons ici l'intégrale au sens de Lebesgue).

L'espace E est un espace vectoriel puisque si

$$f \in E \ , \lambda f \in E$$

et si f_1 et f_2 appartiennent à E , on a $f_1 + f_2 \in E$ grâce à

$$(f_1 + f_2)^2 \leqslant 2(f_1^2 + f_2^2)$$

donc

$$\int_0^1 x(f_1 + f_2)^2 \, dx \leqslant 2\left[\int_0^1 x \, f_1^2(x) \, dx + \int_0^1 x \, f_2^2(x) \, dx\right]$$

Cet espace E possède toutes les propriétés linéaires de l'espace $L^2[0,1]$. D'ailleurs, on peut établir une correspondance bijective et isométrique entre E et $L^2[0,1]$ à partir de la correspondance

$$f \in L^2[0,1] \longleftrightarrow g = \sqrt{2} f(x^2) \qquad g \in E$$

$$\int_0^1 x g^2(x) \, dx = \int_0^1 2x f^2(x^2) \, dx = \int_0^1 f^2(x^2) \, d(x^2) = \int_0^1 f^2(t) \, dt$$

Ainsi E peut-il être structuré en espace préhilbertien réel par le produit scalaire

$$< f, g >_E = \int_0^1 x \, f(x) \, g(x) \, dx$$

D'après l'inégalité de Schwarz relative aux intégrales et appliquée aux fonctions $\sqrt{x}.f$, et $\sqrt{x}.g$, on trouve directement

$$< f, g >_E^2 \leqslant < f, f >_E < g, g >_E$$

La vérification de ces assertions est facile et laissée au lecteur. Bien entendu, il faut considérer comme équivalentes deux fonctions f_1 et f_2 de E telles que

$$\int_0^1 x \, [f_1(x) - f_2(x)]^2 \, dx = 0$$

c'est-à-dire telles que $x\,(f_1(x) - f_2(x))^2 = 0$ presque partout. Soit encore telles que $f_1(x) = f_2(x)$ presque partout, comme cela a été expliqué dans le cours. Naturellement E est l'espace $L^2([0,1], x)$ et nous aurions pu directement appliquer les résultats du cours.

La norme dans E est définie par

$$\| f \|_E^2 = \int_0^1 x \, f^2(x) \, dx$$

b) Nous allons préciser les relations d'inclusions entre les divers espaces, E, $L^1[0,1]$ et $L^2[0,1]$

On retiendra que dans ces problèmes d'inclusion, il importe essentiellement de comparer les normes. L'ensemble $E \cap L^1[0,1] \cap L^2[0,1]$ n'est pas vide puisque comportant au moins toutes les fonctions continues.

D'une part, on a l'inclusion $L^2[0,1] \subset E$. En effet

$$\int_0^1 x f^2(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

puisque $x \leqslant 1$ sur l'intervalle d'intégration. Donc

$$\| f \|_E \leqslant \| f \|_{L^2[0,1]}$$

Ce résultat implique bien l'inclusion.

D'autre part, on a $L^2[0,1] \subset L^1[0,1]$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Schwarz à la fonction f et à la fonction .

$$\left(\int_0^1 1\,|f(x)|\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 1^2\,dx\right)\left(\int_0^1 |f|^2(x)\,dx\right)$$

Soit finalement $\| f \|_1 \leqslant \| f \|_2$

ce qui implique l'inclusion dite.

Par contre il n'y a pas de relations d'inclusion entre E et $L^1[0,1]$
D'une part, il existe une fonction $f \in L^1[0,1]$, mais n'appartenant pas à E.

Considérons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Visiblement $f(x) \in L^1$, mais l'intégrale du carré diverge à cause du comportement autour de $x = 1$ et la multiplication par x ne change rien à ce comportement.

D'autre part, il existe une fonction $f \in E$ mais n'appartenant pas à $L^1[0,1]$.

Considérons

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x \operatorname{Log} x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \\ &= 0 \quad \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il vient

$$\int_0^1 x f^2(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \operatorname{Log}^2 x} = \int_{\operatorname{Log}2}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\operatorname{Log}2} < +\infty$$

Par contre

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\operatorname{Log} x|} = \int_{\operatorname{Log}2}^{+\infty} \frac{dv}{v}$$

diverge à cause du comportement en $\frac{1}{v}$ à l'infini.

En fait sur l'intersection $L^1[0,1] \cap E$ les normes $\|f\|_E$ et $\|f\|_{L^1[0,1]} = \|f\|_1$ ne sont pas équivalentes : c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constantes a et b strictement positives telles que

$$a\|f\|_E \leqslant \|f\|_1 < b\|f\|_E$$

Pour établir ceci il suffit d'approcher les fonctions qui servent dans les contre-exemples précédents par des fonctions suffisamment régulières. Je fais ici la démonstration pour l'exemple. On prend pour fixer les idées la deuxième égalité.

On pose $f_n(x)$

$$\begin{cases} = 0 & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{x \operatorname{Log} x} & \text{si} \quad \frac{1}{x \operatorname{Log} x} \geqslant -n \\ = -n & \text{si} \quad \frac{1}{x \operatorname{Log} x} < -n \end{cases}$$

Il vient

$$\|f_n\|_E = \int_0^1 x f_n^2(x)\,dx = \int_0^{1/2} x f_n^2(x)\,dx = \int_{x_n}^{1/2} \frac{dx}{x \operatorname{Log}^2 x} = \int_{\operatorname{Log}2}^{\operatorname{Log} x_n} \frac{dv}{v^2} = \left(\frac{1}{\operatorname{Log}2} - \frac{1}{\operatorname{Log} x_n}\right)$$

où x_n est tel que $x_n \operatorname{Log} x_n = -\frac{1}{n}$. On sait que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ en décroissant.

Donc $f_n \in E$ et $\|f_n\|_E \leqslant \frac{2}{\operatorname{Log}2}$ pour n assez grand.

Par contre

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int_{x_n}^{1/2} \frac{dx}{x \operatorname{Log} x} = \int_{\log 2}^{\operatorname{Log} x_n} \frac{dv}{v} = \operatorname{Log}\left[\frac{\operatorname{Log} x_n}{\operatorname{Log} 2}\right]$$

et $\|f_n\|_1$ tend vers l'infini en croissant avec x.

La deuxième inégalité n'est donc pas possible car elle entraîne

$$\|f_n\|_1 \leqslant b \frac{2}{\log 2}$$

ce qui contredit le résultat : $\|f_n\|_1$ tend en croissant vers l'infini.

c) Les calculs de la première question montrent que si le problème P_λ a des solutions, les y_λ correspondants (a priori, pour un λ donné, il peut y avoir plusieurs y_λ associés !) satisfont

$$\int_0^1 x\, y_{\lambda_1}(x)\, y_{\lambda_2}(x)\, dx = \frac{(y'_{\lambda_1}(1))^2}{2\lambda_1} \delta_{\lambda_1,\lambda_2}$$

où

$$\delta_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 1 & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Appelons Λ l'ensemble (qui peut être vide !) des valeurs λ pour lesquelles P_λ admet au moins une solution. Alors la suite

$$\frac{\sqrt{2\lambda}}{y'_\lambda(1)}\, y_\lambda(x)$$

où y_λ est une solution de P_λ lorsque λ parcourt Λ , est une suite orthonormée de l'espace E .

Quatrième question :

Nous allons maintenant montrer que P_λ admet une solution unique pour certains λ .

On pose

$$y_\lambda(x) = y_\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

et l'on a d'après (1)

$$\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\quad y''_\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + y'_\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{x}{\sqrt{\lambda}}\ y_\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

et par dérivation de $y_\lambda(x)$, il vient

$$\frac{x}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{x} \cdot y''_\lambda(x) + \sqrt{\lambda} \cdot y'_\lambda(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} \cdot x\, y_\lambda(x) = 0$$

Soit

$$x\, y''_\lambda(x) + y'_\lambda(x) + x y_\lambda(x) = 0$$

Cette nouvelle équation différentielle est une équation de Bessel et ne dépend pas de λ .

Transcrivons les conditions C sur y_λ .

$$(C') \quad \begin{cases} y_\lambda(\sqrt{\lambda}) = y_\lambda(1) = 0 \\ y_\lambda(0) = 1 \end{cases}$$

Or l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0$$

a une solution générale donnée par

$\alpha J_0(x) + \beta N_0(x)$ — $J_0(x)$ fonction de Bessel de première espèce (d'ordre 0)

$N_0(x)$ fonction de Bessel de deuxième espèce (d'ordre 0)

Or seule la fonction $J_0(x)$ est bornée à l'origine. Elle prend d'ailleurs la valeur 1 en ce point. On doit donc avoir

$$y_\lambda(x) = J_0(x) \text{ soit } \quad y_\lambda(x) = J_0(\sqrt{\lambda}x)$$

Mais alors la première condition de (C') donne

$$y_\lambda(\sqrt{\lambda}) = J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Résumons les résultats obtenus.

Si $\lambda \in \Lambda$, alors λ est positif et $\sqrt{\lambda}$ est un zéro de la fonction de Bessel d'ordre 0 et de première espèce. Dans ce cas le problème P_λ admet une solution $y_\lambda(x) = J_0(\sqrt{\lambda}x)$ unique. Réciproquement, si $\sqrt{\lambda}$ n'est pas un zéro de la fonction de Bessel d'ordre 0 et de première espèce, le problème P_λ n'a pas de solution.

Nous avons ainsi caractérisé Λ . Λ est l'ensemble des carrés des zéros de la fonction de Bessel d'ordre 0 et de première espèce.

(on rappelle que $J_0(x)$ est une fonction paire).

Cinquième question :

On peut démontrer que le système $\{y_\lambda\}$ où λ parcourt Λ est un système total dans l'espace E (cela tient au fait que $\lambda = 0$ n'appartient pas à Λ et appliquer la théorie des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert : Cf cours): on remarquera que jusqu'à présent, nous avons fait une étude directe sans utilisation des résultats du cours).

Dans ce cas, la fonction 1 admet un développement de Fourier généralisé relativement au système total y_λ. C'est-à-dire que l'on a

$$1 = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \, y_\lambda(x)$$

où la convergence de cette série s'entend au sens de E. De plus, on obtient précisément la valeur de a_λ, selon la théorie

$$a_\lambda = \frac{<1, y_\lambda>_E}{\| y_\lambda \|^2} = \left(\int_0^1 x y_\lambda(x)\, dx \right) \frac{1}{\| y_\lambda \|^2}$$

Soit

$$a_\lambda = \frac{\int_0^1 x \, J_0(\sqrt{\lambda}\, x)\, dx}{\left(\int_0^1 x \, J_0^2(\sqrt{\lambda}\, x)\, dx \right)} = \frac{\int_0^1 x \, J_0(\sqrt{\lambda}\, x)\, dx}{J_0'^2(\sqrt{\lambda})}$$

Mais on peut calculer une expression plus simple de a_λ, au moyen de formules de récurrence relatives aux fonctions de Bessel. On sait en effet que

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

$$\left(x J_1(x) \right)' = x J_0(x)$$

Par suite

$$\int_0^1 \sqrt{\lambda}\, x \, J_0(\sqrt{\lambda}\, x)\, d(\sqrt{\lambda})x = \int_0^{\sqrt{\lambda}} (v J_0(v))\, dv = \int_0^{\sqrt{\lambda}} (v\, J_1(v))' dv = \sqrt{\lambda}\, J_1(\sqrt{\lambda}) = -\sqrt{\lambda}\, J_0'(\sqrt{\lambda})$$

D'où $$a_\lambda = -\frac{2\sqrt{\lambda}\; J_0'(\sqrt{\lambda})}{J_0'^2(\sqrt{\lambda})} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{J_0'(\sqrt{\lambda})}$$

$$\boxed{a_\lambda = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{J_0'(\sqrt{\lambda})}}$$

et on a :

$$1 = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda J_0(\sqrt{\lambda} x)$$

Sixième question :

La théorie des opérateurs compacts (Cf cours) assure que l'ensemble Λ est dénombrable. Nous pouvons retrouver ce résultat de diverses façons à partir de la caractérisation de Λ .

première méthode : supposons que $y(x)$ soit une solution de l'équation de Bessel et vérifiant les conditions

$$y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Supposons que y ait une infinité de zéros sur un segment borné $[x_1, x_2]$ D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, ces zéros admettent un point d'accumulation x_0. Par continuité de $y(x)$, on aurait

$$y(x_0) = 0$$

Le théorème de Rolle assure qu'entre deux zéros de y, il existe au moins un zéro de y'. Par suite, il vient facilement, grâce à la continuité

$$y'(x_0) = 0$$

Mais d'après le théorème d'unicité de Cauchy, valable ici en tout point $x_0 \neq 0$, on aura $y \equiv 0$ pour toutes les valeurs de x qui est absurde.

(il n'y a aucune étude particulière à faire pour le point $x = 0$ puisque l'hypothèse $y(0) = 1$ jointe à la continuité permet d'éliminer un petit segment autour de zéro où il n'y a aucun zéro de la fonction).

Par suite, il existe au plus un nombre fini de zéros dans $[-N, +N]$ pour la fonction J_0 et donc Λ réunion dénombrable d'ensembles ayant un nombre fini d'éléments, est dénombrable.

Effectivement, on démontre que l'ensemble des zéros de J_0 est bien infini (dénombrable) car si Λ était fini cela signifierait, grâce à la totalité de y_λ , que E serait un espace de dimension finie, ce qui est faux.

Deuxième méthode: $J_0(t)$ peut se prolonger en une fonction entière dans le plan complexe

$$J_0(z) = 1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} + \cdots$$

Par suite $J_0(z)$ ne peut avoir qu'une infinité dénombrable de zéros. Effectivement il y en a une infinité, sinon on aurait en utilisant le théorème de Liouville

$$\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}{J_0(z)} = C^{te}$$

ce qui est faux.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 43.

1°) Récapitulons les résultats obtenus quant à l'opérateur de projection

L'opérateur de projection orthogonal sur un sous-espace vectoriel complet M d'un espace de Hilbert E est un opérateur linéaire, continu, idempotent, hermitien, et de norme égale à 1.

De plus l'image de E par P est le sous-espace M (surjectivité) et le noyau de P est le sous-espace orthogonal à M. En effet, si x appartient à $\ker P$ (ensemble des vecteurs x tels que $P(x) = 0$), on a pour tout y dans M $\langle x-P(x),y\rangle = \langle x,y\rangle = 0$ donc x est orthogonal à M.

Réciproquement si x est orthogonal à M, $P(x) = 0$ grâce à la caractérisation de $P(x)$ par orthogonalité.

$$M^{\perp} = \{x \mid P(x) = 0\} = \ker P$$
$$= \{x \mid \langle x,y\rangle = 0 \quad \text{pour tout } y \text{ dans } M\},$$

d'après ce qui vient d'être vu.

$M^{\perp}$ est un sous-espace de Hilbert de E : d'une part, il est facile de voir qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E. Par ailleurs, ce sous-espace vectoriel est complet car si x_n est une suite de Cauchy de vecteurs de $M^{\perp}$, x_n est aussi une suite de Cauchy dans E et converge donc vers un élément x de E. Je dis que x appartient à M. En effet $\langle x_n,y\rangle = 0$ pour tout y de M donc de même $\langle x,y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle = 0$

pour tout y de M et par conséquent x appartient à $M^{\perp}$.

Cherchons à déterminer le projecteur orthogonal de E sur $M^{\perp}$. En fait il s'agit de $I-P$ où I désigne l'opérateur identique de E dans E . D'une part $x-P(x)$ est un élément de $M^{\perp}$ pour tout x dans E puisque

$$< x - P(x), y > = 0 \text{ pour tout } y \text{ dans } M .$$

De plus, pour tout z dans $M^{\perp}$:

$$< x - (x - P(x)), z > \quad = \quad < P(x), z > \quad = \quad 0$$

ce qui assure le résultat.

Par conséquent, pour tout x dans E

$$x = P(x) + (x - P(x)) \quad \text{où } P(x) \text{ appartient à } M$$
$$\text{et } x - P(x) \text{ appartient à } M^{\perp} .$$

(bien sûr $M \cap M^{\perp} = \{o\}$)

$M^{\perp}$ est donc un <u>supplémentaire algébrique</u> de l'espace M . Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter géométriquement tous ces résultats.

2°) Soit P un opérateur linéaire continu, idempotent et hermitien défini sur un espace vectoriel de Hilbert E . P est un projecteur orthogonal sur l'espace image de E par P .

Posons $M = P(E)$. M est un sous-espace vectoriel de E .

D'une part M est un sous-espace de Hilbert de E . En effet, soit x_n une suite de Cauchy d'éléments de M . Puisque E est complet, x_n converge vers un certain vecteur x de E . Mais ce vecteur x appartient à M car $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ or $P(x_n) = x_n$ grâce à l'idempotence de P et $\lim_{n \to \infty} P(x_n) = P(x)$ grâce à la continuité de P et donc $P(x) = x$ ce qui assure que x est dans M .

D'autre part $P(x)$ est la projection orthogonale de x sur le sous-espace M. Formons le produit scalaire

$<x-P(x),y> = <x,y> - <P(x),y>$ où y appartient à M.

Comme P est idempotent et comme y appartient à M, $y = P(y)$. Par suite de l'hermiticité de P

$$<x,y> = <x,P(y)> = <P(x),y>$$

D'où

$$<x-P(x),y> = 0$$

ce qui, grâce à la caractérisation de la projection orthogonale,assure le résultat souhaité.

3°) Montrons enfin qu'un sous-espace vectoriel complet de E est déterminé par son projecteur orthogonal P, ou ce qui revient au même, par le sous-espace $M^{\perp}$, sous-espace orthogonal de P. Nous allons établir ce fait en prouvant que

$$\boxed{(M^{\perp})^{\perp} = M}$$

D'une part on a bien sûr $(M^{\perp})^{\perp} \supset M$ par construction de $M^{\perp}$.
Soit x un élément de $(M^{\perp})^{\perp}$. On écrit

$$x = P(x) + (x-P(x)) \text{ où } P(x) \text{ appartient à } M$$

$$\text{et } x-P(x) \text{ appartient à } M^{\perp}$$

Comme x est dans $(M^{\perp})^{\perp}$, $<x,x-P(x)> = 0$ et $<x-P(x),P(x)> = 0$

puisque $P(x)$ appartient à M, d'où :

$$<x-P(x),x-P(x)> = \|x-P(x)\|^2 = 0$$

ce qui implique que x, élément de $(M^{\perp})^{\perp}$ est en fait de la forme $P(x)$ donc élément de M. Ceci termine la démonstration.

En particulier, puisque $(\overline{F})^{\perp} = F^{\perp}$, on a $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$ pour tout sous-espace vectoriel F de E.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

Exercice n° 44

Avec les notations de ce chapitre, résoudre l'équation

$$(1) \qquad \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} x(t)dt = x(s)$$

dans l'espace E des fonctions continues.

En déduire la formule de Taylor sous forme intégrale (on considèrera l'équation intégrale

$$(2) \qquad \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} x(t)dt = y(s)$$

où y est une fonction continue).

Exercice n° 45

Un espace métrique (E, d) est dit α-chaînable s'il existe un nombre $\alpha > 0$ fixe tel que, étant donné deux points quelconques x et y de E, il existe une suite finie $\{x_i\}_{i=0,\dots n}$ satisfaisant

a) $\quad x_0 = x \; ; \; x_n = y \quad$ et $\quad d(x_{i-1}, x_i) < \alpha \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$

Naturellement, l'entier n et les points x_i dépendent des deux points x et y.

1°) montrer que $\delta(x, y) = \mathrm{Inf}(\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i-1}))$, où la borne inférieure est à prendre sur l'ensemble des suites finies vérifiant (a), définit une distance sur l'espace E,

2°) supposons que (E, d) soit un espace métrique α-chaînable et complet. Supposons en outre que $f : E \longrightarrow E$ satisfasse

$\exists\, k < 1$ tel que $\quad \forall x \in E \;;\; \forall y \in E \quad$ et $\; d(x, y) < \alpha \quad$ entraîne

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$$

Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice n° 46

Soit $[A] = [a_{ij}]$ une matrice $n \times n$, strictement diagonalement dominante, c'est-à-dire telle que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < a_{ii} \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Montrer que la matrice $[A]$ est inversible.

Exercice n° 47

Donner des contre-exemples montrant que les hypothèses du théorème des approximations successives de Picard sont essentielles.

Exercice n° 48

Démontrer le théorème suivant :

soit Ω un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe, c'est-à-dire telle que

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)\, f(y) \qquad \begin{array}{l} \forall \alpha \;;\; 0 < \alpha < 1 \\ \forall x \in \Omega \\ \forall y \in \Omega \end{array}$$

La fonction f est alors continue. En outre elle satisfait localement une condition de Lipschitz ; c'est-à-dire que pour tout a de Ω il existe une boule ouverte V centrée en a et une constante C (dépendant de a et de la boule ouverte) de sorte que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\|x-y\| \qquad \forall x,\ y \in V$$

Exercice n° 49

Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe du plan $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe fermée simple de Jordan Γ. Soit $\vec{V}(M)$ un champ de vecteurs, continu, défini dans le plan. On appelle rotation du champ $\vec{V}$ le long de Γ, et on note $\alpha(V, \Gamma)$, l'angle dont tourne le vecteur $\vec{V}(M)$ lorsque le point M décrit la courbe Γ dans le sens direct. Cette rotation n'est bien définie que si $\vec{V}(M)$ ne s'annule pas sur la courbe Γ. On remarque alors que

$$\alpha(V, \Gamma) = 2k\pi \quad \text{où k est un entier relatif.}$$

On suppose désormais que le champ $\vec{V}$ est deux fois continûment différentiable et ne s'annule pas sur Γ.

Première question

φ désigne l'angle que fait $\vec{V}(M)$ avec une direction fixe. Exprimer $d\varphi$ en fonction de $d\vec{M}$ et en déduire une expression de $\alpha(V, \Gamma)$ sous forme d'une intégrale curviligne.

Deuxième question

A l'aide de la formule de Riemann, démontrer que si $\vec{V}(M)$ ne s'annule pas dans le domaine $\mathcal{D}$, la rotation $\alpha(V, \Gamma)$ est nulle.

Que peut-on dire si la rotation $\alpha(V, \Gamma)$ n'est pas nulle ? Cette dernière assertion admet-elle une réciproque ?

Troisième question

Etudier les cas suivants :

a) $\vec{V}(M) = \overrightarrow{AM}$, où A est un point fixe du plan ($\mathcal{D}$ est quelconque).

b) $\mathcal{D}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1. $\vec{V}(M) = |OM|^2 \, \vec{V}$ où $\vec{V}$ est un vecteur fixe et $|OM|$ la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Quatrième question

Soit $\vec{V}$ et $\vec{W}$ deux champs de vecteurs ne s'annulant pas sur Γ. On suppose de plus qu' en chaque point M de Γ l'angle non orienté formé par les deux vecteurs $\vec{V}(M)$ et $\vec{W}(M)$ est strictement inférieur à π.

Démontrer sans calculs que : $\alpha(V, \Gamma) = \alpha(W, \Gamma)$

Cinquième question

Soit Φ une application du plan dans lui-même deux fois différentiable. On notera par $M' = \Phi(M)$ l'image de M par Φ. On suppose que pour $|OM| \leqslant 1$ on a $|OM'| \leqslant 1$.

Démontrer qu'il existe un point P tel que $|OP| \leqslant 1$ et $\Phi(P) = P$ (théorème de point fixe). Peut-on généraliser ce résultat ?

[Pour démontrer ce théorème on considèrera les champs $\vec{V}(M) = \overrightarrow{MM'}$ et $\vec{W}(M) = \overrightarrow{MO}$, et on prendra pour $\mathcal{D}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1.]

Sixième question

On utilise la représentation complexe du plan : $z = x + iy$

On associe au vecteur $\vec{V}(M)$, son affixe $Z = X + iY$. On suppose que la fonction f, qui définit le champ de vecteurs $(Z = f(z))$, est une fonction holomorphe.

Montrer que :

$$\alpha(V, \Gamma) = - i \int_\Gamma \frac{f'((z)}{f(z)} dz$$

Calculer cette intégrale.

Ce résultat est-il plus précis que l'assertion démontrée à la deuxième question ?

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 44

On étudie d'abord l'équation intégrale (2), où y est une fonction donnée.

$$(2) \qquad \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!}\, x(t)dt = y(s)$$

Pour que l'équation (2) ait une solution, quelques conditions supplémentaires doivent être vérifiées par y.

Ainsi pour tout $p < n$ $\qquad y^{(p)}(s) = \displaystyle\int_0^s \frac{(s-t)^{n-p}}{(n-p)\,!}\, x(t)dt$ $\qquad$ et

$$y^{(n)}(s) = \int_0^s x(t)dt. \text{ Donc } \quad y^{(n+1)}(s) = x(s).$$

Autrement dit, s'il existe une solution $x \in E$ (espace des fonctions continues réelles), y doit être dérivable jusqu'à l'ordre $(n+1)$. En outre $x = y^{(n+1)}$.

De plus, on dispose de conditions initiales pour y

$$(3) \qquad y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n)}(0) = 0$$

En définitive, si y est $(n+1)$ fois continuement dérivable, et vérifie (3), alors (2) possède une unique solution, donnée par $y^{(n+1)} = x$. C'est le théorème de Cauchy sur l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle d'ordre $(n+1)$.

Si y ne satisfait pas ces conditions, l'équation intégrale (2) ne possède aucune solution x dans E.

On peut interpréter les résultats obtenus. L'équation différentielle, où x est donnée

$$(4) \qquad y^{(n+1)}(s) = x(s)$$

possède comme solution particulière

$$(5) \qquad y(s) = \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n\,!}\, s(t)dt$$

Par suite, la solution générale de l'équation différentielle (4) est une combinaison linéaire de n solutions indépendantes de l'équation homogène

$$y^{(n+1)}(s) = 0$$

et de la solution fournie par (5).

Autrement dit

$$(6) \qquad y(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n + \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} x(t)dt$$

fournit toutes les solutions de (4) lorsque $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

D'ailleurs, on interprète les coefficients

$$y^{(p)}(0) = a_p . p! \qquad 0 \leqslant p \leqslant n \qquad p \text{ entier}$$

D'où l'écriture

$$y(s) = y(0) + sy((0) + \dots + s^n \frac{\overset{(n)}{y}(0)}{n!} + \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} x(t)dt$$

pour la solution de (4). Autrement dit, on a obtenu la formule de Taylor pour y, mise sous forme de reste de Lagrange pour une fonction (n+1) fois continuement dérivable :

$$\boxed{y(s) = y(0) + sy'(0) + \dots + s^n \frac{\overset{(n)}{y}(0)}{n!} + \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} y^{(n+1)}(t)dt}$$

En ce qui concerne l'équation (1)

$$x(s) = \int_0^s \frac{(s-t)^n}{n!} x(t)dt$$

toute solution, dans E, doit vérifier $x^{(n+1)}(s) = x(s)$ et $x(0) = \dots = x(0) = \dots = x^{(n)}(0) = 0$. Le théorème de Cauchy sur les équations différentielles assure que la seule solution dans E est alors $x \equiv 0$. On pourrait aussi bien envisager le résultat acquis dans le cours, avec l'équation intégrale de Volterra et le théorème du point fixe, pour conclure $x \equiv 0$.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 45

1ère question : Soit (E, d) un espace métrique α-chaînable. On a posé

$$\delta(x, y) = \text{Inf} \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i, x_{i-1}) \qquad x_0 = x \ ; \ x_{n+1} = y$$

a) $\delta(x, y) \geqslant 0$

b) $\delta(x, y) = 0$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$$x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} = y \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i, x_{i-1}) \leqslant \varepsilon$$

Or $d(x, y) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i, x_{i-1})$. Donc $d(x, y) \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Autrement dit $d(x, y) = 0$, soit $x = y$.

c) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ comme on le constate facilement en utilisant

$$d(x, y) = d(y, x)$$

d) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. puisqu'une α-chaîne de x à y et une α-chaîne de y à z fournit une α-chaîne de x à z.

2ème question : Montrons que (E, δ) est un espace complet. Soit $\{x^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans (E, δ). Comme $d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$, on en déduit que $\{x^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans (E, d). Or, cet espace métrique est complet. Donc $\{x^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ converge, au sens de la métrique d, vers $x \in E$.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} d(x^{(n)}, x) = 0$. Il existe donc N et pour tout $n \geqslant N$, $d(x^{(n)}, x) < \alpha$. Dès lors, $\delta(x^{(n)}, x) < d(x^{(n)}, x)$ pour tout $n \geqslant N$. Donc

$\lim\limits_{n\to\infty} \delta(x^{(n)}, x) = 0$. Autrement dit $x^{(n)}$ converge vers x au sens de la métrique δ. Donc (E, δ) est un espace métrique complet.

Soit $f : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe $0 < k < 1$ et pour tous x, y de E

$$d(x, y) < \alpha \quad \text{implique} \quad d(f(x), f(y)) \leqslant k \ d(x, y)$$

On a pour une α-chaîne joignant x à y

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + \dots + d(f(x_n), f(y))$$

Mais par hypothèse

$$d(f(x_i), f(x_{i+1})) \leqslant k \; d(x_i, x_{i+1})$$

Soit

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant k \; (d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_n, y))$$

En passant à la limite inférieure

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant k \; \delta(x, y)$$

Autrement dit $f : E \longrightarrow E$ est k-contractante sur (E, δ), espace métrique complet. Il existe un unique point fixe pour f d'après le théorème des approximations successives de Picard.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 46

Pour fixer les idées, nous supposons que les coefficients de la matrice $[A]$ sont réels mais le cas de coefficients complexes est analogue. Puisque l'inégalité est stricte dans l'énoncé, on a $a_{ii} > 0$.

Posons $[D]$, la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de $[A]$, à savoir $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. $[I]$ désigne la matrice identité. On pose $[B] = [I] - [D]^{-1} [A]$.

On pose aussi $k = \underset{i=1,2,\dots,n}{\operatorname{Max}} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$ où $[b_{ij}] = [B]$

Soit $b_{ij} = \delta_{ij} - \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$

On constate, grâce à l'énoncé, que $0 < k < 1$.

Soit y un vecteur fixe de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = [B] \, x + y$

Sur $\mathbb{R}^n$, définissons une distance $d(x, y) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} (|x_i - y_i|)$

L'application f est k-contractante puisque

$$f(x) - f(z) = [B] (x-z) \quad \text{soit} \quad d(f(x), f(z)) \leqslant k \; d(x, z)$$

Le théorème des approximations successives de Picard assure que f possède un unique point fixe x.

C'est-à-dire

$$x = [B] x + y$$

Autrement dit la matrice $[I] - [B]$ est inversible ; c'est-à-dire la matrice $[D]^{-1} [A]$, ou encore la matrice $[A]$, ce qui termine la démonstration.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 47.

Voici quelques contre-exemples.

1°) L'application 1/2-contractante $x \longrightarrow \frac{x}{2}$ définie sur l'espace métrique non complet $]0, \infty[$ pour la distance usuelle ne possède pas de point fixe dans cet espace.

2°) L'application $f : x \longrightarrow x + \frac{1}{x}$ définie sur l'espace métrique complet $[1, \infty[$ pour la distance usuelle, satisfait

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \qquad \forall x,y \in [1,\infty[$$

Cependant elle ne possède pas de point fixe.

3°) (E,d) métrique complet ; $f : x \longrightarrow x$ possède plus de deux points fixes dès que E a plus de deux éléments. Elle satisfait bien sûr

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y) \qquad \forall x,y$$

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 48

1°) On va d'abord montrer que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ reste bornée supérieurement dans un voisinage d'un point a quelconque de Ω. En fait, on s'arrange pour choisir un voisinage qui s'écrive comme enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

On peut prendre une boule fermée $B(a,r)$, de centre a et de rayon $r > 0$, incluse dans Ω. Pour fixer les idées, nous allons supposer que la norme $\|.\|$ choisie sur l'espace vectoriel normé réel de dimension finie E soit associée à une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de la façon suivante

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \quad ; \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Soit x un point quelconque de $B(a, r)$. On pose $\theta = \frac{\|x-a\|}{r}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Appelons x' le point de la frontière de $B(a, r)$ défini par

$$x' = a + \frac{x-a}{\theta} \qquad (\text{si } \theta \neq 0, \text{ et } |x'-a| = r \text{ sans plus si } \theta = 0)$$

On écrit alors x comme combinaison convexe de a et de x'

$$x = (1-\theta)a + \theta x' \qquad \text{valable pour } 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

En outre $x' - a = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ et $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = r$ grâce au choix de la norme

L'idée consiste à écrire x' comme une combinaison convexe de n points, choisis parmi $2n$ points fixés de $B(a, r)$.

On définit $b_i^+ = a + re_i$; $i = 1, \ldots, n$

et $b_i^- = a - e_i$; $i = 1, \ldots, n$

On pose $a_i = a + r(\text{sgn}\, \beta_i)\, e_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$ où $\text{sgn}\, \beta_i = 1$ si $\beta_i \geqslant 0$ et $\text{sgn}\, \beta_i = -1$ si $\beta_i < 0$. Les $\{a_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sont choisis parmi les b_j^+ et b_j^- ; $j = 1, \ldots, n$.

On définit aussi $\alpha_i = \frac{|\beta_i|}{r}$

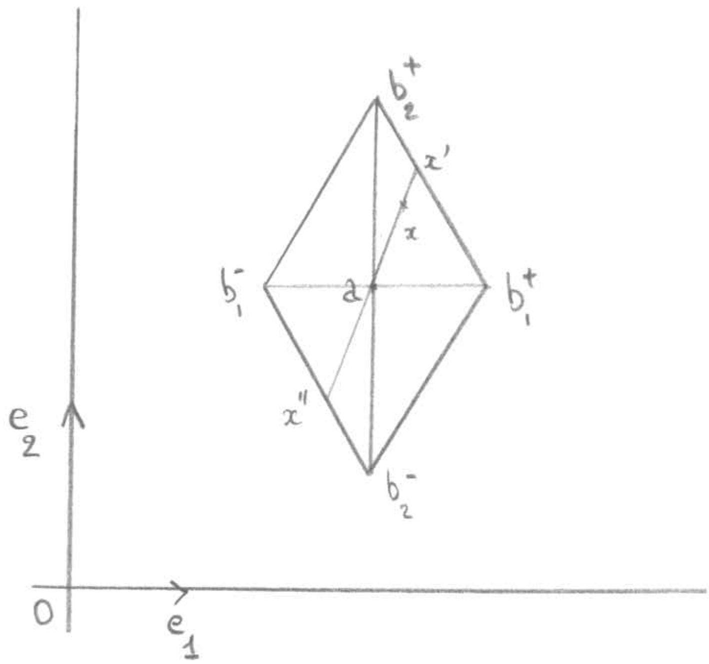
On note $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, et $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$. En outre

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)a + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i = a + x' - a$$

$$= x'$$

On a donc obtenu x' comme une combinaison convexe des b_i^+ et b_i^-, points fixés de $B(a, r)$.

En dimension 2, on a le dessin suivant :



Revenons à la fonction convexe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) \leqslant (1 - \theta)f(a) + \theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, f(a_i)$$

Posons $M = \text{Sup}\,(f(a), f(b_1^+), f(b_1^-), \ldots, f(b_n^+), f(b_n^-))$. Il vient

$$f(x) \leqslant (1 - \theta)M + \theta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, M = (1 - \theta)M + \theta M = M$$

Par suite f est bornée supérieurement par M dans tout $B(a, r) \subset \Omega$ et

$$M = \sup_{x \in \mathbf{B}(a,r)} f(x)$$

2°) Montrons maintenant que la fonction f est continue au point a :
On utilise d'abord $x = (1-\theta)a + \theta x'$ et la convexité de f pour obtenir

$$f(x) \leqslant (1 - \theta)\, f(a) + \theta\, f(x')$$

Ce qui fournit une première majoration

$$f(x) - f(a) < \theta(M - f(a))$$

Puis on définit $x'' = a - (x' - a)$ et on écrit a comme combinaison convexe de x et x''

$$a = \frac{x}{1+\theta} + \frac{\theta}{1+\theta} x'' \qquad 0 < \frac{1}{1+\theta} \leqslant 1 \quad ; \quad 0 \leqslant \frac{\theta}{1+\theta} \leqslant 1$$

Donc

$$f(a) \leqslant \frac{f(x)}{1+\theta} + \frac{\theta}{1+\theta} f(x'') \leqslant \frac{f(x)}{1+\theta} + \frac{\theta M}{1+\theta}$$

Soit une minoration cette fois :

$$f(x) - f(a) \geqslant \theta(f(a) - M)$$

Finalement, en revenant à $\theta = \dfrac{\|x-a\|}{r}$

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{\|x-a\|}{r} (M - f(a))$$

et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; ce qui implique la continuité de f en a, pour tout a de r. Le comportement en $\|x-a\|$, puisque $\dfrac{M-f(a)}{r}$ ne dépend que de $B(a, r)$ suggère une propriété plus forte.

3°) Finalement, le caractère lipschitzien local se montre de la façon suivante :

On suppose que $B(a,2r)$ une boule fermée de centre a et de rayon $2r$ est incluse dans r. La fonction f est continue sur $B(a, 2r)$ donc est bornée supérieurement et inférieurement sur $B(a, 2r)$ (théorème de Heine). Grâce à la continuité, on dispose donc d'un renseignement supplémentaire qui n'était pas clair auparavant.

On pose :

$$M = \operatorname*{Sup}_{x \in B(a,2r)} f(x)$$

$$m = \operatorname*{Inf}_{x \in B(a,2r)} f(x)$$

On prend alors la boule fermée de centre a et de rayon r, notée $B(a, r)$. Pour deux points quelconques x et y de $B(a, r)$, on dispose de la relation

$$y = \frac{r}{r+\|y-x\|} x + \frac{\|y-x\|}{r+\|y-x\|} y' \quad \text{où} \quad y' = y + \frac{r}{\|y-x\|}(y-x)$$

Mais y' appartient à $B(a,2r)$ puisque $\|y'-a\| \leq \|y-a\| + r < 2r$ de sorte que de l'inégalité de convexité

$$f(y) \leqslant \frac{r}{r+\|y-x\|} f(x) + \frac{\|y-x\|}{r+\|y-x\|} f(y')$$

On déduit

$$f(y)-f(x) \leqslant \frac{\|y-x\|}{r+\|y-x\|}\,(f(y')-f(x)) \leqslant \|y-x\|\,\frac{M-m}{r}$$

Par symétrie du rôle de y et x, dans B(a, r), on a bien l'inégalité

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \|y-x\|\alpha$$

où α ne dépend que de a et de r. Ce qui termine la démonstration.

CORRIGE DE L'EXERCICE N° 49.

Première question :

On note (x, y) les coordonnées du point M et (X, Y) les coordonnées du vecteur $\vec{V}(M)$. X et Y sont des fonctions de x et y.

Soit φ l'angle que fait le vecteur $\vec{V}(M)$ avec l'axe Ox. par exemple :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X}$$

ou encore

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$$

et donc

$$d\varphi = \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = \left(\frac{X\frac{\partial Y}{\partial x} - Y\frac{\partial X}{\partial x}}{X^2+Y^2}\right)dx + \left(\frac{X\frac{\partial Y}{\partial y} - Y\frac{\partial X}{\partial y}}{X^2+Y^2}\right)dy$$

Notons que, alors que φ n'est défini qu'à 2π près, $d\varphi$ est partout défini de façon univoque sauf si le vecteur $\vec{V}(M)$ s'annule.

La rotation du champ $\vec{V}$ le long de Γ s'exprime sans ambiguité par la formule

$$\alpha(V,\Gamma) = \int_\Gamma d\varphi = \int_\Gamma \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}$$

Deuxième question : Si les fonctions

$$P = \frac{X\frac{\partial Y}{\partial x} - Y\frac{\partial X}{\partial x}}{X^2+Y^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{X\frac{\partial Y}{\partial y} - Y\frac{\partial X}{\partial y}}{X^2+Y^2}$$

sont continues et possèdent des dérivées partielles continues dans le domaine $\mathcal{D}$, on peut appliquer la formule de Riemann. Les conditions sont réalisées si $\vec{V}$ ne s'annule jamais dans $\mathcal{D}$ car alors $X^2 + Y^2$ ne s'annule pas dans $\mathcal{D}$, et on a supposé que les fonctions X et Y sont deux fois continûment différentiables.

Dans ce cas, on a :

$$\alpha\,(V,\Gamma) = \int_\Gamma \left(\frac{X}{X^2+Y^2}\, dY - \frac{Y}{X^2+Y^2}\, dX\right)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{Y^2-X^2}{X^2+Y^2}\, dx \wedge dy - \frac{X^2-Y^2}{X^2+Y^2}\, dy \wedge dx\right) = 0$$

Donc si $\vec{V}(M)$ ne s'annule pas dans le domaine $\mathcal{D}$, $\alpha\,(V,\Gamma)$ est nulle.

On en déduit que si la rotation $\alpha\,(V,\Gamma)$ n'est pas nulle, le champ de vecteurs $\vec{V}$ s'annule dans le domaine $\mathcal{D}$.

Si le champ de vecteurs $\vec{V}$ s'annule dans le domaine $\mathcal{D}$, on ne peut rien affirmer a priori sur la rotation $\alpha\,(V,\Gamma)$. Elle peut être nulle dans certains cas comme nous le verrons sur un exemple à la question suivante (3b).

Troisième question :

a- On voit immédiatement que :

si A est intérieur à la courbe Γ (appartient à $\mathcal{D}$), la rotation $\alpha\,(V,\Gamma)$ est égale à 2π , et le champ $\vec{V}$ s'annule dans $\mathcal{D}$;

si A est extérieur à Γ (n'appartient pas à $\mathcal{D}$) la rotation $\alpha\,(V,\Gamma)$ est nulle, et le champ $\vec{V}$ ne s'annule pas dans $\mathcal{D}$.

b-Puisque $\vec{V}$ garde une direction fixe le long de Γ , $\alpha(V,\Gamma) = 0$.
Pourtant le champ $\vec{V}$ s'annule en 0, point appartenant à $\mathcal{D}$.

Quatrième question :

Soit $\vec{U}(M)$ un vecteur unitaire faisant avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ l'angle orienté :

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \vec{U}(M)\right) = \left(\vec{V}(M), \vec{W}(M)\right)$$

Ce vecteur est bien défini pour tous les points de Γ .

On a évidemment :

$$\alpha(W,\Gamma) = \alpha(V,\Gamma) + \alpha(U,\Gamma)$$

Par suite des hypothèses faites le vecteur $\vec{U}(M)$ ne prend jamais la direction opposée à la direction $\overrightarrow{Ox}$, la rotation du champ U le long de Γ est donc nulle.

On a donc :

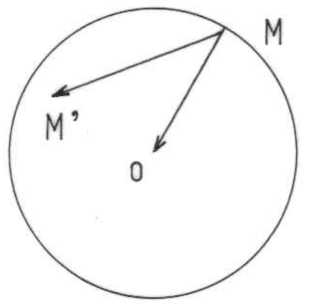
$$\alpha(W,\Gamma) = \alpha(V,\Gamma)$$

Cinquième question : Γ est la circonférence du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Si le champ de vecteurs $\vec{V}$ s'annule sur la circonférence Γ , cela exprime qu'il existe un point P de Γ $(|OP|=1)$ tel que $\overrightarrow{PP'} = 0$, c'est-à-dire que $P = \Phi(P)$, la propriété est donc vérifiée.

Supposons maintenant que $\vec{V}$ ne s'annule pas sur Γ . Puisque le vecteur $\overrightarrow{MO}$ est la normale intérieure à la circonférence Γ et que le point M' est intérieur à $\mathcal{D}$, l'angle que font les deux vecteurs $\vec{V}(M)$ et $\vec{W}(M)$ en M est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Les hypothèses faites en 4 sont vérifiées.
Or la rotation du champ $\vec{W}$ est facile à calculer : $\alpha(W,\Gamma) = 2\pi$

donc $\alpha(V,\Gamma) = 2\pi$



Ceci prouve que le champ $\vec{V}$ s'annule dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire qu'il existe un point P de $\mathcal{D}$ tel que $P = \Phi(P)$.

La proposition est complètement démontrée.

<u>Sixième question</u> : écrivons le cas où f est une fonction holomorphe

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{dZ}{Z} = \frac{\overline{Z}\,dZ}{|Z|^2} = \frac{(X-iY)(dX+idY)}{X^2+Y^2}$$

$$= \frac{X\,dX+Y\,dY}{X^2+Y^2} + i\,\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}$$

et

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\Gamma d(\mathrm{Log}(X^2+Y^2)) + i\int_\Gamma \frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}$$

Comme :

$$\int_\Gamma d(\mathrm{Log}(X^2+Y^2)) = 0$$

On voit que :

$$\alpha(V,\Gamma) = -i\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

Puisque f est holomorphe dans le domaine $\mathscr{D}$, la fonction $\frac{f'}{f}$ ne peut avoir dans $\mathscr{D}$ que des pôles qui correspondent aux zéros de f.

Soit a un point où f s'annule. On a :

$$f(z) = (z-a)^n\, g(z)$$

où $g(Z)$ est une fonction holomorphe ne s'annulant pas en a.

Alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{n}{z-a}$$

Puisque $g(Z)$ ne s'annule pas en a, on voit que la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ possède en a un pôle simple de résidu n, n étant la multiplicité du zéro de f en a.

On obtient donc :

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2i\pi N$$

où N est le nombre de zéros de f dans $\mathscr{D}$, chacun étant compté suivant son ordre de multiplicité.

Et la rotation vaut :

$$\alpha(V,\Gamma) = 2N\pi$$

Comme il est équivalent de dire que $\overrightarrow{V}$ s'annule ou que f s'annule, on voit que dans le cas où le champ $\overrightarrow{V}$ est défini par une fonction holomorphe, la rotation est nulle si et seulement si le champ ne s'annule pas dans $\mathcal{D}$. On obtient un résultat plus fin que dans la question 2. On vérifie facilement que le contre-exemple construit à la question 3 ne correspond pas au cas holomorphe.

Remarque : à la cinquième question, nous avons démontré qu'une application continue et deux fois différentiable du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, admet nécessairement un point fixe.

On peut, en fait, obtenir un résultat beaucoup plus général et dû à Brouwer (théorème du point fixe).

Théorème : Une application continue, conservant la boule unité de $\mathbb{R}^n$, admet toujours un point fixe.

Nous allons démontrer ce théorème dans le cas du plan $\mathbb{R}^2$ en utilisant les résultats de ce problème (il existe des démonstrations moins contournées de ce théorème).

Nous avons besoin d'un lemme préliminaire d'approximation dont nous ne ferons qu'esquisser la démonstration.

Lemme : Soit Φ une application continue du cercle unité dans lui-même. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue ϕ , deux fois différentiable du cercle unité dans lui-même, telle que

$$\sup_{M \in D} \| \Phi(M) - \phi(M) \| < \varepsilon$$

D désigne le cercle unité du plan $\mathbb{R}^2$ et $\| \ \|$ une norme quelconque sur le plan $\mathbb{R}^2$.

Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ les composantes de l'application de Φ dans D . P et Q sont des fonctions continues, définies sur D à valeurs réelles. Par analogie avec ce que nous avons vu à plusieurs reprises (procédé de régularisation par convolution ou théorème de Weierstrass)*, le lecteur admettra qu'il existe des fonctions p et q suffisamment régulières, disons deux fois continûment différentiables telles que :

$$\sup_{(x,y) \in D} | P(x,y) - p(x,y) | < \varepsilon/2$$

* Voir par exemple Nanta Iremica, Vol N° 11.

et $$\sup_{(x,y)\in D} |Q(x,y) - q(x,y)| < \varepsilon/2$$

La fonction $\Phi : (x,y) \longrightarrow (p(x,y), q(x,y))$ vérifie bien

$\sup_{M} \|\Phi(M) - \phi(M)\| < \varepsilon$ ou $\|(x,y)\| = |x| + |y|$ par exemple

ϕ conviendrait si ϕ appliquait D dans lui-même. Ce n'est pas vrai en général, mais visiblement Φ applique D dans le cercle de centre 0 et de rayon $(1+\varepsilon)$. Faisons suivre alors Φ par une homothétie de rapport $\frac{1}{1+\varepsilon}$, on obtient bien une fonction convenable comme il est facile de le vérifier.

Dès lors, appelons Φ_n une fonction appliquant D dans D, deux fois continûment différentiables et telle que

$$\sup_{M\in D} \|\Phi(M) - \Phi_n(M)\| < \frac{1}{n}$$

Grâce à la cinquième question, il existe au moins un point M_n tel que M_n appartienne à D et qui soit point fixe de Φ_n.

Mais la famille des points M_n est une suite bornée dans $\mathbb{R}^2$, donc on peut en extraire une sous-suite, notée M_{n_k} telle que M_{n_k} converge vers un point M de D (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Montrons que M est un point fixe de Φ. On majore $\|\Phi(M) - M\|$ selon

$$\|\Phi(M) - M\| \leqslant \|\Phi(M) - \Phi(M_{n_k})\| + \|\Phi(M_{n_k}) - \Phi_{n_k}(M_{n_k})\|$$

$$+ \|\Phi_{n_k}(M_{n_k}) - M_{n_k}\| + \|M_{n_k} - M\|$$

$$\leqslant \|\Phi(M) - \Phi(M_{n_k})\| + \frac{1}{n_k} + \|M_{n_k} - M\|$$

Grâce à la continuité de Φ, $\lim_{k\to\infty} \|\Phi(M) - \Phi(M_{n_k})\| = 0$ et $\lim_{k\to\infty} \|M_{n_k} - M\|$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on aura $\|\Phi(M) - M\| < \varepsilon$. Soit $\Phi(M) = M$, ce qu'il fallait démontrer.

TABLE DES MATIERES

.../...