IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

NANTA IREMICA N° 4

Histoire et Philosophie des sciences

Étude épistémologique et historique des idées de nombre, de mesure et de continu

Tome 2

Jean DHOMBRES

1977

UNIVERSITE DE NANTES

I. R. E. M. DE NANTES

ETUDE EPISTEMOLOGIQUE ET HISTORIQUE

Jean DHOMBRES

U.E.R. DE MATHEMATIQUES

Directeur de l'I. R. E. M. de Nantes

NANTA IREMICA

VOLUME 4

UNIVERSITE DE NANTES

I.R.E.M. DE NANTES

ETUDE EPISTEMOLOGIQUE ET HISTORIQUE DES IDEES DE NOMBRE DE MESURE ET DE CONTINU

Jean DHOMBRES

U.E.R. de Mathématiques

Directeur de l'I.R.E.M. de Nantes

NANTA IREMICA

VOLUME 4

NANTA IREMICA

Les volumes de la collection Nanta Iremica sont écrits pour les Enseignants à partir d'un travail critiqué et testé par des équipes organisées dans le cadre de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Académie de Nantes.

Qu'on ne se méprenne surtout pas en imaginant que cette phase critique fasse des ouvrages de Nanta Iremica des textes de référence définitifs. La critique collective, si elle élimine des erreurs, si elle organise plus rationnellement le plan d'un texte, si elle l'adapte mieux aux besoins des lecteurs en gommant les lubies et manies de l'auteur, ne saurait fournir un brevet de valeur assurée. Que le lecteur garde tout son esprit critique, l'aiguise même. Les textes de Nanta Iremica n'ont aucun caractère contraignant et ne sont imposés par aucune hiérarchie. Tels qu'ils sont, ils représentent une étape, certes figée par le texte, de l'activité pédagogique et mathématique d'une Académie. Mais les modes, les goûts et les connaissances évoluent et les étapes se succèdent.

Dans cette collection, il y a place pour des textes d'information mathématique, place pour des recueils commentés de problèmes et place pour des progressions analysées de telle ou telle classe de l'Enseignement, en particulier l'enseignement dans les classes littéraires ou les classes professionnelles, défavorisées du point de vue mathématique.

Il y a aussi place pour des documents qui ne font pas partie de la panoplie usuelle des gadgets du mathématicien moyen. Par exemple des documents d'épistémologie mathématique, par exemple des documents de docimologie, par exemple des synthèses sur les différentes réformes des mathématiques dans le monde, par exemple puisque tout individu a échoué, échoue ou échouera sur un problème mathématique, des réflexions sur l'échec en mathématiques.

J. DHOMBRES
Directeur de l'I.R.E.M.
de NANTES

LISTE DES DOCUMENTS

Ces documents se trouvent réunis dans le tome 2 .

AUTRES PUBLICATIONS DE LA COLLECTION

NANTA - IREMICA

(Parues ou à paraître)

Volume N° 1	Introduction à la logique	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 2	Introduction à la Théorie des Ensembles	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 3	Etude épistémologique et historique de la notion de nombre réel et de mesure des grandeurs	Jean DHOMBRES
Volume N° 4	Documents relatifs au Volume N° 3	Jean DHOMBRES
Volume N° 5	Le langage BASIC	M. BELHACHE
Volume N° 6	Echec en Mathématiques	A. BIGARD
Volume N° 7	Eléments d'Analyse Fonctionnelle	Jean DHOMBRES
Volume N° 8	Algèbre linéaire et Géométrie vectorielle	R. SEROUX
Volume N° 9	Méthode Mathématiques Modernes utilisées en Théorie de l'approximation	Jean DHOMBRES
Volume N° 10	Analyse	Melle VENARD Jean DHOMBRES
Volume N° 11	Le langage PL/I	M. BELHACHE

Pour se procurer ces livres s'adresser à :

I.R.E.M de NANTES

Université de Nantes

38, boulevard Michelet

BP 1044 44037 NANTES-CEDEX

LISTE DES DOCUMENTS

DOCUMENT N° 1

EXTRAITS DU DIALOGUE

LE MENON

DE PLATON

Reprise de la discussion : comment trouver une chose dont on ne sait rien ?

MÉNON. — Mais comment vas-tu t'y prendre, Socrate, pour chercher une chose dont tu ne sais absolument pas ce qu'elle est ? Quel point particulier, entre tant d'inconnus, proposeras-tu à ta recherche ? Et à supposer que tu tombes par hasard sur le bon, à quoi le reconnaîtras-tu, puisque tu ne le connais pas ?

SOCRATE. — Je vois ce que tu veux dire, Ménon. Quel beau sujet de dispute sophistique tu nous apportes là ! C'est la théorie selon laquelle on ne peut chercher ni ce qu'on connaît ni ce qu'on ne connaît pas : ce qu'on connaît, parce que, le connaissant, on n'a pas besoin de le chercher ; ce qu'on ne connaît pas, parce qu'on ne sait même pas ce qu'on doit chercher.

MÉNON. — N'est-ce pas là, Socrate, un raisonnement assez fort ?

ΜΕΝ. Καὶ τίνα τρόπον ζητήσεις, ὦ Σώκρατες, τοῦτο ὃ μὴ οἶσθα τὸ παράπαν ὅ τί ἐστιν ; Ποῖον γὰρ ὧν οὐκ οἶσθα προθέμενος ζητήσεις ; Ἢ εἰ καὶ ὅ τι μάλιστα ἐντύχοις αὐτῷ, πῶς εἴσει ὅτι τοῦτό ἐστιν ὃ σὺ οὐκ ᾔδησθα ;

ΣΩ. Μανθάνω οἷον βούλει λέγειν, ὦ Μένων. Ὁρᾷς τοῦτον ὡς ἐριστικὸν λόγον κατάγεις, ὡς οὐκ ἄρα ἔστιν ζητεῖν ἀνθρώπῳ οὔτε ὃ οἶδεν οὔτε ὃ μὴ οἶδεν ; Οὔτε γὰρ ἂν ὅ γε οἶδεν ζητοῖ· οἶδεν γάρ, καὶ οὐδὲν δεῖ τῷ γε τοιούτῳ ζητήσεως· οὔτε ὃ μὴ οἶδεν· οὐδὲ γὰρ οἶδεν ὅ τι ζητήσει.

ΜΕΝ. Οὐκοῦν καλῶς σοι δοκεῖ λέγεσθαι ὁ λόγος οὗτος, ὦ Σώκρατες ;

SOCRATE. — Ce n'est pas mon avis.

MÉNON. — Peux-tu me dire par où il péche ?

SOCRATE. — Oui. J'ai entendu des hommes et des femmes habiles dans les choses divines...

MÉNON. — Que disaient-ils ?

SOCRATE. — Des choses vraies, à mon avis, et belles.

MÉNON. — Quelles choses ? Et qui sont-ils ?

Théorie de la réminiscence.

SOCRATE. — Ce sont des prêtres et des prêtresses ayant à cœur de pouvoir rendre raison des fonctions qu'ils remplissent ; c'est Pindare encore, et d'autres poètes en grand nombre, tous ceux qui sont vraiment divins . Et voici ce qu'ils disent : examine si leur langage te paraît juste.

Ils disent donc que l'âme de l'homme est immortelle, et que tantôt elle sort de la vie, ce qu'on appelle mourir, tantôt elle y rentre de nouveau, mais quelle n'est jamais détruite ; et que, pour cette raison, il faut dans cette vie tenir jusqu'au bout une conduite aussi sainte que possible ;

Car ceux qui ont à Perséphone, pour leurs anciennes fautes,
Payé la rançon, de ceux-là vers le soleil d'en haut, à la neuvième année,
Elle renvoie de nouveau les âmes,
Et, de ces âmes, les rois illustres,
Les hommes puissants par la force ou grands par la science
S'élèvent, qui à jamais comme des héros sans tache sont honorés parmi les mortels .

Ainsi l'âme, immortelle et plusieurs fois renaissante, ayant contemplé toutes choses, et sur la terre et dans l'Hadès, ne peut manquer d'avoir tout appris. Il n'est donc pas surprenant qu'elle ait, sur la vertu et sur le reste, des souvenirs de ce qu'elle en a su précédemment. La nature entière étant homogène et l'âme ayant tout appris, rien n'empêche qu'un seul

ΣΩ. Οὐκ ἔμοιγε.

ΜΕΝ. Ἔχεις λέγειν ὅπῃ ;

ΣΩ. Ἔγωγε· ἀκήκοα γὰρ ἀνδρῶν τε καὶ γυναικῶν σοφῶν περὶ τὰ θεῖα πράγματα —

ΜΕΝ. Τίνα λόγον λεγόντων ;

ΣΩ. Ἀληθῆ, ἔμοιγε δοκεῖν, καὶ καλόν.

ΜΕΝ. Τίνα τοῦτον, καὶ τίνες οἱ λέγοντες ;

ΣΩ. Οἱ μὲν λέγοντές εἰσι τῶν ἱερέων τε καὶ τῶν ἱερειῶν ὅσοις μεμέληκε περὶ ὧν μεταχειρίζονται λόγον οἵοις τ' εἶναι διδόναι· λέγει δὲ καὶ Πίνδαρος καὶ ἄλλοι πολλοὶ τῶν ποιητῶν, ὅσοι θεῖοί εἰσιν. Ἃ δὲ λέγουσι, ταυτί ἐστιν· ἀλλὰ σκόπει εἴ σοι δοκοῦσιν ἀληθῆ λέγειν.

Φασὶ γὰρ τὴν ψυχὴν τοῦ ἀνθρώπου εἶναι ἀθάνατον, καὶ τοτὲ μὲν τελευτᾶν, ὃ δὴ ἀποθνῄσκειν καλοῦσι, τοτὲ δὲ πάλιν γίγνεσθαι, ἀπόλλυσθαι δ' οὐδέποτε· δεῖν δὴ διὰ ταῦτα ὡς ὁσιώτατα διαβιῶναι τὸν βίον·

οἷσι γὰρ ἂν Φερσεφόνα ποινὰν παλαιοῦ πένθεος
δέξεται, εἰς τὸν ὕπερθεν ἅλιον κείνων ἐνάτῳ ἔτει
ἀνδιδοῖ ψυχὰς πάλιν, ἐκ τᾶν βασιλῆες ἀγαυοὶ
καὶ σθένει κραιπνοὶ σοφίᾳ τε μέγιστοι
ἄνδρες αὔξοντ'· ἐς δὲ τὸν λοιπὸν χρόνον
ἥρωες ἁγνοὶ πρὸς ἀνθρώπων καλεῦνται.

Ἅτε οὖν ἡ ψυχὴ ἀθάνατός τε οὖσα καὶ πολλάκις γεγονυῖα, καὶ ἑωρακυῖα καὶ τὰ ἐνθάδε καὶ τὰ ἐν Ἅιδου [καὶ] πάντα χρήματα, οὐκ ἔστιν ὅ τι οὐ μεμάθηκεν· ὥστε οὐδὲν θαυμαστὸν καὶ περὶ ἀρετῆς καὶ περὶ ἄλλων οἷόν τ' εἶναι αὐτὴν ἀναμνησθῆναι, ἅ γε καὶ πρότερον ἠπίστατο. Ἅτε γὰρ τῆς φύσεως ἁπάσης συγγενοῦς οὔσης, καὶ μεμαθηκυίας τῆς ψυχῆς ἅπαντα, οὐδὲν κωλύει ἓν μόνον ἀναμνηressouvenir (c'est ce que les hommes appellent savoir) lui fasse retrouver tous les autres, si l'on est courageux et tenace dans la recherche; car la recherche et le savoir ne sont au total que réminiscence.

Il ne faut donc pas en croire ce raisonnement sophistique dont nous parlions : il nous rendrait paresseux, èt ce sont les lâches qui aiment à l'entendre. Ma croyance au contraire exhorte au travail et à la recherche : c'est parce que j'ai foi en sa vérité que je suis résolu à chercher avec toi ce qu'est la vertu.

MÉNON. — Soit, Socrate. Mais qu'est-ce qui te fait dire que nous n'apprenons pas et que ce que nous appelons le savoir est une réminiscence? Peux-tu me prouver qu'il en est ainsi?

Vérification de la théorie par l'interrogation d'un esclave.

SOCRATE. — Je t'ai déjà dit, Ménon, que tu étais plein de malice. Voici maintenant que tu me demandes une leçon, à moi qui soutiens qu'il n'y a pas d'enseignement, qu'il n'y a que des réminiscences : tu tiens à me mettre tout de suite en contradiction manifeste avec moi-même.

MÉNON. — Nullement, Socrate, par Zeus! Je n'avais pas le moins du monde cette intention, et c'est seulement l'habitude qui m'a fait parler ainsi. Mais enfin, si tu as quelque moyen de me faire voir la chose, montre-la moi.

SOCRATE. — Ce n'est pas facile; j'y mettrai cependant tout mon zèle, par amitié pour toi. — Appelle un de ces nombreux serviteurs qui t'accompagnent, celui que tu voudras, afin que par lui je te montre ce que tu désires.

MÉNON. — A merveille. (*S'adressant à un esclave*) Approche.

SOCRATE. — Est-il Grec? Sait-il le grec?

MÉNON. — Parfaitement; il est né chez moi.

SOCRATE. — Fais attention : vois s'il a l'air de se souvenir, ou d'apprendre de moi.

MÉNON. — J'y ferai attention.

SOCRATE (*à l'esclave*). — Dis-moi, mon ami, sais-tu que cet espace est carré?

L'ESCLAVE. — Oui.

σθέντα, ὃ δὴ μάθησιν καλοῦσιν ἄνθρωποι, τἆλλα πάντα αὐτὸν ἀνευρεῖν, ἐάν τις ἀνδρεῖος ᾖ καὶ μὴ ἀποκάμνῃ ζητῶν· τὸ γὰρ ζητεῖν ἄρα καὶ τὸ μανθάνειν ἀνάμνησις ὅλον ἐστίν.

Οὔκουν δεῖ πείθεσθαι τούτῳ τῷ ἐριστικῷ λόγῳ· οὗτος μὲν γὰρ ἂν ἡμᾶς ἀργοὺς ποιήσειεν καὶ ἔστιν τοῖς μαλακοῖς τῶν ἀνθρώπων ἡδὺς ἀκοῦσαι, ὅδε δὲ ἐργατικούς τε καὶ ζητητικοὺς ποιεῖ· ᾧ ἐγὼ πιστεύων ἀληθεῖ εἶναι ἐθέλω μετὰ σοῦ ζητεῖν ἀρετὴ ὅ τι ἔστιν.

ΜΕΝ. Ναί, ὦ Σώκρατες. Ἀλλὰ πῶς λέγεις τοῦτο, ὅτι οὐ μανθάνομεν, ἀλλὰ ἣν καλοῦμεν μάθησιν ἀνάμνησίς ἐστιν; Ἔχεις με τοῦτο διδάξαι ὡς οὕτως ἔχει;

ΣΩ. Καὶ ἄρτι εἶπον, ὦ Μένων, ὅτι πανοῦργος εἶ, καὶ νῦν ἐρωτᾷς εἰ ἔχω σε διδάξαι, ὃς οὔ φημι διδαχὴν εἶναι ἀλλ' ἀνάμνησιν, ἵνα δὴ εὐθὺς φαίνωμαι αὐτὸς ἐμαυτῷ τἀναντία λέγων.

ΜΕΝ. Οὐ μὰ τὸν Δία, ὦ Σώκρατες, οὐ πρὸς τοῦτο βλέψας εἶπον, ἀλλ' ὑπὸ τοῦ ἔθους· ἀλλ' εἴ πώς μοι ἔχεις ἐνδείξασθαι ὅτι ἔχει ὥσπερ λέγεις, ἔνδειξαι.

ΣΩ. Ἀλλ' ἔστι μὲν οὐ ῥᾴδιον, ὅμως δὲ ἐθέλω προθυμηθῆναι σοῦ ἕνεκα. Ἀλλά μοι προσκάλεσον τῶν πολλῶν ἀκολούθων τουτωνὶ τῶν σαυτοῦ ἕνα, ὅντινα βούλει, ἵνα ἐν τούτῳ σοι ἐπιδείξωμαι.

ΜΕΝ. Πάνυ γε. Δεῦρο πρόσελθε.

ΣΩ. Ἕλλην μέν ἐστι καὶ ἑλληνίζει;

ΜΕΝ. Πάνυ γε σφόδρα, οἰκογενής.

ΣΩ. Πρόσεχε δὴ τὸν νοῦν ὁπότερ' ἄν σοι φαίνηται, ἢ ἀναμιμνῃσκόμενος ἢ μανθάνων παρ' ἐμοῦ.

ΜΕΝ. Ἀλλὰ προσέξω.

ΣΩ. Εἰπὲ δή μοι, ὦ παῖ, γιγνώσκεις τετράγωνον χωρίον ὅτι τοιοῦτόν ἐστιν;

ΠΑΙΣ. Ἔγωγε.

SOCRATE. — Et que, dans un espace carré, les quatre lignes que voici sont égales ?

L'ESCLAVE. — Sans doute.

SOCRATE. — Et que ces lignes-ci, qui le traversent par le milieu, sont égales aussi ?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Un espace de ce genre peut-il être ou plus grand ou plus petit ?

L'ESCLAVE. — Certainement.

SOCRATE. — Si on donnait à ce côté deux pieds de long et à cet autre également deux, quelle serait la dimension du tout ? Examine la chose comme ceci : s'il y avait, de ce côté, deux pieds et, de cet autre, un seul, n'est-il pas vrai que l'espace serait d'une fois deux pieds ?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Mais du moment qu'on a pour le second côté aussi deux pieds, cela ne fait-il pas deux fois deux ?

L'ESCLAVE. — En effet.

SOCRATE. — L'espace est donc alors de deux fois deux pieds ?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Combien font deux fois deux pieds ? Fais le calcul et dis-le moi.

L'ESCLAVE. — Quatre, Socrate.

SOCRATE. — Ne pourrait-on avoir un autre espace double de celui-ci, mais semblable, et ayant aussi toutes ses lignes égales ?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Combien aurait-il de pieds ?

L'ESCLAVE. — Huit.

SOCRATE. — Eh bien, essaie de me dire quelle serait la longueur de chaque ligne dans ce nouvel espace. Dans celui-ci, la ligne a deux pieds ; combien en aurait-elle dans le second, qui serait double ?

L'ESCLAVE. — Il est évident, Socrate, qu'elle en aurait le double.

SOCRATE. — Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien :

ΣΩ. Ἔστιν οὖν τετράγωνον χωρίον ἴσας ἔχον τὰς γραμμὰς ταύτας πάσας, τέτταρας οὔσας ;

ΠΑΙΣ. Πάνυ γε.

ΣΩ. Οὐ καὶ ταυτασὶ τὰς διὰ μέσου ἔστιν ἴσας ἔχον ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Οὐκοῦν εἴη ἂν τοιοῦτον χωρίον καὶ μεῖζον καὶ ἔλαττον ;

ΠΑΙΣ. Πάνυ γε.

ΣΩ. Εἰ οὖν εἴη αὕτη ἡ πλευρὰ δυοῖν ποδοῖν καὶ αὕτη δυοῖν, πόσων ἂν εἴη ποδῶν τὸ ὅλον ; Ὧδε δὲ σκόπει· εἰ ἦν ταύτῃ δυοῖν ποδοῖν, ταύτῃ δὲ ἑνὸς ποδὸς μόνον, ἄλλο τι ἅπαξ ἂν ἦν δυοῖν ποδοῖν τὸ χωρίον ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Ἐπειδὴ δὲ δυοῖν ποδοῖν καὶ ταύτῃ, ἄλλο τι ἢ δὶς δυοῖν γίγνεται ;

ΠΑΙΣ. Γίγνεται.

ΣΩ. Δυοῖν ἄρα δὶς γίγνεται ποδῶν ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Πόσοι οὖν εἰσιν οἱ δύο δὶς πόδες ; Λογισάμενος εἰπέ.

ΠΑΙΣ. Τέτταρες, ὦ Σώκρατες.

ΣΩ. Οὐκοῦν γένοιτ' ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμὰς ὥσπερ τοῦτο ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Πόσων οὖν ἔσται ποδῶν ;

ΠΑΙΣ. Ὀκτώ.

ΣΩ. Φέρε δή, πειρῶ μοι εἰπεῖν πηλίκη τις ἔσται ἐκείνου ἡ γραμμὴ ἑκάστη ; Ἡ μὲν γὰρ τοῦδε δυοῖν ποδοῖν· τί δὲ ἡ ἐκείνου τοῦ διπλασίου ;

ΠΑΙΣ. Δῆλον δή, ὦ Σώκρατες, ὅτι διπλασία.

ΣΩ. Ὁρᾷς, ὦ Μένων, ὡς ἐγὼ τοῦτον οὐδὲν διδάσκω, sur tout cela, je me borne à l'interroger. En ce moment, il croit savoir quelle est la longueur du côté qui donnerait un carré de huit pieds. Es-tu de mon avis ?

Ménon. — Oui.

Socrate. — S'ensuit-il qu'il le sache ?

Ménon. — Non certes.

Socrate. — Il croit que ce côté serait double du précédent ?

Ménon. — Oui.

Socrate. — Mais vois maintenant comme il va se ressouvenir d'une manière correcte.

(*A l'esclave*) Réponds-moi : Tu dis qu'une ligne double donne naissance à une surface deux fois plus grande ? Comprends-moi bien. Je ne parle pas d'une surface longue d'un côté, courte de l'autre ; je cherche une surface comme celle-ci, égale dans tous les sens, mais qui ait une étendue double, soit de huit pieds. Vois si tu crois encore qu'elle résultera du doublement de la ligne.

L'esclave. — Je le crois.

Socrate. — Cette ligne que tu vois sera-t-elle doublée si nous en ajoutons en partant d'ici une autre d'égale longueur ?

L'esclave. — Sans doute.

Socrate. — C'est donc sur cette nouvelle ligne que sera construite la surface de huit pieds si nous traçons quatre lignes pareilles ?

L'esclave. — Oui.

Socrate. — Traçons les quatre lignes sur le modèle de celle-ci. Voilà bien la surface que tu dis être de huit pieds ?

L'esclave. — Certainement.

Socrate. — Est-ce que, dans notre nouvel espace, il n'y a pas les quatre que voici, dont chacun est égal au premier, à celui de quatre pieds ?

L'esclave. — Oui.

Socrate. — Quelle est donc, d'après cela, l'étendue du dernier ? N'est-il pas quatre fois plus grand ?

L'esclave. — Nécessairement.

Socrate. — Une chose quatre fois plus grande qu'une autre en est-elle donc le double ?

L'esclave. — Non, par Zeus !

Socrate. — Qu'est-elle alors ?

ἀλλ' ἐρωτᾷ πάντα ; Καὶ νῦν οὗτος οἴεται εἰδέναι ὁποία ἐστὶν ἀφ' ἧς τὸ ὀκτώπουν χωρίον γενήσεται· ἢ οὐ δοκεῖ σοι ;

ΜΕΝ. Ἔμοιγε.

ΣΩ. Οἶδεν οὖν ;

ΜΕΝ. Οὐ δῆτα.

ΣΩ. Οἴεται δέ γε ἀπὸ τῆς διπλασίας ;

ΜΕΝ. Ναί.

ΣΩ. Θεῶ δὴ αὐτὸν ἀναμιμνῃσκόμενον ἐφεξῆς, ὡς δεῖ ἀναμιμνῄσκεσθαι. — Σὺ δέ μοι λέγε· ἀπὸ τῆς διπλασίας γραμμῆς φῂς τὸ διπλάσιον χωρίον γίγνεσθαι ; Τοιόνδε λέγω, μὴ ταύτῃ μὲν μακρόν, τῇ δὲ βραχύ, ἀλλὰ ἴσον πανταχῇ ἔστω ὥσπερ τουτί, διπλάσιον δὲ τούτου, ὀκτώπουν· ἀλλὰ ὅρα εἰ ἔτι σοι ἀπὸ τῆς διπλασίας δοκεῖ ἔσεσθαι.

ΠΑΙΣ. Ἔμοιγε.

ΣΩ. Οὐκοῦν διπλασία αὕτη ταύτης γίγνεται, ἂν ἑτέραν τοσαύτην προσθῶμεν ἐνθένδε ;

ΠΑΙΣ. Πάνυ γε.

ΣΩ. Ἀπὸ ταύτης δή, φῄς, ἔσται τὸ ὀκτώπουν χωρίον, ἂν τέτταρες τοσαῦται γένωνται ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Ἀναγραψώμεθα δὴ ἀπ' αὐτῆς ἴσας τέτταρας. Ἄλλο τι ἢ τουτὶ ἂν εἴη ὃ φῂς τὸ ὀκτώπουν εἶναι ;

ΠΑΙΣ. Πάνυ γε.

ΣΩ. Οὐκοῦν ἐν αὐτῷ ἐστιν ταυτὶ τέτταρα, ὧν ἕκαστον ἴσον τούτῳ ἐστὶν τῷ τετράποδι ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Πόσον οὖν γίγνεται ; Οὐ τετράκις τοσοῦτον ;

ΠΑΙΣ. Πῶς δ' οὔ ;

ΣΩ. Διπλάσιον οὖν ἐστιν τὸ τετράκις τοσοῦτον ;

ΠΑΙΣ. Οὐ μὰ Δία.

ΣΩ. Ἀλλὰ ποσαπλάσιον ,

L'ESCLAVE. — Le quadruple.

SOCRATE. — Ainsi, en doublant la ligne, ce n'est pas une surface double que tu obtiens, c'est une surface quadruple.

L'ESCLAVE. — C'est vrai.

SOCRATE. — Quatre fois quatre font seize, n'est-ce pas?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Avec quelle ligne obtiendrons-nous donc une surface de huit pieds? Celle-ci ne nous donne-t-elle pas une surface quadruple de la première?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Et cette ligne-ci moitié moins longue nous donne quatre pieds de superficie?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Soit! La surface de huit pieds n'est-elle pas le double de celle-ci, qui est de quatre, et la moitié de l'autre, qui est de seize?

L'ESCLAVE. — Certainement.

SOCRATE. — Il nous faut donc une ligne plus courte que celle-ci et plus longue que celle-là?

L'ESCLAVE. — Je le crois.

SOCRATE. — Parfait; réponds-moi selon ce que tu crois. Mais dis-moi : notre première ligne n'avait-elle pas deux pieds et la seconde quatre?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Pour l'espace de huit pieds, il faut donc une ligne plus longue que celle-ci, qui est de deux pieds, mais plus courte que celle-là, qui est de quatre?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Essaie de me dire quelle longueur tu lui donnes.

L'ESCLAVE. — Trois pieds.

SOCRATE. — Pour qu'elle ait trois pieds de long, nous n'avons qu'à ajouter à celle-ci la moitié de sa longueur : ce qui fait ici deux pieds plus un pied. Puis, à partir de là, encore deux pieds plus un pied. Nous obtenons le carré que tu demandais.

L'ESCLAVE. — Oui.

ΠΑΙΣ. Τετραπλάσιον.

ΣΩ. Ἀπὸ τῆς διπλασίας ἄρα, ὦ παῖ, οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιον γίγνεται χωρίον.

ΠΑΙΣ. Ἀληθῆ λέγεις.

ΣΩ. Τεττάρων γὰρ τετράκις ἐστὶν ἑκκαίδεκα. Οὐχί;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Ὀκτώπουν δ' ἀπὸ ποίας γραμμῆς; Οὐχὶ ἀπὸ μὲν ταύτης τετραπλάσιον;

ΠΑΙΣ. Φημί.

ΣΩ. Τετράπουν δὲ ἀπὸ τῆς ἡμισέας ταυτησὶ τουτί;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Εἶεν· τὸ δὲ ὀκτώπουν οὐ τοῦδε μὲν διπλάσιόν ἐστιν, τούτου δὲ ἥμισυ;

⟨ΠΑΙΣ. Ναί.⟩

ΣΩ. Οὐκ ἀπὸ μὲν μείζονος ἔσται ἢ τοσαύτης γραμμῆς, ἀπὸ ἐλάττονος δὲ ἢ τοσησδί; Ἢ οὔ;

ΠΑΙΣ. Ἔμοιγε δοκεῖ οὕτω.

ΣΩ. Καλῶς· τὸ γάρ σοι δοκοῦν τοῦτο ἀποκρίνου. Καί μοι λέγε· οὐχ ἥδε μὲν δυοῖν ποδοῖν ἦν, ἡ δὲ τεττάρων;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Δεῖ ἄρα τὴν τοῦ ὀκτώποδος χωρίου γραμμὴν μείζω μὲν εἶναι τῆσδε τῆς δίποδος, ἐλάττω δὲ τῆς τετράποδος.

ΠΑΙΣ. Δεῖ.

ΣΩ. Πειρῶ δὴ λέγειν πηλίκην τινὰ φῇς αὐτὴν εἶναι.

ΠΑΙΣ. Τρίποδα.

ΣΩ. Οὐκοῦν ἄνπερ τρίπους ᾖ, τὸ ἥμισυ ταύτης προσληψόμεθα καὶ ἔσται τρίπους; Δύο μὲν γὰρ οἵδε, ὁ δὲ εἷς· καὶ ἐνθένδε ὡσαύτως δύο μὲν οἵδε, ὁ δὲ εἷς· καὶ γίγνεται τοῦτο τὸ χωρίον ὃ φῄς.

ΠΑΙΣ. Ναί.

SOCRATE. — **Mais si l'espace a trois pieds de long et trois pieds de large, la superficie n'en sera-t-elle pas de trois fois trois pieds?**

L'ESCLAVE. — Je le pense.

SOCRATE. — Or combien font trois fois trois pieds?

L'ESCLAVE. — Neuf.

SOCRATE. — Mais pour que la surface fût double de la première, combien de pieds devait-elle avoir?

L'ESCLAVE. — Huit.

SOCRATE. — Ce n'est donc pas encore la ligne de trois pieds qui nous donne la surface de huit.

L'ESCLAVE. — Évidemment non.

SOCRATE. — Laquelle est-ce? Tâche de me le dire exactement, et si tu aimes mieux ne pas faire de calculs, montre la nous.

L'ESCLAVE. — Mais par Zeus, Socrate, je n'en sais rien.

Remarques de Socrate sur cette partie de l'interrogation.

SOCRATE. — Vois-tu, Ménon, encore une fois, quelle distance il a déjà parcourue dans la voie de la réminiscence? Songe que d'abord, sans savoir quel est le côté du carré de huit pieds, ce qu'il ignore d'ailleurs encore, il croyait pourtant le savoir et répondait avec assurance en homme qui sait, n'ayant aucun sentiment de la difficulté. Maintenant, il a conscience de son embarras, et, s'il ne sait pas, du moins il ne croit pas savoir.

MÉNON. — Tu as raison.

SOCRATE. — N'est-ce pas là un meilleur état d'esprit relativement à la chose qu'il ignorait?

MÉNON. — J'en conviens également.

SOCRATE. — En le mettant dans l'embarras, en l'engourdissant comme fait la torpille, lui avons-nous causé du tort?

MÉNON. — Je ne le crois pas.

SOCRATE. — Ou je me trompe fort, ou nous l'avons grandement aidé à découvrir où il en est vis-à-vis de la vérité. Car maintenant, comme il ignore, il aura plaisir à chercher; tandis que précédemment il n'eût pas hésité à dire et à

ΣΩ. Οὐκοῦν ἂν ᾖ τῇδε τριῶν καὶ τῇδε τριῶν, τὸ ὅλον χωρίον τριῶν τρὶς ποδῶν γίγνεται;

ΠΑΙΣ. Φαίνεται.

ΣΩ. Τρεῖς δὲ τρὶς πόσοι εἰσὶ πόδες;

ΠΑΙΣ. Ἐννέα.

ΣΩ. Ἔδει δὲ τὸ διπλάσιον πόσων εἶναι ποδῶν;

ΠΑΙΣ. Ὀκτώ.

ΣΩ. Οὐδ' ἄρ' ἀπὸ τῆς τρίποδός πω τὸ ὀκτώπουν χωρίον γίγνεται.

ΠΑΙΣ. Οὐ δῆτα.

ΣΩ. Ἀλλ' ἀπὸ ποίας; Πειρῶ ἡμῖν εἰπεῖν ἀκριβῶς· καὶ εἰ μὴ βούλει ἀριθμεῖν, ἀλλὰ δεῖξον ἀπὸ ποίας.

ΠΑΙΣ. Ἀλλὰ μὰ τὸν Δία, ὦ Σώκρατες, ἔγωγε οὐκ οἶδα.

ΣΩ. Ἐννοεῖς αὖ, ὦ Μένων, οὗ ἐστιν ἤδη βαδίζων ὅδε τοῦ ἀναμιμνῄσκεσθαι; Ὅτι τὸ μὲν πρῶτον ᾔδει μὲν οὔ, ἥτις ἐστὶν ἡ τοῦ ὀκτώποδος χωρίου γραμμή, ὥσπερ οὐδὲ νῦν πω οἶδεν, ἀλλ' οὖν ᾤετό γ' αὐτὴν τότε εἰδέναι, καὶ θαρραλέως ἀπεκρίνετο ὡς εἰδώς, καὶ οὐχ ἡγεῖτο ἀπορεῖν· νῦν δὲ ἡγεῖται ἀπορεῖν ἤδη, καὶ ὥσπερ οὐκ οἶδεν, οὐδ' οἴεται εἰδέναι.

MEN. Ἀληθῆ λέγεις.

ΣΩ. Οὐκοῦν νῦν βέλτιον ἔχει περὶ τὸ πρᾶγμα ὃ οὐκ ᾔδει;

MEN. Καὶ τοῦτό μοι δοκεῖ.

ΣΩ. Ἀπορεῖν οὖν αὐτὸν ποιήσαντες καὶ ναρκᾶν ὥσπερ ἡ νάρκη, μῶν τι ἐβλάψαμεν;

MEN. Οὐκ ἔμοιγε δοκεῖ.

ΣΩ. Προὔργου γοῦν τι πεποιήκαμεν, ὡς ἔοικε, πρὸς τὸ ἐξευρεῖν ὅπῃ ἔχει· νῦν μὲν γὰρ καὶ ζητήσειεν ἂν ἡδέως οὐκ εἰδώς, τότε δὲ ῥᾳδίως ἂν καὶ πρὸς πολλοὺς καὶ πολrépéter de confiance, devant une foule de gens, que pour doubler un carré il faut en doubler le côté.

Ménon. — C'est probable.

Socrate. — Crois-tu donc qu'il eût été disposé à chercher et à apprendre une chose qu'il ne savait pas, mais qu'il croyait savoir, avant de s'être senti dans l'embarras pour avoir pris conscience de son ignorance, et d'avoir conçu le désir de savoir?

Ménon. — Je ne le crois pas, Socrate.

Socrate. — Par conséquent son engourdissement lui a été profitable?

Ménon. — C'est mon avis.

Socrate. — Vois maintenant tout ce que cet embarras va lui faire découvrir en cherchant avec moi, sans que je lui enseigne rien, sans que je fasse autre chose que de l'interroger. Surveille-moi pour le cas où tu me surprendrais à lui donner des leçons et des explications, au lieu de l'amener par mes questions à dire son opinion.

Reprise de l'interrogation

(*S'adressant à l'esclave*) Réponds-moi, toi. Nous avons donc ici un espace de quatre pieds? Est-ce compris?

L'esclave. — Oui.

Socrate. — Nous pouvons lui ajouter cet autre-ci, qui lui est égal?

L'esclave. — Oui.

Socrate. — Et encore ce troisième, égal à chacun des deux premiers?

L'esclave. — Oui.

Socrate. — Puis remplir ce coin qui reste vide?

L'esclave. — Parfaitement.

Socrate. — N'avons-nous pas ici maintenant quatre espaces égaux?

L'esclave. — Oui.

Socrate. — Et combien de fois tous ensemble sont-ils plus grands que celui-ci?

L'esclave. — Quatre fois.

Socrate. — Mais nous cherchions un espace double; tu t'en souviens bien?

L'esclave. — Sans doute.

λάκις ᾤετ' ἂν εὖ λέγειν περὶ τοῦ διπλασίου χωρίου, ὡς δεῖ διπλασίαν τὴν γραμμὴν ἔχειν μήκει.

ΜΕΝ. Ἔοικεν.

ΣΩ. Οἴει οὖν ἂν αὐτὸν πρότερον ἐπιχειρῆσαι ζητεῖν ἢ μανθάνειν τοῦτο ὃ ᾤετο εἰδέναι οὐκ εἰδώς, πρὶν εἰς ἀπορίαν κατέπεσεν ἡγησάμενος μὴ εἰδέναι, καὶ ἐπόθησεν τὸ εἰδέναι ;

ΜΕΝ. Οὔ μοι δοκεῖ, ὦ Σώκρατες.

ΣΩ. Ὤνητο ἄρα ναρκήσας ;

ΜΕΝ. Δοκεῖ μοι.

ΣΩ. Σκέψαι δὴ ἐκ ταύτης τῆς ἀπορίας ὅ τι καὶ ἀνευρήσει ζητῶν μετ' ἐμοῦ, οὐδὲν ἀλλ' ἢ ἐρωτῶντος ἐμοῦ καὶ οὐ διδάσκοντος· φύλαττε δὲ ἄν που εὕρῃς με διδάσκοντα καὶ διεξιόντα αὐτῷ, ἀλλὰ μὴ τὰς τούτου δόξας ἀνερωτῶντα. Λέγε γάρ μοι σύ· οὐ τὸ μὲν τετράπουν τοῦτο ἡμῖν ἐστι χωρίον ; Μανθάνεις ;

ΠΑΙΣ. Ἔγωγε.

ΣΩ. Ἕτερον δὲ αὐτῷ προσθεῖμεν ἂν τουτὶ ἴσον ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Καὶ τρίτον τόδε ἴσον ἑκατέρῳ τούτων ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Οὐκοῦν προσαναπληρωσαίμεθ' ἂν τὸ ἐν τῇ γωνίᾳ τόδε ;

ΠΑΙΣ. Πάνυ γε.

ΣΩ. Ἄλλο τι οὖν γένοιτ' ἂν τέτταρα ἴσα χωρία τάδε ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Τί οὖν ; Τὸ ὅλον τόδε ποσαπλάσιον τοῦδε γίγνεται ;

ΠΑΙΣ. Τετραπλάσιον.

ΣΩ. Ἔδει δὲ διπλάσιον ἡμῖν γενέσθαι· ἢ οὐ μέμνησαι ;

ΠΑΙΣ. Πάνυ γε.

SOCRATE. — Cette ligne, que nous traçons d'un angle à l'autre dans chaque carré, ne les coupe-t-elle pas en deux parties égales?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Voici donc quatre lignes égales qui enferment un nouveau carré.

L'ESCLAVE. — Je vois.

SOCRATE. — Réfléchis : quelle est la dimension de ce carré?

L'ESCLAVE. — Je ne le vois pas.

SOCRATE. — Est-ce que, dans chacun de ces quatre carrés, chacune de nos lignes n'a pas séparé une moitié en dedans? Oui ou non?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Et combien y a-t-il de ces moitiés dans le carré du milieu?

L'ESCLAVE. — Quatre.

SOCRATE. — Et dans celui-ci?

L'ESCLAVE. — Deux.

SOCRATE. — Qu'est-ce que quatre par rapport à deux?

L'ESCLAVE. — C'est le double.

SOCRATE. — Combien de pieds alors a ce carré-ci?

L'ESCLAVE. — Huit.

SOCRATE. — Et sur quelle ligne est-il construit?

L'ESCLAVE. — Sur celle-ci.

SOCRATE. — Sur la ligne qui va d'un angle à l'autre dans le carré de quatre pieds?

L'ESCLAVE. — Oui.

SOCRATE. — Cette ligne est ce que les sophistes appellent la diagonale. Si tel est son nom, c'est la diagonale qui selon toi, esclave de Ménon, engendre l'espace double.

L'ESCLAVE. — C'est bien cela, Socrate.

Retour à Ménon et à la réminiscence.

SOCRATE. — Que t'en semble, Ménon? A-t-il exprimé une seule opinion qu'il n'ait tirée de lui-même?

MÉNON. — Aucune ; il a tout tiré de son propre fonds.

SOCRATE. — Et cependant il ne savait pas, nous l'avons reconnu tout à l'heure.

ΣΩ. Οὐκοῦν ἔστιν αὕτη γραμμὴ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν [τινὰ] τέμνουσα δίχα ἕκαστον τούτων τῶν χωρίων ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Οὐκοῦν τέτταρες αὗται γίγνονται γραμμαὶ ἴσαι, περιέχουσαι τουτὶ τὸ χωρίον ;

ΠΑΙΣ. Γίγνονται.

ΣΩ. Σκόπει δή· πηλίκον τί ἐστιν τοῦτο τὸ χωρίον ;

ΠΑΙΣ. Οὐ μανθάνω.

ΣΩ. Οὐχὶ τεττάρων ὄντων τούτων ἥμισυ ἑκάστου ἑκάστη ἡ γραμμὴ ἀποτέτμηκεν ἐντός ; Ἢ οὔ ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Πόσα οὖν τηλικαῦτα ἐν τούτῳ ἔνεστιν ;

ΠΑΙΣ. Τέτταρα.

ΣΩ. Πόσα δὲ ἐν τῷδε ;

ΠΑΙΣ. Δύο.

ΣΩ. Τὰ δὲ τέτταρα τοῖν δυοῖν τί ἐστιν ;

ΠΑΙΣ. Διπλάσια.

ΣΩ. Τόδε οὖν ποσάπουν γίγνεται ;

ΠΑΙΣ. Ὀκτώπουν.

ΣΩ. Ἀπὸ ποίας γραμμῆς ;

ΠΑΙΣ. Ἀπὸ ταύτης.

ΣΩ. Ἀπὸ τῆς ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τεινούσης τοῦ τετράποδος ;

ΠΑΙΣ. Ναί.

ΣΩ. Καλοῦσιν δέ γε ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί· ὥστ' εἰ ταύτῃ διάμετρος ὄνομα, ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἄν, ὡς σὺ φῄς, ὦ παῖ Μένωνος, γίγνοιτ' ἂν τὸ διπλάσιον χωρίον.

ΠΑΙΣ. Πάνυ μὲν οὖν, ὦ Σώκρατες.

ΣΩ. Τί σοι δοκεῖ, ὦ Μένων ; Ἔστιν ἥντινα δόξαν οὐχ αὑτοῦ οὗτος ἀπεκρίνατο ;

ΜΕΝ. Οὔκ, ἀλλ' ἑαυτοῦ.

ΣΩ. Καὶ μὴν οὐκ ᾔδει γε, ὡς ἔφαμεν ὀλίγον πρότερον.

Ménon. — C'est vrai.

Socrate. — C'est donc que ces opinions se trouvaient déjà en lui. N'est-ce pas vrai?

Ménon. — Oui.

Socrate. — Ainsi, sur les choses mêmes qu'on ignore, on peut avoir en soi des opinions vraies[1]?

Ménon. — Cela paraît évident.

Socrate. — Pour le moment, ces opinions vraies ont surgi en lui comme dans un songe. Mais si on l'interroge souvent et de diverses manières sur les mêmes sujets, tu peux être certain qu'il finira par en avoir une science aussi exacte qu'homme du monde.

Ménon. — C'est probable.

Socrate. — Il saura donc sans avoir eu de maître, grâce à de simples interrogations, ayant retrouvé de lui-même en lui sa science;

Ménon. — Oui.

Socrate. — Mais retrouver de soi-même en soi sa science, n'est-ce pas précisément se ressouvenir?

Ménon. — Sans doute.

Socrate. — Cette science, qu'il a maintenant, ne faut-il pas ou bien qu'il l'ait reçue à un certain moment, ou bien qu'il l'ait toujours eue?

Ménon. — Oui.

Socrate. — Mais s'il l'a toujours eue, c'est que toujours aussi il a été savant, et s'il l'a reçue à un moment donné, ce n'est sûrement pas dans la vie présente. A-t-il donc eu par hasard un maître de géométrie? Car c'est toute la géométrie, et même toutes les autres sciences, qu'il retrouvera de la même façon. Est-il quelqu'un qui lui ait tout enseigné? Tu dois bien, j'imagine, le savoir, et d'autant mieux qu'il est né et a grandi chez toi.

Ménon. — Je suis bien certain qu'il n'a jamais eu de maître.

Socrate. — Oui ou non, cependant, a-t-il ces opinions?

Ménon. — Il semble incontestable qu'il les a, Socrate.

Socrate. — S'il ne les a pas acquises dans la vie présente, il faut bien qu'il les ait eues dans un autre temps et qu'il s'en trouvât pourvu d'avance.

ΜΕΝ. Ἀληθῆ λέγεις.

ΣΩ. Ἐνῆσαν δέ γε αὐτῷ αὗται αἱ δόξαι, ἢ οὔ;

ΜΕΝ. Ναί.

ΣΩ. Τῷ οὐκ εἰδότι ἄρα περὶ ὧν ἂν μὴ εἰδῇ ἔνεισιν ἀληθεῖς δόξαι περὶ τούτων [ὧν οὐκ οἶδε];

ΜΕΝ. Φαίνεται.

ΣΩ. Καὶ νῦν μέν γε αὐτῷ ὥσπερ ὄναρ ἄρτι ἀνακεκίνηνται αἱ δόξαι αὗται· εἰ δὲ αὐτόν τις ἀνερήσεται πολλάκις τὰ αὐτὰ ταῦτα καὶ πολλαχῇ, οἶσθ' ὅτι τελευτῶν οὐδενὸς ἧττον ἀκριβῶς ἐπιστήσεται περὶ τούτων.

ΜΕΝ. Ἔοικεν.

ΣΩ. Οὐκοῦν οὐδενὸς διδάξαντος ἀλλ' ἐρωτήσαντος ἐπιστήσεται, ἀναλαβὼν αὐτὸς ἐξ αὑτοῦ τὴν ἐπιστήμην;

ΜΕΝ. Ναί.

ΣΩ. Τὸ δὲ ἀναλαμβάνειν αὐτὸν ἐν αὑτῷ ἐπιστήμην οὐκ ἀναμιμνήσκεσθαί ἐστιν;

ΜΕΝ. Πάνυ γε.

ΣΩ. Ἆρ' οὖν οὐ τὴν ἐπιστήμην, ἣν νῦν οὗτος ἔχει, ἤτοι ἔλαβέν ποτε ἢ ἀεὶ εἶχεν;

ΜΕΝ. Ναί.

ΣΩ. Οὐκοῦν εἰ μὲν ἀεὶ εἶχεν, ἀεὶ καὶ ἦν ἐπιστήμων· εἰ δὲ ἔλαβέν ποτε, οὐκ ἂν ἔν γε τῷ νῦν βίῳ εἰληφὼς εἴη. Ἢ δεδίδαχέν τις τοῦτον γεωμετρεῖν; Οὗτος γὰρ ποιήσει περὶ πάσης γεωμετρίας ταὐτὰ ταῦτα, καὶ τῶν ἄλλων μαθημάτων ἁπάντων. Ἔστιν οὖν ὅστις τοῦτον πάντα δεδίδαχεν; Δίκαιος γάρ που εἶ εἰδέναι, ἄλλως τε ἐπειδὴ ἐν τῇ σῇ οἰκίᾳ γέγονεν καὶ τέθραπται.

ΜΕΝ. Ἀλλ' οἶδα ἔγωγε ὅτι οὐδεὶς πώποτε ἐδίδαξεν.

ΣΩ. Ἔχει δὲ ταύτας τὰς δόξας, ἢ οὐχί;

ΜΕΝ. Ἀνάγκη, ὦ Σώκρατες, φαίνεται.

ΣΩ. Εἰ δὲ μὴ ἐν τῷ νῦν βίῳ λαβών, οὐκ ἤδη τοῦτο δῆλον, ὅτι ἐν ἄλλῳ τινὶ χρόνῳ εἶχε καὶ ἐμεμαθήκει;

Ménon. — C'est probable.

Socrate. — Ce temps n'est-il pas celui où il n'était pas encore homme?

Ménon. — Oui.

Socrate. — Si donc, avant et pendant sa vie, il faut qu'il y ait en lui des opinions vraies qui, réveillées par l'interrogation, deviennent des sciences, n'est-il pas vrai que son âme a dû les avoir acquises de tout temps? Il est clair en effet que l'existence et la non-existence de l'homme embrassent toute la durée.

Ménon. — C'est évident.

Socrate. — Ainsi donc, si la vérité des choses existe de tout temps dans notre âme, il faut que notre âme soit immortelle. C'est pourquoi nous devons avoir bon courage et, ce que nous ne savons pas actuellement, c'est-à-dire ce dont nous avons perdu le souvenir, nous efforcer de le rechercher et d'en retrouver la mémoire.

Ménon. — Il me semble que tu as raison, Socrate, je ne sais trop comment.

Socrate. — Il me le semble aussi, Ménon. A vrai dire, il y a des points dans mon discours sur lesquels je n'oserais être tout à fait affirmatif; mais qu'à regarder comme un devoir de chercher ce que nous ignorons nous devenions meilleurs, plus énergiques, moins paresseux que si nous considérions comme impossible et étrangère à notre devoir la recherche de la vérité inconnue, cela, j'oserais le soutenir contre tous, autant que j'en serais capable, par mes discours et par mes actions.

Ménon. — Je t'approuve encore, Socrate.

ΜΕΝ. Φαίνεται.

ΣΩ. Οὐκοῦν οὗτός γέ ἐστιν ὁ χρόνος ὅτ' οὐκ ἦν ἄνθρωπος ;

ΜΕΝ. Ναί.

ΣΩ. Εἰ οὖν ὅν τ' ἂν ᾖ χρόνον καὶ ὃν ἂν μὴ ᾖ ἄνθρωπος, ἐνέσονται αὐτῷ ἀληθεῖς δόξαι, αἳ ἐρωτήσει ἐπεγερθεῖσαι ἐπιστῆμαι γίγνονται, ἆρ' οὖν τὸν ἀεὶ χρόνον μεμαθηκυῖα ἔσται ἡ ψυχὴ αὐτοῦ ; Δῆλον γὰρ ὅτι τὸν πάντα χρόνον ἔστιν ἢ οὐκ ἔστιν ἄνθρωπος.

ΜΕΝ. Φαίνεται.

ΣΩ. Οὐκοῦν εἰ ἀεὶ ἡ ἀλήθεια ἡμῖν τῶν ὄντων ἐστὶν ἐν τῇ ψυχῇ, ἀθάνατος ἂν ἡ ψυχὴ εἴη, ὥστε θαρροῦντα χρὴ ὃ μὴ τυγχάνεις ἐπιστάμενος νῦν, τοῦτο δ' ἐστὶν ὃ μὴ μεμνημένος, ἐπιχειρεῖν ζητεῖν καὶ ἀναμιμνήσκεσθαι ;

ΜΕΝ. Εὖ μοι δοκεῖς λέγειν, ὦ Σώκρατες, οὐκ οἶδ' ὅπως.

ΣΩ. Καὶ γὰρ ἐγὼ ἐμοί, ὦ Μένων. Καὶ τὰ μέν γε ἄλλα οὐκ ἂν πάνυ ὑπὲρ τοῦ λόγου διισχυρισαίμην· ὅτι δ' οἰόμενοι δεῖν ζητεῖν ἃ μή τις οἶδεν, βελτίους ἂν εἶμεν καὶ ἀνδρικώτεροι καὶ ἧττον ἀργοὶ ἢ εἰ οἰοίμεθα ἃ μὴ ἐπιστάμεθα μηδὲ δυνατὸν εἶναι εὑρεῖν μηδὲ δεῖν ζητεῖν, περὶ τούτου πάνυ ἂν διαμαχοίμην, εἰ οἷός τε εἴην, καὶ λόγῳ καὶ ἔργῳ.

ΜΕΝ. Καὶ τοῦτο μέν γε δοκεῖς μοι εὖ λέγειν, ὦ Σώκρατες.

DOCUMENT N° 2

TRADUCTION FRANCAISE DE M. PEYRARD (1809)

LE CINQUIÈME LIVRE
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

12. Les antécédents sont dits des grandeurs homologues aux antécédents; et les conséquents, des grandeurs homologues aux conséquents.

13. La raison est alterne, quand on compare l'antécédent à l'antécédent, et le conséquent au conséquent.

14. La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent.

15. Il y a composition de raison, quand on compare au conséquent l'antécédent avec le conséquent.

16. Il y a division de raison, quand on compare au conséquent l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

17. Il y a conversion de raison, quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

18. Il y a raison par égalité, lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière, comme la première grandeur des secondes est à la dernière; ou bien, lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées.

19. La proportion est ordonnée, lorsque l'antécédent est au conséquent comme l'antécédent est au conséquent, et que le conséquent est à un autre conséquent quelconque, comme le conséquent est à un autre conséquent quelconque.

20. La proportion est troublée, lorsqu'ayant trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, il arrive que dans les premières grandeurs l'antécédent est au conséquent, comme dans les secondes grandeurs l'antécédent est au conséquent, et que dans les premières grandeurs le conséquent est à une grandeur quelconque, comme dans les secondes grandeurs une grandeur quelconque est à un antécédent.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

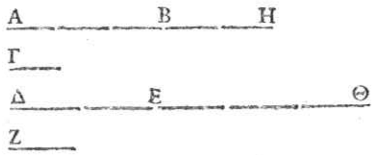
Soient AB, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à d'autres grandeurs E, Z, chacune étant le même multiple de chacune; je dis que AB est le même multiple de E, que la somme de AB et de ΓΔ l'est de la somme de E et de Z.

Puisque AB est multiple de E, que ΓΔ l'est de Z, il y aura dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y ade grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

PROPOSITION II.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième.

Que la première AB soit le même multiple de la seconde Γ que la troisième ΔE l'est de la quatrième Z, et que la cinquième BH soit le même multiple de la seconde Γ que la sixième EΘ l'est de la quatrième Z; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Z.

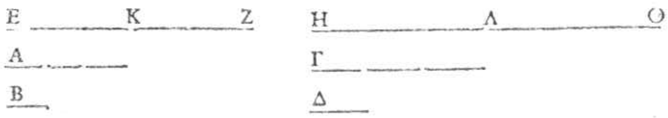


Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔE l'est de Z, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔE de grandeurs égales à Z. Par la même raison, il y a dans BH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans EΘ de grandeurs égales à Z. Il y a donc dans la grandeur entière AH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans la grandeur entière ΔΘ de grandeurs égales à Z. Donc AH est le même multiple de Γ que ΔΘ l'est de Z; donc la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Z. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si l'on prend des équimultiples de la première et de la troisième, le multiple de la première sera, par égalité, le même multiple de la seconde que le multiple de la troisième l'est de la quatrième.

Que la première A soit le même multiple de la seconde B que la troisième Γ l'est de la quatrième Δ; prenons les équimultiples EZ, HΘ de A et de Γ; je dis que EZ est le même multiple de B que HΘ l'est de Δ.

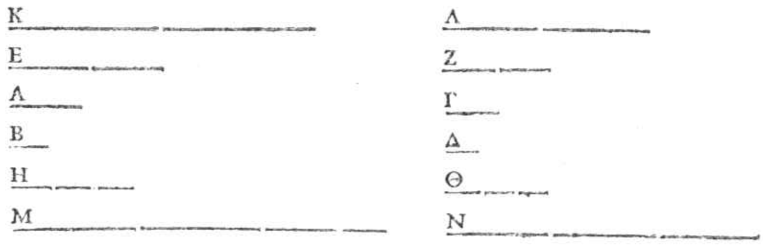


Puisque EZ est le même multiple de A que HΘ l'est de Γ, il y a dans EZ autant de grandeurs égales à A qu'il y a dans HΘ de grandeurs égales à Γ. Divisons EZ en grandeurs égales à A, et que ces grandeurs soient EK, KZ; divisons HΘ en grandeurs égales à Γ, et que ces grandeurs soient HΛ, ΛΘ. Le nombre des parties EK, KZ sera égal au nombre des parties HΛ, ΛΘ. Et puisque A est le même multiple de B que Γ l'est de Δ, que EK est égal à A, et HΛ égal à Γ, la grandeur EK est le même multiple de B que HΛ l'est de Δ. Par la même raison, KZ est le même multiple de B que ΛΘ l'est de Δ. Et puisque la première EK est le même multiple de la seconde B que la troisième HΛ l'est de la quatrième Δ, et que la cinquième KZ est le même multiple de la seconde B que la sixième ΛΘ l'est de la quatrième Δ, la somme de la première et de la cinquième, qui est EZ, sera le même multiple de la seconde B, que la somme de la troisième et de la sixième, qui est HΘ, l'est de la quatrième Δ (2. 5). Donc, etc.

PROPOSITION IV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, des équimultiples quelconques de la première et de la troisième comparés à des équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, auront entre eux la même raison.

Car que la première A ait avec la seconde B la même raison que Γ avec Δ, prenons des équimultiples quelconques E, Z de A et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques H, Θ de B et de Δ; je dis que E est à H comme Z est à Θ.

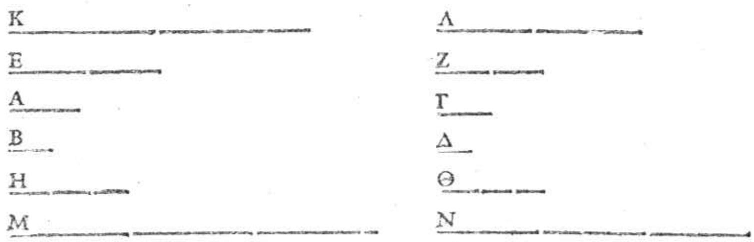


Prenons des équimultiples quelconques K, Λ de E et de Z, et d'autres équimultiples quelconques M, N de H et de Θ.

Puisque E est le même multiple de A que Z l'est de Γ, et que l'on a pris des équimultiples K, Λ de E et de Z, la grandeur K est le même multiple de A que Λ l'est de Γ (3. 5). Par la même raison, M est le même multiple de B que N l'est de Δ. Et puisque A est à B comme Γ est à Δ, que l'on a pris des équimultiples quelconques K, Λ de A et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques M, N de B et de Δ, si K surpasse M, Λ surpasse N; si K est égal à M, Λ est égal à N, et si K est plus petit que M, Λ est plus petit que N (déf. 5. *). Mais K, Λ sont des équimultiples quelconques de E et de Z, et M, N d'autres équimultiples quelconques de H et de Θ; donc E est à H comme Z est à Θ (déf. 6. 5). Donc, etc.

COROLLAIRE.

Puisqu'il a été démontré que si K surpasse M, Λ surpasse N; que si K est égal à M, Λ est égal à N, et que si K est plus petit que M, Λ est plus petit



que N, il est évident que si M surpasse K, N surpasse Λ; que si M est égal à K, N est égal à Λ, et que si M est plus petit que K, N est plus petit que Λ; par conséquent H est à E comme Θ est à Z. De là il est évident que si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par inversion.

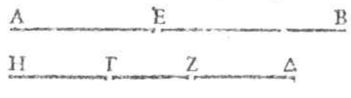
PROPOSITION V.

Si une grandeur est le même multiple d'une grandeur que la grandeur retranchée l'est de la grandeur retranchée, le reste sera le même multiple du reste que le tout l'est du tout.

Que la grandeur AB soit le même multiple de la grandeur ΓΔ que la grandeur retranchée AE l'est de la grandeur retranchée ΓZ; je dis que la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ZΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ.

Que AE soit le même multiple de ΓZ que EB l'est de ΓH.

Puisque AE est le même multiple de ΓZ que EB l'est de HΓ, AE est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΗΖ (1. 5). Mais l'on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΓΔ ; donc ΑΒ est le même multiple de ΗΖ et de ΓΔ ; donc ΗΖ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ ; le reste ΗΓ sera égal au reste ΔΖ. Et puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΗΓ, et que ΖΔ est égal à ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ

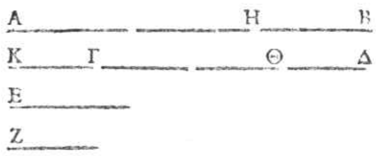


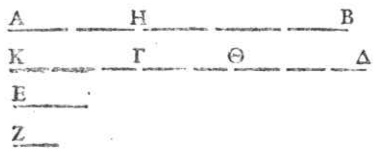
que ΑΒ l'est de ΓΔ ; donc ΕΒ est le même multiple de ΖΔ que ΑΒ l'est de ΓΔ ; donc la grandeur restante ΕΒ sera le même multiple de la grandeur restante ΖΔ que la grandeur entière ΑΒ l'est de la grandeur entière ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs sont des équimultiples de deux grandeurs, et si certaines grandeurs retranchées sont des équimultiples des dernières, les grandeurs restantes seront égales à ces dernières, ou des équimultiples de ces dernières.

Que les deux grandeurs ΑΒ, ΓΔ soient des équimultiples des deux grandeurs Ε, Ζ, et que les grandeurs retranchées ΑΗ, ΓΘ soient des équimultiples de Ε et de Ζ ; je dis que les grandeurs restantes ΗΒ, ΘΔ sont égales aux grandeurs Ε, Ζ, ou des équimultiples de ces grandeurs.





Premièrement, que ΗΒ soit égal à Ε ; je dis que ΘΔ est égal à Ζ. Faisons ΓΚ égal à Ζ.

Puisque ΑΗ est le même multiple de Ε que ΓΘ l'est de Ζ, que ΗΒ est égal à Ε, et ΚΓ égal à Ζ, ΑΒ est le même multiple de Ε que ΚΘ l'est de Ζ (2. 5). Mais on a supposé que ΑΒ est le même multiple de Ε que ΓΔ l'est de Ζ ; donc ΚΘ est le même multiple de Ζ que ΓΔ l'est de Ζ. Et puisque les grandeurs ΚΘ, ΓΔ sont chacune le même multiple de Z, ΚΘ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΘ ; la grandeur restante ΚΓ sera égale à la grandeur restante ΘΔ. Mais ΚΓ est égal à Z ; donc ΘΔ est égal à Z ; donc si HB est égal à E, ΘΔ sera égal à Z.

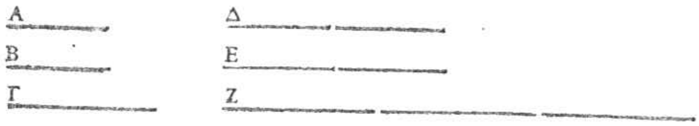
Nous démontrerons semblablement, que si HB est un multiple de E, la grandeur ΘΔ sera le même multiple de Z. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales A, B, et Γ une autre grandeur quelconque ; je dis que chacune des grandeurs A, B a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs A, B.

Prenons des équimultiples quelconques Δ, E de A et de B, et un autre multiple quelconque Z de Γ.



Puisque Δ est le même multiple de A que E l'est de B, et que A est égal à B, Δ est égal à E. Mais Z est un autre multiple quelconque de Γ ; donc, si Δ surpasse Z, E surpasse Z ; si Δ est égal à Z, E est égal à Z ; et si Δ est plus petit que Z, E est plus petit que Z. Mais Δ, E sont des équimultiples quelconques de A et de B, et Z est un autre multiple quelconque de Γ ; donc A est à Γ comme B est à Γ (déf. 6. 5).

Je dis aussi que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs A, B.

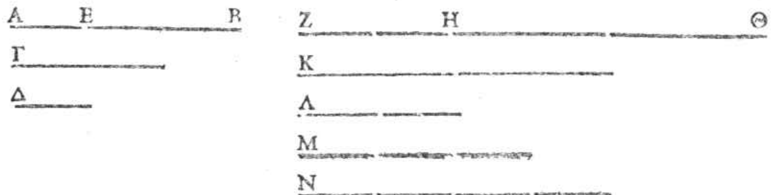
La même construction étant faite, nous démontrerons semblablement que Δ est égal à E ; mais Z est un autre multiple quelconque ; donc si Z surpasse Δ, Z surpasse E ; si Z est égal à Δ, Z est égal à E, et si Z est plus petit que Γ, Z est plus petit que E. Mais Z est un multiple de Γ, et Δ, E sont d'autres équimultiples quelconques de A et de B ; donc Γ est à A comme Γ est à B (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande.

Soient les grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande, et que Δ soit une autre grandeur quelconque; je dis que AB a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Δ, et que Δ a avec Γ une plus grande raison qu'avec AB.

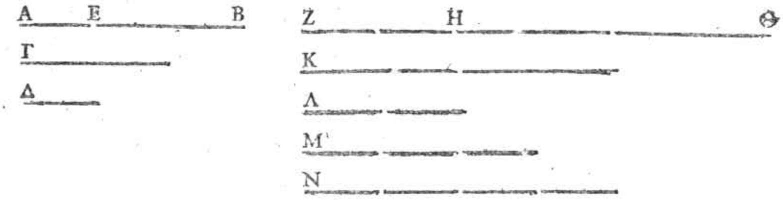
Car puisque AB est plus grand que Γ, faisons BE égal à Γ; la plus petite des grandeurs AE, EB étant multipliée, deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Que AE soit d'abord plus petit que EB; multiplions AE, que son multiple



ZH soit plus grand que Δ, et que HΘ soit le même multiple de EB, et K le même multiple de Γ, que ZH l'est de AE. Prenons la grandeur Λ double de Δ, la grandeur M triple de Δ, et ainsi de suite, une fois de plus, jusqu'à ce que le multiple de Δ deviène pour la première fois plus grand que K. Prenons ce multiple; que N, quadruple de Δ, soit plus grand que K, pour la première fois.

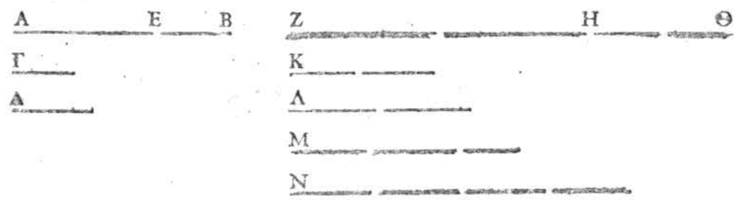
Puisque K est pour la première fois plus petit que N, la grandeur K n'est pas plus petite que M. Mais ZH est le même multiple de AE que HΘ l'est de EB; donc ZH est le même multiple de AE que ZΘ l'est de AB (1. 5). Mais ZH est le même multiple de AE que K l'est de Γ; donc ZΘ est le même multiple de AB que K l'est de Γ; donc ZΘ, K sont des équimultiples de AB et de Γ. De plus, puisque HΘ est le même multiple de EB que K l'est de Γ, et que EB est égal à Γ, HΘ est égal à K. Mais K n'est pas plus petit que M; donc HΘ n'est pas plus petit que M. Mais ZH est plus grand que Δ; donc la grandeur entière ZΘ est plus grande que Δ et M pris ensemble. Mais Δ, M pris ensemble sont égaux à N, puisque M est triple de Δ, que Δ, M pris ensemble sont quadruples de Δ, et que N est quadruple de Δ, les grandeurs M, Δ prises ensemble sont égales à N. Mais ZΘ est plus grand que Δ, M ; donc ZΘ surpasse N. Mais K ne surpasse pas N, et ZΘ, K sont des équimultiples de AB et de Γ, et N est un autre multiple quelconque de Δ ; donc AB a une plus grande raison avec Δ, que Γ avec Δ (déf. 8. 5).

Je dis de plus que Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec AB.



Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que N surpasse K, et que N ne surpasse pas ZΘ. Mais N est un multiple de Δ, et ZΘ, K sont d'autres équimultiples quelconques de AB et de Γ ; donc Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec AB (déf. 8. 5).

Mais que AE soit plus grand que EB ; la plus petite grandeur EB étant multipliée deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Qu'elle soit multipliée, et que HΘ soit un multiple de EB plus grand que Δ, et que ZH soit le même multiple de AE, et K de Γ, que HΘ l'est de EB. Nous démontrerons semblablement que ZΘ, K sont des équimultiples de AB et de Γ. Prenons sem-



blablement un multiple N de Δ qui soit plus grand pour la première fois que ZΓ, ZH ne sera pas plus petit que M. Mais HΘ est plus grand que Δ ; donc la grandeur entière ZΘ surpasse Δ, M pris ensemble, c'est-à-dire N. Mais K ne surpasse pas N, parce que ZH étant plus grand que HΘ, c'est-à-dire que K, ne surpasse pas N. Et conformément a ce qui a été dit auparavant, nous achèverons la démonstration. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entr'elles, et les grandeurs avec lesquelles une même grandeur a une même raison sont aussi égales entr'elles.

Que chacune des grandeurs A, B ait avec Γ la même raison; je dis que A est égal à B.

Car, si cela n'était point, chacune des grandeurs A, B n'aurait pas avec Γ la même raison (8. 5); mais elle l'a; donc A est égal à B.

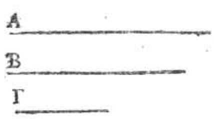
Que Γ ait la même raison avec chacune des grandeurs A, B; je dis que A est égal à B.

Car, si cela n'était point, la grandeur Γ n'aurait pas la même raison avec chacune des grandeurs A, B (8. 5). Mais elle l'a; donc A est égal à B. Donc, etc.

PROPOSITION X.

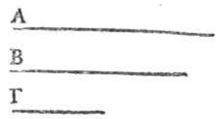
Des grandeurs ayant une raison avec une même grandeur, celle qui a une plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle cette même grandeur a une plus grande raison est la plus petite.

Que A ait avec Γ une plus grande raison que B avec Γ; je dis que A est plus grand que B.



Car, si cela n'est pas, A est égal à B, ou plus petit. A n'est pas égal à B, car chacune des grandeurs A, B aurait la même raison avec Γ (7. 5). Mais chacune de ces grandeurs n'a pas la même raison avec Γ; donc A n'est pas égal à B. A n'est pas cependant plus petit que B ; car A aurait avec Γ une plus petite raison que B avec Γ (8. 5). Mais A n'a pas avec Γ une plus petite raison que B avec Γ ; donc A n'est pas plus petit que B. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal ; donc A est plus grand que B.

De plus, que Γ ait avec B une raison plus grande que Γ avec A ; je dis que B est plus petit que A.



Car, si cela n'est pas, il lui est égal, ou il est plus grand. Mais la grandeur B n'est pas égale à A ; car alors la grandeur Γ aurait la même raison avec chacune des grandeurs A, B (7. 5). Mais elle ne l'a pas ; donc A n'est pas égal à B. La grandeur B n'est pas cependant plus grande que A ; car alors Γ aurait avec B une raison plus petite qu'avec A (8. 5). Mais Γ n'a pas avec B une raison plus petite qu'avec A ; donc B n'est pas plus grand que A. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal ; donc B est plus petit que A. Donc, etc.

PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles.

Que A soit à B comme Γ est à Δ, et que Γ soit à Δ comme E est à Z ; je dis que A est à B comme E est à Z.

Prenons des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z.

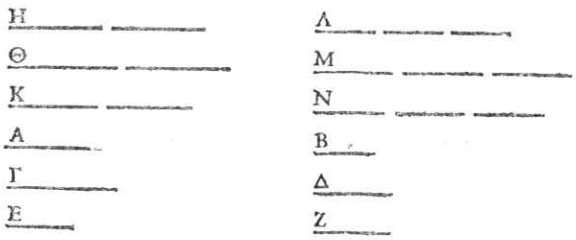
Puisque A est à B comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques H, Θ de A et de Γ ; et d'autres équimultiples quelconques Λ, M de B et de Δ ; si H surpasse Λ, Θ surpasse M ; si H est égal à Λ, Θ est égal à M ;

et si H est plus petit que Λ, Θ est plus petit que M (déf. 6. 5). De plus, puisque Γ est à Δ comme E est à Z, et qu'on a pris des équimultiples quelconques Θ, K de Γ et de E, et d'autres équimultiples quelconques M, N de Δ et de Z; si Θ surpasse M, K surpasse N; si Θ est égal à M, K est égal à N, et si Θ est plus petit que M, K est plus petit que N. Mais si Θ surpasse M, H surpasse Λ; si Θ est égal à M, H est égal à Λ, et si Θ est plus petit que M, H est plus petit que Λ; donc, si H surpasse Λ, K surpasse N; si H est égal à Λ, K est égal à N, et si H est plus petit que Λ, K est plus petit que N. Mais H, K sont des équimultiples quelconques de A et de E, et Λ, N d'autres équimultiples quelconques de B et de Z; donc A est à B comme E est à Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

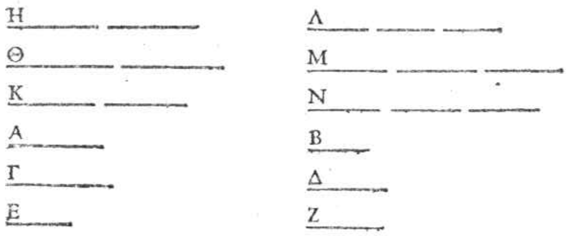
Soient A, B, Γ, Δ, E, Z tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que A soit à B comme Γ est à Δ et comme E est à Z; je dis que A est à B comme la somme des antécédents A, Γ, E est à la somme des grandeurs B, Δ, Z.



Prenons des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z.

Puisque A est à B comme Γ est à Δ, et comme E est à Z; que l'on a pris des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z; si H surpasse Λ, Θ surpasse M, et K surpasse N; si H est égal à Λ, Θ est égal à M, et K égal à N; et si H est plus petit que Λ, Θ est plus petit que N, et K plus petit que

N (déf. 6. 5). Donc, si H surpasse Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K surpasse la somme des grandeurs Λ, M, N; si H est égal à Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K est égale à la somme des grandeurs Λ, M, N; et si H est plus petit que Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K est plus petite que la somme des grandeurs Λ, M, N. Mais la grandeur H et la somme des grandeurs H, Θ, K sont des équimultiples de la grandeur A et des grandeurs A, Γ, E, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres



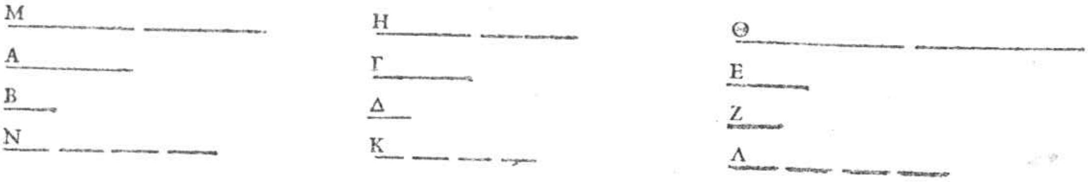
grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Λ et la somme des grandeurs Λ, M, N sont des équimultiples de la grandeur B et de la somme des grandeurs B, Δ, Z; donc A est à B comme la somme des grandeurs A, Γ, E est à la somme des grandeurs B, Δ, Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Si la première a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que la troisième Γ ait avec la quatrième Δ une raison plus grande que la cinquième E avec la sixième Z; je dis que la première A aura avec la seconde B une raison plus grande que la cinquième E avec la sixième Z.

Puisque Γ a avec Δ une raison plus grande que E avec Z, parmi des équimultiples quelconques de Γ et de E, et parmi d'autres équimultiples quelconques de Δ et de Z, un multiple de Γ surpasse un multiple de Δ, et un multiple de E ne surpasse pas un multiple de Z (déf. 8. 5). Prenons ces équimultiples, et que H, Θ soient des équimultiples de Γ et de E, et que K, Λ soient d'autres équimultiples quelconques de Δ et de Z, de manière que H surpasse K, et que Θ ne surpasse pas Λ; et que M soit le même multiple de A que H l'est de Γ, et que N soit le même multiple de B que K l'est de Δ.



Puisque A est à B comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques M, H de A et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques N, K de B et de Δ; si M surpasse N, H surpasse K; si M est égal à N, H est égal à K; et si M est plus petit que N, H est plus petit que K (déf. 6. 5). Mais H surpasse K; donc M surpasse N. Mais Θ ne surpasse pas Λ; et M, Θ sont des équimultiples quelconques de A et de E; et N, Λ sont d'autres équimultiples quelconques de B et de Z; donc A a avec B une raison plus grande que E avec Z (déf. 8. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que A soit plus grand que Γ; je dis que B est plus grand que Δ.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur quelconque, A a avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme

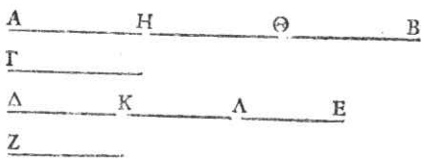
Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ une plus grande raison que Γ avec B (13. 5). Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a la plus grande raison est la plus petite (10. 5); donc Δ est plus petit que B, et par conséquent B plus grand que Δ.

Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, B sera égal à Δ, et que si A est plus petit que Γ, B sera plus petit que Δ. Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équimultiples.

Que AB soit le même multiple de Γ que ΔE l'est de Z; je dis que Γ est à Z comme AB est à ΔE.



Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔE l'est de Z, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔE de grandeurs égales à Z. Divisons AB en parties égales à Γ, et que ces parties soient AH, HΘ, ΘB; divisons aussi ΔE en parties égales à Z, et que ces parties soient ΔK, KΛ, ΛE. Le nombre des parties AH, HΘ, ΘB sera égal au nombre des parties ΔK, KΛ, ΛE. Et puisque les parties AH, HΘ, ΘB sont égales entr'elles, et que les parties ΔK, KΛ, ΛE sont aussi égales entr'elles, AH est à ΔK comme HΘ est à KΛ, et comme ΘB est à ΛE (7. 5); donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); donc AH est à ΔK comme AB est à ΔE. Mais AH est égal à Γ, et ΔK égal à Z; donc Γ est à Z comme AB est à ΔE. Donc, etc.

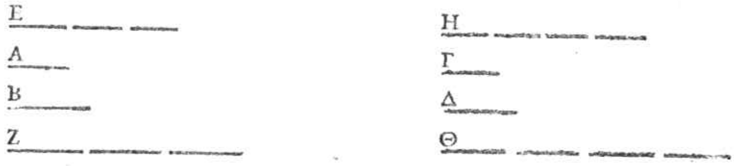
PROPOSITION XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles A, B, Γ, Δ, c'est-à-dire que A soit à B comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que A est à Γ comme B est à Δ.

Prenons des équimultiples quelconques E, Z de A et de B, et d'autres équimultiples quelconques H, Θ de Γ et de Δ.

Puisque E est le même multiple de A que Z l'est de B, et que les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5), la grandeur A est à B comme E est à Z. Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme E est à Z (11. 5). De plus, puisque H, Θ sont des équimultiples de Γ et de Δ; Γ est à Δ comme H est à Θ. Mais Γ est à Δ comme E est à Z; donc E est à Z comme H est à Θ (11. 5). Mais si quatre gran-



deurs sont proportionnelles, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde est égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde est plus petite que la quatrième (14. 5). Donc si E surpasse H, Z surpasse Θ; si E est égal à H, Z est égal à Θ; et si E est plus petit que H, Z est plus petit que Θ. Mais E, Z sont des équimultiples quelconques de A et de B, et H, Θ sont d'autres équimultiples quelconques de Γ et de Δ; donc A est à Γ comme B est à Δ (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

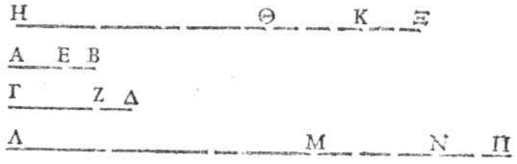
Si des grandeurs étant composées sont proportionnelles, ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs composées AB, BE, ΓΔ, ΔZ soient proportionnelles, c'est-à-dire que AB soit à BE comme ΓΔ est à ΔZ; je dis que ces grandeurs étant

divisées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que AE sera à EB comme ΓZ est à ZΔ.

Prenons des équimultiples quelconques HΘ, ΘK, ΛM, MN des grandeurs AE, EB, ΓZ, ZΔ, et d'autres équimultiples quelconques KΞ, NΠ de EB et de ZΔ.

Puisque HΘ est le même multiple de AE que ΘK l'est de EB, HΘ est le même multiple de AE que HK l'est de AB (1. 5). Mais HΘ est le même multiple de AE que ΛM l'est de ΓZ ; donc HK est le même multiple de AB que ΛM l'est de ΓZ. De plus, puisque ΛM est le même multiple de ΓZ que MN l'est de ZΔ, ΛM est le même multiple de ΓZ que ΛN l'est de ΓΔ. Mais ΛM est le même multiple de ΓZ que HK l'est de AB; donc HK est le même multiple de AB que ΛN l'est de ΓΔ ; donc HK, ΛN sont des équimultiples de AB et de ΓΔ. De plus, puisque ΘK est le même multiple de EB que MN l'est de ZΔ, et que KΞ est le même multiple de EB que NΠ l'est de ZΔ, la grandeur composée ΘΞ est le même multiple de EB que MΠ l'est de ZΔ (2. 5). Et puisque AB est à BE comme ΓΔ est à ΔZ; que HK, ΛN sont des équi-



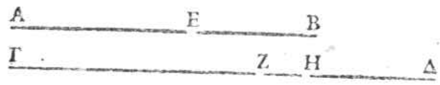
multiples quelconques de AB et de ΓΔ, et que ΘΞ et MΠ sont d'autres équimultiples quelconques de EB et de ZΔ; si HK surpasse ΘΞ, ΛN surpasse MΠ; si HK est égal à ΘΞ, ΛN est égal à MΠ, et si HK est plus petit que ΘΞ, ΛN est plus petit que MΠ (déf. 6. 5). Que HK surpasse ΘΞ ; ayant retranché la partie commune ΘK, HΘ surpassera encore KΞ. Mais si HK surpasse ΘΞ, ΛN surpassera MΠ. Donc ΛN surpasse MΠ ; retranchons la partie commune MN ; la grandeur ΛM surpassera NΠ. Donc, si HΘ surpasse KΞ, ΛM surpassera NΠ. Nous démontrerons semblablement que si HΘ est égal à KΞ, ΛM sera égal à NΠ, et que si HΘ est plus petit que KΞ, ΛM sera plus petit que NΠ. Mais HΘ ΛM sont des équimultiples quelconques de AE et de ΓZ, et KΞ et NΠ d'autres équimultiples quelconques de EB et de ZΔ ; donc AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Si des grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs AE, EB, ΓZ, ZΔ, étant divisées, soient proportionnelles, c'ést-à-dire que AE soit à EB comme ΓZ est à ZΔ ; je dis que ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que AB sera à BE comme ΓΔ est à ZΔ.

Car, si AB n'est pas à BE comme ΓΔ est à ZΔ, AB sera à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΔZ ou à une grandeur plus grande.



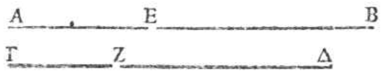
Que AB soit premièrement à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ZΔ, savoir à ΔH. Puisque AB est à BE comme ΓΔ est à ΔH, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles ; donc ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles (17. 5). Donc AE est à EB comme ΓH est à HΔ. Mais on a supposé que AE est à EB comme ΓZ est à ZΔ ; donc ΓH est à HΔ comme ΓZ est à ZΔ (11. 5). Mais la première ΓH est plus grande que la troisième ΓZ ; donc la seconde HΔ est plus grande que la quatrième ZΔ (14. 5). Mais elle est plus petite, ce qui est impossible ; donc AB n'est pas à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ZΔ. Nous démontrerons semblablement que AB n'est pas à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus grande que ZΔ ; donc AB est à BE, comme ΓΔ est a ZΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une grandeur entière est a une autre grandeur entière comme la grandeur retranchée de la première est à la grandeur retranchée de la seconde, la grandeur restante sera à la grandeur restante comme la première grandeur entière est à la seconde grandeur entière.

Que la grandeur entière AB soit à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur retranchée AE est à la grandeur retranchée ΓZ ; je dis que la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ZΔ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ.

Car puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme AE est à ΓZ, par permutation, BA est à AE comme ΔΓ est à ΓZ (16. 5). Et puisque les grandeurs composées sont proportionnelles, les grandeurs divisées seront encore proportionnelles (17. 5) ; donc BE est à EA comme ΔZ est à ZΓ ; donc, par permutation, BE est à ΔZ comme EA est à ZΓ. Mais, par supposition, AE est à ΓZ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ ; donc la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ΔZ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ (11. 5). Donc, etc.



COROLLAIRE.

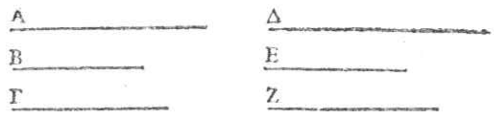
Puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓZ, par permutation (16. 5), AB est à AE comme ΓΔ est à ΓZ ; donc ces grandeurs étant composées sont proportionnelles. Mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ZΔ ; ce qui est par conversion. De là il est évident que si des grandeurs composées sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si l'on a trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs, étant prises deux à deux, et en même raison ; si, par égalité, la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième ; si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième ; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Soient A, B, Γ trois grandeurs, et Δ, E, Z d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, c'est-à-dire que A soit à B comme Δ est à E, et que B soit à Γ comme E est à Z ; que, par égalité, A soit plus grand que Γ ; je dis que Δ sera aussi plus grand que Z ; que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z.

Puisque la grandeur A est plus grande que la grandeur Γ, et que B est une autre grandeur quelconque, la plus grande grandeur aura avec celle-ci une plus grande raison que la plus petite (8. 5) ; donc A a avec B une raison plus grande que Γ avec B. Mais A est à B comme Δ est à E, et, par inversion, Γ

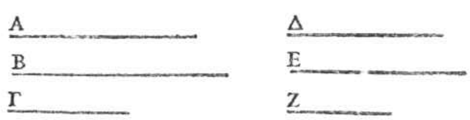


est à B comme Z est à E ; donc Δ a avec E une plus grande raison que Z avec E. Mais, parmi les grandeurs qui ont une raison avec une même grandeur, celle-là est la plus grande qui a une plus grande raison (10. 5) ; donc Δ est plus grand que Z. Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

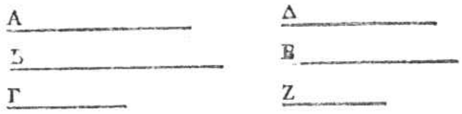
Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, si leur proportion est troublée, et si par égalité la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième ; et si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième ; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Soient les trois grandeurs A, B, Γ, et d'autres grandeurs Δ, E, Z égales aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison ; que leur proportion soit troublée, c'est-à-dire que A soit à B comme E est à Z,



que B soit à Γ comme Δ est à E, et que par égalité A soit plus grand que Γ ; je dis que Δ sera plus grand que Z ; que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur, A aura avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme E est à Z, et par inversion, Γ est à B comme E est à Δ ; donc E a avec Z une plus grande raison que E avec Δ. Mais la grandeur avec laquelle une même

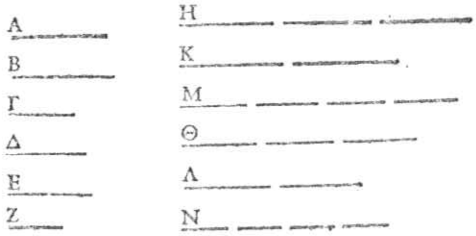


grandeur a une raison plus grande est la plus petite (10, 5) ; donc Z est plus petit que Δ ; donc Δ est plus grand que Z. Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Z, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Z. Donc, etc.

PROPOSITION XXII.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, elles auront la même raison par égalité.

Soient A, B, Γ tant de grandeurs que l'on voudra, et Δ, E, Z d'autres grandeurs égales en nombre aux premières ; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, c'est-à-dire que A soit à B comme Δ est à E, et que B soit à Γ comme E est à Z ; je dis que ces grandeurs auront la même raison par égalité, c'est-à-dire que A sera à Γ comme Δ est à Z.



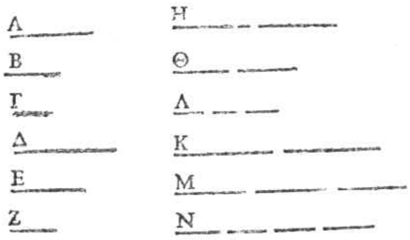
Prenons des équimultiples quelconques H, Θ de A et de Δ ; prenons d'autres équimultiples quelconques K, Λ de B et de E, et enfin d'autres équimultiples quelconques M, N de Γ et de Z.

Puisque A est à B comme Δ est à E, que l'on a pris des équimultiples quelconques H, Θ de A et de Δ, et d'autres équimultiples quelconques K, Λ de B et de E; H est à K comme Θ est à Λ (4. 5). Par la même raison, K est à M comme Λ est à N. Donc, puisque l'on a trois grandeurs H, K, M, et d'autres grandeurs Θ, Λ, N égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison; si, par égalité, H surpasse M, Θ surpasse N; si H est égal à M, Θ est égal à N, et si H est plus petit que M, Θ est plus petit que N (20. 5). Mais H, Θ sont des équimultiples quelconques de A et de Δ, et M, N d'autres équimultiples quelconques de Γ et de Z; donc A est à Γ comme Δ est à Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et si leur proportion est troublée, ces grandeurs auront la même raison par égalité.

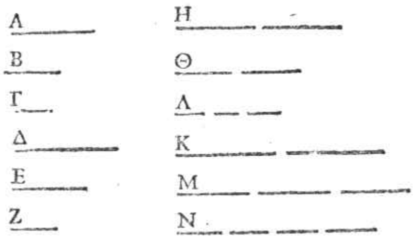
Soient les trois grandeurs A, B, Γ, et d'autres grandeurs Δ, E, Z égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, et que leur proportion soit troublée, c'est-à-dire que A soit à B comme E est à Z, et que B soit à Γ comme Δ est à E; je dis que A est à Γ comme Δ est à Z.



Prenons des équimultiples quelconques H, Θ K, des grandeurs A, B, Δ, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs Γ, E, Z.

Puisque H, Θ sont des équimultiples de A et de B, et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5); A est à B comme H est à Θ. Par la même raison, E est à Z comme M est à N; mais A est à B comme E est à Z; donc H est à Θ comme M est à N (11. 5). Et puisque B est à Γ comme

Δ est à E, B est à Δ par permutation, comme Γ est à E. Et puisque Θ, K sont des équimultiples de B et de Δ, et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples, B est à Δ comme Θ est à K. Mais B est à Δ comme Γ est à E; donc Θ est à K comme Γ est à E. De plus, puisque Λ, M sont des équimultiples de Γ et de Γ, Γ est à E comme Λ est à M. Mais Γ est à E comme Θ est à K; donc Θ est à K comme Λ est à M, et par permutation, Θ est à Λ



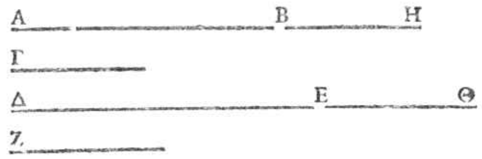
comme K est à M. Mais on a démontré que H est à Θ comme M est à N; donc, puisque l'on a trois grandeurs H, Θ, Λ, et d'autres grandeurs K, M, N égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et que leur proportion est troublée; si, par égalité, H surpasse Λ, K surpasse N; si H est égal à Λ, K est égal à N; et si H est plus petit que Λ, K est plus petit que N (21. 5). Mais H, K sont des équimultiples de A et de Δ, et Λ, N des équimultiples de Γ et de Z; donc A est à Γ comme Δ est à Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la cinquième a avec la seconde la même raison que la sixième avec la quatrième, la somme de la première et de la cinquième aura la même raison avec la seconde que la somme de la troisième et de la sixième avec la quatrième.

Que la première AB ait avec la seconde Γ la même raison que la troisième ΔE a avec la quatrième Z, et que la cinquième BH ait avec la seconde Γ la même raison que la sixième EΘ avec la quatrième Z; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH aura avec la seconde Γ la même raison que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ a avec la quatrième Z.

Puisque BH est à Γ comme EΘ est à Z, par inversion, Γ est à BH comme Z est à EΘ (cor. 4. 5). Mais AB est à Γ comme ΔE est à Z, et Γ est à BH comme Z est à EΘ; donc, par égalité, AB est à BH comme ΔE est à EΘ (22. 5); donc, puisque ces grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs

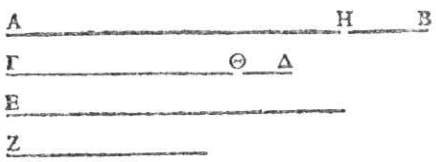


étant composées seront proportionnelles (18. 5); donc AH est à BH comme ΔΘ est à ΘE. Mais BH est à Γ comme EΘ est à Z; donc, par égalité, AH est à Γ comme ΔΘ est à Z (22. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXV.

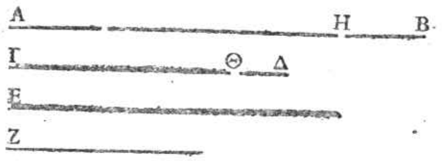
Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres.

Que les quatre grandeurs AB, ΓΔ, E, Z soient proportionnelles, c'est-à-dire que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; que AB soit la plus grande, et Z la plus petite; je dis que les grandeurs AB, Z sont plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E.



Faisons AH égal à E, et ΓΘ égal à Z.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z, AB est à ΓΔ comme AH est à ΓΘ, et puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur retranchée AH est à la grandeur retranchée ΓΘ, la grandeur restante ΗΒ sera à la grandeur restante ΘΔ comme la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ (19. 5). Mais ΑΒ est plus grand que ΓΔ ; donc ΗΒ est plus grand que ΘΔ. Mais ΑΗ est égal à Ε, et ΓΘ à Ζ ; donc les grandeurs ΑΗ, Ζ sont égales aux grandeurs ΓΘ, Ε. Mais si on



ajoute des grandeurs égales à des grandeurs inégales, les grandeurs entières sont inégales ; donc, puisque les grandeurs ΗΒ, ΘΔ sont inégales, et que ΗΒ est la plus grande, si l'on ajoute à ΗΒ les grandeurs ΑΗ, Ζ, et à ΘΔ les grandeurs ΓΘ, Ε, les grandeurs ΑΒ, Ζ seront plus grandes que les grandeurs ΓΔ, Ε. Donc, etc.

FIN DU CINQUIÈME LIVRE.

DOCUMENT N° 3

(TRADUCTION DE PEYRARD)

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.
8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.
9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.
10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. On appèle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.
15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.
16. Ce point se nomme le centre du cercle.
17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.

2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.

3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.

5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.

6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.

7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.

8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.

9. Le tout est plus grand que la partie.

Théorème : Tout corps totalement ordonné, archimédien, et satisfaisant le théorème des segments emboîtés R_6 est isomorphe (pour sa structure de corps ordonné) à $\mathbb{R}$.

Théorème : Tout groupe commutatif totalement ordonné, complètement réticulé et satisfaisant R_5 est isomorphe (pour sa structure de groupe ordonné) à $\mathbb{R}$.

DOCUMENT N° 7

EXTRAIT DU BULLETIN DE LIAISON N° 1
DE L'I.R.E.M. DE NANTES

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES (I)

o-°-o-°-o-°-o-°-o-°-o-°

DES LIVRES, DES LIVRES !

La littérature consacrée aux Mathématiques et aux Mathématiciens (/ciennes) effraye par son étendue. Le catalogue mathématique de la Librairie du Congrès aux Etats-Unis donne le vertige. N'en doutons pas, il y a dans cet amas vénérable, légué par tant de générations, beaucoup de vieilleries inutiles, beaucoup de conceptions dépassées, beaucoup d'erreurs enfin. Ajoutons que la concurrence des maisons d'édition et les particularismes nationaux, voire provinciaux, font naître chaque jour de nouvelles oeuvres sur des thèmes rabâchés, en dehors même des oeuvres produites par la recherche mathématique et la recherche en pédagogie des Mathématiques. Comment choisir ? Que lire ? Comment savoir ?

En ce qui concerne le Mathématicien professionnel, le Chercheur ou l'amateur éclairé, qui désirent se tenir au courant de l'avancement de la recherche en Mathématiques, quelques revues fournissent un descriptif de la plupart des articles publiés et de tous les livres. Citons :

DES REVUES

Mathematical Reviews (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA) : publication bibliographique depuis 1940, elle contient des commentaires généralement critiques et fournis.

Il y a souvent, et c'est déplorable, un long décalage entre la parution d'un article et sa critique, d'autant plus dommageable qu'il y a un délai d'attente entre l'acceptation d'un papier et sa parution dans une revue spécialisée. Trois ou quatre ans peuvent ainsi être perdus. Cette revue reste cependant le périodique le plus consulté.

Zentralblatt für Mathematik/Und ihre Grenzgebiete/Mathematics Abstracts (Band 282 en 1975, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.New York) : parution toutes les quinzaines, depuis 1931, de commentaires généralement descriptifs, quelquefois de l'auteur lui-même, mais peu critiques. Les délais sont donc assez courts mais "l'environnement" mathématique d'un article n'est pas toujours mis en évidence.

Referativnyĭ zhurnal (Matematika) publié par l'Académie des Sciences de'URSS. En russe, cette revue joue le rôle des Mathematical Reviews et donne rapidement des renseignements fort utiles sur la littérature en langue russe.

Pour la période entre 1870 et 1930, on peut consulter le "Jahrbuch über die Fortschritt der Mathematik (1871-1945) et la Revue Semestrielle des Publications Mathématiques (1893-1934).

Current Mathematical Publications (depuis 1970) (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA) : fournit les titres des ouvrages et papiers publiés dans le mois écoulé.

ET ALORS !

Pour l'enseignant du Secondaire, ou pour celui qui désire connaître les classiques dans un domaine particulier des Mathématiques, il n'est pas question d'aller fouiller tous les volumes des Mathematical Reviews. Comme, en outre, un certain enseignement universitaire d'autrefois n'incitait pas à la lecture d'ouvrages originaux, comme certains ouvrages recommandés s'avèrent trop techniques et destinés aux heureux qui peuvent consacrer tout leur temps à la lecture de livres nourris, mais difficiles, on a constaté que beaucoup d'enseignants, et de tous âges, lisaient fort peu ou fort mal.

Et pourtant, il existe d'excellents ouvrages, pour tous les publics, à tous les niveaux et pour tous les goûts.

.../...

POURQUOI ?

En rédigeant par thèmes ces quelques notes bibliographiques, nous voudrions aider chacun à se frayer son chemin, et à son propre rythme, au travers de la masse publiée. Peut-être espérons-nous par certains commentaires susciter de surcroît la lecture. Nous avons d'ailleurs l'intention de lancer une double enquête. D'une part, auprès des enseignants pour déterminer ce qu'ils lisent, comment, quels sont leurs critères, leurs critiques, etc. D'autre part, auprès de certains ténors des Mathématiques (Enseignants, Pédagogues, Chercheurs, etc) pour demander à chacun d'établir une liste à la Proust des vingt meilleurs livres mathématiques dans l'optique d'un enseignant. Nous reviendrons donc sur le problème du choix ultérieurement.

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

La rubrique, par laquelle nous commençons ces notes bibliographiques, est celle de l'histoire des Mathématiques et en particulier celle des hommes et des femmes qui firent et font cette Science. D'autres thèmes seront évoqués dans des bulletins ultérieurs. Donnons-en un avant goût en citant :

- Psychologie et Sociologie mathématiques
- Méthodologie mathématique
- Jeux mathématiques
- Problem solving
- Concepts mathématiques
- Vocabulaire mathématique
- Les Mathématiques et la vie
- Pédagogie des Mathématiques
- Expériences de divers pays
- Les Mathématiques de l'Enseignement Technique
- Les Mathématiques du Primaire
- Les Mathématiques pour Littéraires
- Les manuels classiques du Supérieur selon les spécialités
- Les manuels du Secondaire
- La vulgarisation mathématique, etc.

Commencer par l'histoire des Mathématiques semblera sans doute saugrenu aux esprits plus habitués à certaines méthodes vieillotes de l'enseignement traditionnel français qu'aux bonnes règles cartésiennes. Dans la plupart des Universités françaises, il n'y a aucun cours suivi sur cette histoire. Même absence dans le cadre de la formation des futurs enseignants dans les diverses Ecoles Normales, ou dans le cadre typiquement français des concours de recrutement. C'est une lacune. Elle s'explique peut-être par une certaine tendance humaniste à mettre l'accent sur les particularités individuelles des grands Mathématiciens, les préséances de publication, etc. On néglige ainsi l'évolution des idées, la critique des échecs ou des réussites, l'étude des théories incomplètes, la lecture des documents originaux, finalement nombreux, dont nous disposons, etc. Beaucoup plus réalistes, Anglo-saxons et Allemands par exemple ont des facultés de pédagogie où l'histoire des Mathématiques joue son rôle formateur ... et où les penseurs français sont largement commentés et suivis.

QU'EST-CE QUE L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

On prend rarement le soin, dans l'enseignement traditionnel des Mathématiques, de définir globalement, donc aussi de limiter l'objet de la théorie dont on parle. Remarquons en passant combien cette attitude contredit ce qu'imaginerait à priori le non-mathématicien. Commence-t-on, en effet, un exposé de géométrie par ces mots un peu pédants : j'appelle géométrie plane la seule étude des propriétés invariantes par le groupe des déplacements du plan ?

C'est peut-être un tort, mais, en fait, nous savons bien (en est-il de même des élèves ?) que nous allons partir de quelques axiomes (précisés ou non), en tous cas de définitions pour enchaîner logiquement sur des théorèmes et de nouvelles questions. Ce qui fait l'unité des problèmes soulevés, ce qui en fait leur utilité, y compris d'un point de vue théorique, sera rarement explicité puisque la beauté même du raisonnement déductif occulte en quelque sorte la tectonique générale de la théorie.

Dès que l'on passe à l'histoire des Mathématiques, il importe de préciser le but poursuivi, le pourquoi de l'étude. Il convient donc, et de façon impérative, de dessiner au moins à gros traits les conditions mêmes d'une histoire des Mathématiques. Auguste COMTE ne disait-il pas que l'histoire de la Science c'est la Science elle-même ?

Un petit ouvrage pose bien le problème : M. FICHANT, M. PECHEUX - "Sur l'Histoire des Sciences" - Maspéro 1969. Paru dans la collection Théorie, Cours de Philosophie pour Scientifiques, on y trouvera deux textes vigoureux dans un environnement idéologique d'ailleurs précisé. On trouvera une discussion de même objet dans les diverses préfaces des encyclopédies désormais classiques sur l'histoire des Sciences.

.../...

Histoire de la Science (en 5 tomes) - Presses Universitaires de France - Paris (1966)

Histoire de la Science - Bibliothèque de la Pléiade - Gallimard - Paris

Une lecture de certains articles peut aussi s'avérer enrichissante.

Science, in Encyclopaedia Britannica (Ed. 1961)

Science, Histoire des Sciences, in Encyclopaedia Universalis.

Les encyclopédies allemandes et soviétiques ne doivent d'ailleurs pas être oubliées. Signalons à ce propos que les rubriques mathématiques de l'Encyclopaedia Universalis sont généralement exposées suivant un ordre historique, et, malgré leur niveau technique quelquefois trop élevé, peuvent rendre de grands services par la vision globale qu'elles donnent de l'évolution de telle ou telle théorie mathématique. On trouvera les titres de toutes les rubriques à l'article mathématique lui-même. Bien différentes sont les rubriques de l'Encyclopaedia Britannica, assez terre à terre, un peu minutieuses dans la chronologie historique, notablement en retard sur l'état présent de la Mathématique. Cependant, leur style alerte, les multiples exemples choisis souvent à un niveau élémentaire, les rendent très vivantes et agréables à consulter.

D'EXCELLENTS OUVRAGES

En premier lieu, je veux citer deux titres, parce que ce sont des livres très faciles, très allécheurs :

E.T. BELL : "Men of Mathematics" - New York - Simon and Schuster - pp. 592 (trad. française - Paris 1939)

et

E.T. BELL : "The Development of Mathematics" - New York - Mc Graw Hill (2e éd.) - 1945 - pp. 637.

Le deuxième volume me paraît un remarquable exemple de ces ouvrages de vulgarisation, solides, bien documentés, certes outranciers, assez simplificateurs, agréables à lire, où l'on ne risque pas d'être noyé sous la précision érudite. Très utilisable pour commenter un cours ou un problème et pour situer certaines branches des Mathématiques dans la géographie du Savoir et l'évolution des idées. Ce sont cependant des livres inutilisables pour un épistémologue ou un historien des Sciences. Il y a des partis-pris politiques ou nationaux exaspérants... et bien vieillots.

Ce livre voit son utilité pédagogique grandement augmentée si l'on veut bien puiser aux sources originales, astucieusement rassemblées dans l'ouvrage suivant :

D.E. SMITH : "A Source Book of Mathematics" - Dover - New York - 1948 - pp. 299.

On trouvera d'autres textes originaux dans le catalogue de chez Gauthier-Villars que nous ne reproduirons pas ici. En outre, pour alimenter un cours dans le Secondaire, on pourra utiliser avec profit les techniques éprouvées de :

Historical Topics for the Mathematics Classroom" - 31st Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics - Washington D.C. - 1969 (524 pages).

Profondément engagé dans l'activité de son siècle, le livre de F. KLEIN, l'auteur du programme d'Erlangen, me paraît toujours très utilisable.

F. KLEIN : "Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik" - im 19-Jahrhundert (2 vol.) - Springer - Berlin (1926-1927).

A l'aube révolutionnaire française, un classique de l'histoire des Mathématiques garde une saveur étonnante :

J.E. MONTLUCA : "Histoire des Mathématiques" - 1re édition 1758, 2e édition en 4 volumes entre 1799 et 1802, réédité chez A. Blanchard - Paris.

De même :

J.B. DELAMBRE - S.F. LACROIX : "Rapport historique sur le progrès des Sciences mathématiques depuis 1789..." - Paris - 1810.

Un autre ouvrage, plus récent que les livres de BELL, mais à un niveau voisin, peut rendre des services analogues

H. EVES : "An introduction to the history of Mathematics" - 3e éd. - New York - Holt, Rinehart, Winston - 1969 (pp. 464).

De même :

O. BECKER - J.E. HOFMANN : "Geschichte der Mathematik" - Athenaum Verlag - Bonn - 1951 (340 pp.) (trad. française : Histoire des Mathématiques - 1956).

A un niveau nettement plus élevé dans le maniement des outils mathématiques, l'ouvrage essentiel est celui de :

N. BOURBAKI : "Eléments d'histoire des Mathématiques" - 2e édition - Hermann - Paris - 1969.

Cet ouvrage reprend les notices historiques des divers fascicules publiés par notre père et notre mère à tous, pour employer un proverbe chinois.

.../...

Il me paraît nécessaire de citer maintenant un livre récent qu'il serait bon de traduire en français

Morris KLINE : "Mathematical Thought from ancient to modern times" - Oxford University Press - New York - 1972 (1238 pages).

La longueur de ce livre découragera beaucoup ! Mais quelle richesse cependant sur les "Mathématiques classiques" ! Par contre, l'analyse fonctionnelle, la logique et l'algèbre modernes sont négligées. Le niveau d'exposé reste accessible à tout enseignant, mais il importe de savoir que l'auteur prend parti avec parti-pris pour parler comme le sapeur fameux. Parti-pris contre les "Mathématiques modernes" qui amollissent l'enseignement dur d'autrefois, le parti de la géométrie, le parti des faits contre celui des démonstrations logiquement enchaînées, le parti des Mathématiques "utiles" inventées au 19e siècle contre les Mathématiques conceptuelles de notre siècle.Finalement, j'ai aimé ce livre roboratif en ne partageant pas du tout certains développements. Je souhaiterais qu'un groupe de l'I.R.E.M. puisse travailler certains thèmes du livre. En tout cas, c'est à ce niveau, et à ce tel niveau seulement, qu'un I.R.E.M. doit se placer dans la querelle récemment attisée des Mathématiques dites modernes.

Un ouvrage attachant, plus vulgarisateur mais moins pesant, plus proche peut-être de l'intérêt des élèves dans sa diversité d'esprit (plusieurs auteurs y participèrent) et dans la variété des sujets abordés (de l'esthétique à la philosophie mathématique) est celui de :

F. LE LIONNAIS : "Les grands courants de la pensée mathématique" - Paris - 1948.

Enfin, d'une orientation nettement philosophique, d'ailleurs trop imbriquée dans un parti-pris idéologique témoin de l'avant-guerre, on ne peut manquer de citer :

L. BRUNSCHWICG : "Les étapes de la philosophie mathématique" - 4e édition - Paris - 1947.

DES POINTS DE VUE SUR LE DEVELOPPEMENT

Un ouvrage ancien me paraît encore très intéressant :

M. CHASLES : "Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie" - 2e édition - Paris - 1875.

De même :

O. ØRE : "Number theory and its history" - 1st Ed. - Mc Graw Hill - New York - 1948 - pp. 370

et, sur un sujet très spécialisé, un point de vue d'évolution :

Th. MUIR : "The theory of determinants on its historical order" - 2e édition - Londre - 1906.

Sur un développement différent de l'analyse aux bords de la Tamise par l'oubli peut-être malheureux d'une algébrisation des développements limités :

F. CAJORI : "A history of the conception of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse - Chicago - 1931.

Sur la théorie des ensembles, un ouvrage accessible :

J. CAVAILLES : "Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles" - Paris - 1937.

Sur le problème de Fermat, un exposé ancien :

R. NOGUES : "Le théorème de Fermat, son histoire" - Paris - 1932

Sur la géométrie, un ouvrage un peu démodé par rapport à la situation présente :

G. LORIA : "Il passate e il presente della principali teorie geometriche" - 4e édition - Padoue - 1931

Egalement:

J.L. COOLIDGE : "A history of geometrical methods" - Londres - 1940.

DES OUVRAGES PLUS SPECIALISES

Certaines périodes d'activité mathématique intense ont retenu l'attention des érudits et nous valent de passionnants ouvrages certes, mais nettement moins utilisables dans le cadre d'une classe que ceux précédemment utilisés. Nous allons citer pêle-mêle quelques titres :

Pour la science héllénistique et romaine :

P. DEDRON - J. ITARD : "Mathématiques et Mathématiciens" - Paris - 1959

B.L. VAN DEN WAERDEN : "Science awakening" - Groningen - 1954

O. NEUGEBAUER : "The exact sciences in Antiquity" - Princeton University Press - 2e édition - Providence - 1957 (191 p)

.../...

R.S. BRUMBRAUGH : "Plato's Mathematical Imagination ; The Mathematical passages in the Dialogues and their interpretation" - Indiana University Press - Bloomington - 1954 (pp. 302).

Pour la science égyptienne :

T.E. PEET : "Mathematics in Ancient Egypt" - Manchester - 1931.

Pour la science chinoise, une bible :

J. NEEDHAM : "Science and Civilisation in China" - Cambridge University Press - Vol. 3 :
"Mathematics and the science of the Heavens and the Earth" - 1959

On se reportera aux Encyclopédies déjà énumérées pour les Mathématiques arabes, indiennes, byzantines et pour ce qui concerne les Mathématiques de l'Occident du Moyen-Age. Nous laissons aux lecteurs le soin de découvrir par eux-mêmes les ouvrages très érudits, mais aussi très copieux, de P. TANNERY, de G. SARTON, de M. CANTOR, de R. TATON ou de G. ITARD.

D'AUTRES OUVRAGES

H. LEBESGUE : "Notices d'histoire des Mathématiques" - Paris - 1958

D.E. SMITH : "History of Mathematics" - New York - Dover Publ. - dernière édition 1953 (2 vol.) (la 4e éd. date de 1925)

F. CAJORI : "History of Mathematics" - New York - Macmillan Co - dernière édition 1950 (pp. 514) (la 2e éd. date en fait de 1919)

R.C. ARCHIBALD : "Outline of the history of Mathematics" - 6th éd. - Math. Assoc. of America - Menasha Wisconsin - 1949 (114 p) (abondante bibliographie)

G. LORIA : "Storia della Matematiche" - 3 vol. - 2e édition - 1950

Est-il besoin d'ajouter que mes ignorances ou mes goûts (ou les deux conjugués) expliquent bien des omissions ?

Pour les amateurs de biographies, d'historiettes, voire de légendes, mais aussi pour tous ceux qui veulent vérifier la chronologie des publications, ou dénicher qelque travail d'un auteur classique, certains ouvrages encyclopédiques s'imposent. On ne s'étonnera pas de trouver Allemands et Japonais en première ligne !

J.C. POGGENDORFF : "Handworterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschhaften" - Verlag Chemie - Berlin - 1863-1940 (7 volumes publiés)

Dictionnaire des Mathématiques - Tokyo - 1956 (en Japonais), mais l'obstacle de la langue est mineur.

R.C. ARCHIBALD : "Mathematical Table Makers ; Portraits, ... Bibliographical Notes" - Scripta Mathematica - New York - 1948.

Enfin, on n'oubliera pas que la plupart des grands Mathématiciens sont entièrement réédités sous la forme d'Oeuvres Complètes : de CAUCHY et LAGRANGE à HADAMARD ou DELSARTE en passant par RIEMANN, EUCLIDE, CAYLEY, POINCARÉ ou HILBERT. L'Opera Omnia d'EULER dépasse les cinquante volumes ... et on n'a pas terminé la publication des inédits et de la correspondance. Pour les Mathématiciens antiques, la Librairie Blanchard à Paris a réalisé nombre de rééditions.

J.G. DHOMBRES

DOCUMENT N° 8

LA GEOMETRIE

(de Descartes)

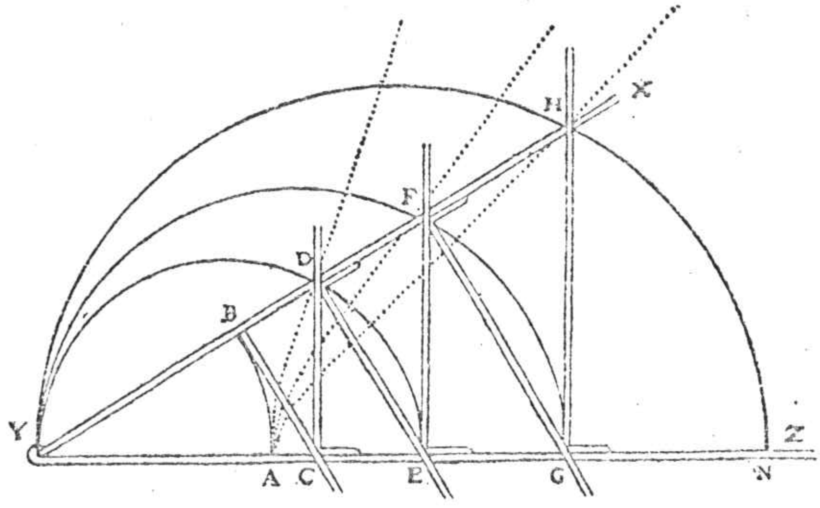
LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

Quelles ſont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les Problesmes de Geometrie, les vns ſont plans, les autres ſolides, & les autres lineaires : c'eſt a dire que les vns peuuent eſtre conſtruits en ne traçant que des lignes droites & des cercles ; au lieu que les autres ne le peuuent eſtre, qu'on n'y employe pour le moins quelque ſection conique ; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus compoſée. Mais ie m'eſtonne de ce qu'ils n'ont point, outre cela, diſtingué diuers degrés entre ces lignes plus compoſées, & ie ne ſçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées Mechaniques, plutoſt que Geometriques. Car, de dire que ç'ait eſté a cauſe qu'il eſt beſoin de ſe ſeruir de quelque machine pour les deſcrire, il faudroit reietter, par meſme raiſon, les cercles & les lignes droites, vû qu'on ne les deſcrit ſur le papier qu'auec vn compas & vne reigle, qu'on peut auſſy nommer des machines. Ce n'eſt pas non plus a cauſe que les inftrumens qui feruent a les tracer, eftant plus compofés que la reigle & le compas, ne peuuent eftre fi iuftes : car il faudroit, pour cete raifon, les reietter des Mechaniques, où la iufteffe des ouurages qui fortent de la main eft defirée, plutoft que de la Geometrie, où c'eft feulement la iufteffe du raifonnement qu'on recher|che, & qui peut fans doute eftre auffy parfaite, touchant ces lignes, que touchant les autres. Ie ne diray pas auffy que ce foit a caufe qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, & qu'ils fe font contentés qu'on leur accordaft qu'ils puffent ioindre deux poins donnés par vne ligne droite, & defcrire vn cercle d'vn centre donné, qui paffaft par vn point donné : car ils n'ont point fait de fcrupule de fuppofer, outre cela, pour traiter des fections coniques, qu'on puft coupper tout cone donné par vn plan donné. Et il n'eft befoin de rien fuppofer, pour tracer toutes les lignes courbes que ie pretens icy d'introduire, finon que deux ou plufieurs lignes puiffent eftre meuës l'vne par l'autre, & que leurs interfections en marquent d'autres : ce qui ne me paroift en rien plus difficile. Il eft vray qu'ils n'ont pas auffy entierement receu les fections coniques en leur Geometrie, & ie ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont efté approuués par l'vfage ; mais il eft, ce me femble, tres clair que, prenant, comme on fait, pour Geometrique ce qui eft precis & exact, & pour Mechanique ce qui ne l'eft pas; & confiderant la Geometrie comme vne fcience qui enfeigne generalement a connoiftre les mefures de tous les cors; on n'en doit pas plutoft exclure les lignes les plus compofées que les plus ſimples, pouruû qu'on les puiſſe imaginer eſtre deſcrites par vn mouuement continu, ou par pluſieurs qui s'entreſuiuent & dont les derniers ſoient entierement reglés par ceux qui les precedent : car, par ce moyen, on peut touſiours auoir vne connoiſſance exacte de leur meſure. Mais peuteſtre que ce qui a empeſché les anciens Geometres de rece|uoir celles qui eſtoient plus compoſées que les ſections coniques, c'eſt que les premieres qu'ils ont conſiderées, ayant par haſard eſté la Spirale, la Quadratrice, & ſemblables, qui n'appartienent veritablement qu'aux Mechaniques & ne ſont point du nombre de celles que ie penſe deuoir icy eſtre receues, a cauſe qu'on les imagine deſcrites par deux mouuemens ſeparés & qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puiſſe meſurer exactement; bien qu'ils ayent aprés examiné la Conchoide, la Ciſſoide, & quelque peu d'autres qui en ſont, toutefois, a cauſe qu'ils n'ont peuteſtre pas aſſés remarqué leurs proprietés, ils n'en ont pas fait plus d'eſtat que des premieres. Ou bien, c'eſt que, voyant qu'ils ne connoiſſoient encore que peu de choſes touchant les ſections coniques, & qu'il leur en reſtoit meſme beaucoup, touchant ce qui ſe peut faire auec la reigle & le compas, qu'ils ignoroient, ils ont creu ne deuoir pas entamer de matiere plus difficile. Mais, pource que i'eſpere que dorenauant ceux qui auront l'adreſſe de ſe ſeruir du calcul Geometrique icy propoſé, ne trouueront pas aſſés de quoy s'areſter touchant les probleſmes plans ou ſolides, ie crois qu'il eſt a propos que ie les inuite a d'autres recherches, où ils ne manqueront iamais d'exercice.

Voyés les lignes AB, AD, AF & ſemblables, que ie ſuppoſe auoir eſté deſcrites par l'ayde de l'inſtrument YZ, qui eſt compoſé de pluſieurs reigles, tellement iointes que, celle qui eſt marquée YZ eſtant areſtée ſur la ligne AN, on peut ouurir & fermer l'angle XYZ, & que, lorſqu'il eſt tout fermé, les poins B, C, D, E, F, G, H ſont tous aſſemblés au point A;

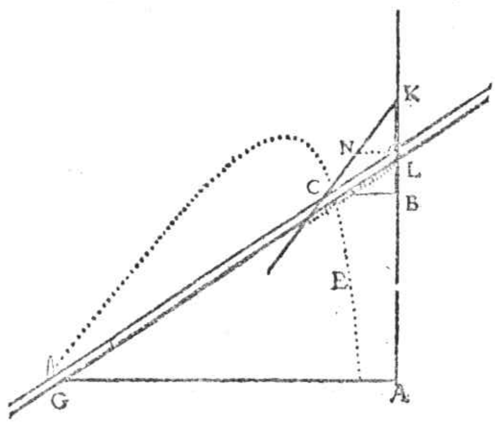


mais qu'a meſure qu'on l'ouure, la reigle BC, qui eſt iointe a angles droits auec XY au point B, pouſſe vers Z la reigle CD, qui coule ſur YZ en faiſant touſiours des angles droits auec elle; & CD pouſſe DE, qui coule tout de meſme ſur YX en demeurant parallele a BC; DE pouſſe EF; EF pouſſe FG; celle cy pouſſe GH; & on en peut conceuoir vne infinité d'autres, qui ſe pouſſent conſequutiuement en meſme façon, & dont les vnes facent touſiours les meſmes angles auec YX, & les autres auec YZ. Or, pendant qu'on ouure ainſi l'angle XYZ, le point B deſcrit la ligne AB, qui eſt vn cercle; & les autres poins, D, F, H, où ſe font les interſections des autres reigles, deſcriuent d'autres lignes courbes, AD, AF, AH, dont les dernieres ſont, par ordre, plus composées que la premiere, & celle cy plus que le cercle. Mais ie ne voy pas ce qui peut empeſcher qu'on ne conçoiue auſſy nettement & auſſy diſtinctement la deſcription de cete premiere, que du cercle ou,|du moins, que des ſections coniques; ny ce qui peut empeſcher qu'on ne conçoiue la ſeconde, & la troiſieſme, & toutes les autres qu'on peut deſcrire, auſſy bien que la premiere; ny, par conſequent, qu'on ne les reçoiue toutes en meſme façon, pour ſeruir aux ſpeculations de Geometrie.

La façon de diſtinguer toutes les lignes courbes en certains genres, et de connoiſtre le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites.

Ie pourrois mettre icy pluſieurs autres moyens, pour tracer & conceuoir des lignes courbes qui ſeroient de plus en plus composées par degrés a l'infini. Mais, pour comprendre enſemble toutes celles qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres, ie ne ſçache rien de meilleur que de dire que tous les poins de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt a dire qui tombent ſous quelque meſure preciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport a tous les poins d'vne ligne droite, qui peut eſtre exprimé par quelque equation, en tous par vne meſme. Et que, lorſque cete equation ne monte que iuſques au rectangle de deux quantités indeterminées, ou bien au quarré d'vne meſme, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipſe qui ſoient compriſes. Mais que, lorſque l'equation monte iuſques a la trois ou quatrieſme dimenſion des deux ou de l'vne des deux quantités indeterminées ! car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point a vn autre : elle eſt du ſecond. Et que, lorſque l'equation monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle eſt du troiſieſme : & ainſi des autres a l'infini.

Comme, ſi ie veux ſçauoir de quel genre eſt la ligne E C, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection de la reigle GL & du plan rectiligne CNKL, dont le coſté KN eſt indefiniement prolongé vers C, & qui, eſtant meu ſur le plan de deſſous en ligne droite, c'eſt

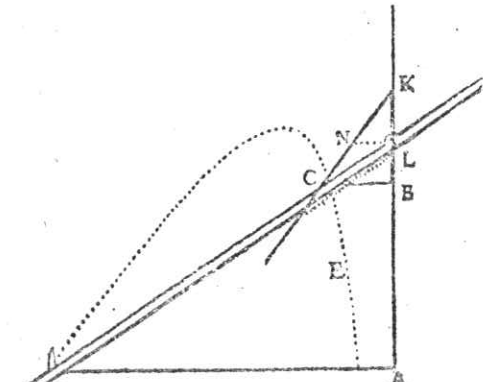


a dire en telle ſorte que ſon diametre KL ſe trouue touſiours appliqué ſur quelque endroit de la ligne BA prolongée de part & d'autre, fait mouuoir circulairement cete reigle GL autour du point G, a cauſe qu'elle luy eſt tellement iointe qu'elle paſſe touſiours par le point L. Ie choiſis vne ligne droite, comme AB, pour rapporter a ſes diuers poins tous ceux de cete ligne courbe EC, & en cete ligne AB ie choiſis vn point, comme A, pour commencer par luy ce calcul. Ie dis que ie choiſis & l'vn & l'autre, a cauſe qu'il eſt libre de les prendre tels qu'on veult : car, encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'equation plus courte & plus ayſée, toutefois, en quelle façon qu'on les prene, on peut touſiours faire que la ligne paroiſſe de meſme genre, ainſi qu'il eſt ayſé a demonſtrer. | Aprés cela, prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne CB parallele a GA; & pource que CB & BA ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme, l'vne y, & l'autre x. Mais, affin de trouuer le rapport de l'vne a l'autre, ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe : comme GA que ie nomme a, KL que ie nomme b, & NL, parallele a GA, que ie nomme c. Puis ie dis : comme NL eſt a LK, ou c a b, ainſy CB, ou y, eſt a BK, qui eſt, par conſequent $\frac{b}{c}y$; & BL eſt $\frac{b}{c}y - b$; & AL eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. De plus, comme CB eſt a LB, ou y a $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou GA, eſt a LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. De façon que, mul|tipliant la ſeconde par la troiſieſme, on produiſt $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt eſgale a $xy + \frac{b}{c}yy - by$, qui ſe produiſt en multipliant la premiere par la derniere; & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt :

$$yy \propto cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

de laquelle on connoiſt que la ligne EC eſt du premier genre : comme, en effect, elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

Que ſi, en l'inſtrument qui ſert a la deſcrire, on fait qu'au lieu de la ligne droite CNK, ce ſoit cete Hyperbole, ou quelque autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan CNKL, l'interſection de cete ligne & de la reigle GL deſcrira, au lieu de l'hyperbole EC, vne autre ligne courbe, qui ſera du ſecond genre. Comme, ſi CNK eſt vn cercle dont L ſoit le centre, on deſcrira la premiere Conchoide des anciens ; & ſi c'eſt vne Parabole dont le diametre ſoit KB, on deſcrira la ligne courbe que i'ay tantoſt dit eſtre la premiere & la plus ſimple pour la queſtion de Pappus, lorſqu'il n'y a que cinq lignes droites données par poſition. Mais ſi, au lieu d'vne de ces lignes courbes du premier genre, c'en eſt vne du ſecond qui termine le plan CNKL, on en deſcrira, par ſon moyen, vne du



troiſieſme : ou, ſi c'en eſt vne du troiſieſme, on en deſcrira vne du quatrieſme ; & ainſi a l'infini, comme il eſt fort ayſé a connoiſtre par le calcul. Et en quelque autre façon qu'on imagine la deſcription d'vne ligne courbe, pouruû qu'elle ſoit du nombre de celles que ie nomme Geometriques, on pourra touſiours trouuer vne equation pour determiner tous ſes poins en cete ſorte.

Au reſte, ie mets les lignes courbes qui font monter cete equation iuſques au quarré de quarré, au meſme genre que celles qui ne la font monter que iuſques au cube ; & celles dont l'equation monte au quarré de cube, au meſme genre que celles dont elle ne monte qu'au ſurſolide ; & ainſi des autres. Dont la raiſon eſt qu'il y a reigle generale pour reduire au cube toutes les difficultés qui vont au quarré de quarré, & au ſurſolide toutes celles qui vont au quarré de cube, de façon qu'on ne les doit point eſtimer plus compoſées.

Mais il eſt a remarquer qu'entre les lignes de chaſque genre, encore que la pluſpart ſoient eſgalement compoſées, en ſorte qu'elles peuuent ſeruir a determiner les meſmes poins & conſtruire les meſmes probleſmes, il y en a toutefois auſſy quelques vnes qui ſont plus ſimples, & qui n'ont pas tant d'eſtendue en leur puiſſance. Comme, entre celles du premier genre, outre l'Ellipſe, l'Hyperbole & la Parabole, qui ſont eſgalement compoſées, le cercle y eſt auſſy compris, qui manifeſtement eſt plus ſimple. Et entre celles du ſecond genre, il y a la Conchoide vulgaire, qui a ſon origine du cercle, & il y en a encore quelques autres qui, bien qu'elles n'ayent pas tant d'eſtendue que la pluſpart de celles du meſme genre, ne peuuent toutefois eſtre miſes dans le premier....

DOCUMENT N° 9

E. KANT CRITIQUE DE LA RAISON PURE

INTRODUCTION (§ V)

LES JUGEMENTS MATHEMATIQUES SONT TOUS SYNTHETIQUES

Cette proposition semble avoir échappé jusqu'ici aux observations des analystes de la raison humaine et paraît même exactement contraire à leurs conjectures, bien qu'elle soit incontestablement certaine et de conséquences très importantes. De ce qu'on trouvait, en effet, que les raisonnements des mathématiciens procèdent tous suivant le principe de contradiction (ce qui est exigé par la nature de toute certitude apodictique), on se persuadait que les principes étaient connus aussi en vertu du principe de contradiction ; en quoi ces analystes se trompaient, car une proposition synthétique peut, sans doute, être envisagée suivant le principe de contradiction, mais seulement à condition que soit supposée une autre proposition synthétique, dont elle puisse être déduite, mais jamais en elle-même.

Il faut remarquer tout d'abord que les propositions vraiment mathématiques sont toujours des jugements *a priori* et non empiriques, puisqu'elles comportent la nécessité qu'on ne peut tirer de l'expérience. Que si l'on ne veut pas admettre cela, eh bien ! je restreins ma proposition à la *mathématique pure* dont le concept exige déjà qu'elle ne contienne aucune connaissance empirique, mais une connaissance pure *a priori*.

On pourrait sans doute penser, à première vue, que la proposition 7 + 5 = 12 est une proposition simplement analytique qui résulte, en vertu du principe de contradiction, du concept de la somme de sept et de cinq. Mais quand on y regarde de plus près, on trouve que le concept de la somme de sept et de cinq ne contient rien de plus que la réunion des deux nombres en un seul, par quoi n'est pas du tout pensé ce qu'est le nombre unique qui renferme les deux autres. Le concept de douze n'est pensé en aucune manière par le fait seul que je conçois simplement cette réunion de sept et de cinq, et j'aurai beau analyser le concept que j'ai d'une telle somme possible, aussi longuement que je le voudrai, je n'y trouverai pas le nombre douze. Il faut dépasser ces concepts, en appelant à son aide l'intuition qui correspond à l'un des deux, par exemple celle des cinq doigts de la main, ou (comme SEGNER dans son arithmétique) cinq points, et en ajoutant ainsi peu à peu les unités du nombre cinq donné dans l'intuition au concept de sept. Je prends tout d'abord, en effet, le nombre 7, et, en m'aidant, pour le concept de 5, des cinq doigts de ma main, en qualité d'intuition, j'ajoute alors une à une au nombre 7, au moyen de ce procédé figuratif, les unités qu'auparavant j'avais prises ensemble pour constituer le nombre 5, et je vois naître ainsi le nombre 12. Que 5 *dussent* être ajoutés à 7, je l'ai, en vérité, pensé dans le concept d'une somme = à 7 + 5, mais non que cette somme soit égale au nombre 12. La proposition arithmétique est donc toujours synthétique ; on s'en convaincra d'autant plus clairement que l'on prendra des nombres quelque peu plus grands, car il est alors évident que, de quelque manière que nous tournions et retournions nos concepts, nous ne pourrions jamais, sans recourir à l'intuition, trouver la somme, au moyen de la simple décomposition de nos concepts.

Un principe quelconque de la géométrie pure est exactement aussi peu analytique. Que la ligne droite soit la plus courte entre deux points, c'est une proposition synthétique. Car mon concept de ce qui est *droit* ne contient rien de quantitatif, mais seulement une qualité. Le concept du plus court est donc entièrement ajouté et ne peut être tiré par aucune analyse du concept de la ligne droite. Il faut recourir ici à l'intuition qui seule rend la synthèse possible.

Ce qui nous fait ici croire communément que le prédicat de ces jugements apodictiques se trouve déjà dans notre concept et que, par conséquent, le jugement est analytique, c'est simplement l'ambiguïté de l'expression. Nous *devons*, en effet, ajouter par la pensée à un concept donné un certain prédicat et cette nécessité tient déjà aux concepts. Mais la question n'est pas de savoir ce que nous *devons* ajouter au concept donné, mais ce que nous *pensons réellement* en lui, quoique d'une manière obscure seulement, et alors, il est manifeste que le prédicat est, à la vérité, adhérent à ces concepts nécessairement, non comme pensé dans le concept même, mais au moyen d'une intuition qui doit s'ajouter au concept. Un petit nombre de principes que les géomètres supposent sont à la vérité réellement analytiques et reposent sur le principe de contradiction ; mais aussi ils ne servent, comme propositions identiques, qu'à l'enchaînement de la méthode et nullement comme principes. Tels, par exemple, $a = a$, le tout est égal à lui-même ; ou $a + b > a$, c'est-à-dire le tout est plus grand que sa partie. Et cependant, ces axiomes mêmes, quoique valables par simples concepts, ne sont admis dans la Mathématique que parce qu'ils peuvent être représentés dans l'intuition.

DOCUMENT N° 10

E. KANT CRITIQUE DE LA RAISON PURE

ANTINOMIES DE LA RAISON PURE

PREMIER CONFLIT DES IDÉES TRANSCENDANTALES

Thèse

Le monde a un commencement dans le temps et il est aussi limité dans l'espace.

Preuve

En effet, si l'on admet que le monde n'ait pas de commencement dans le temps, il y a une éternité écoulée à chaque moment donné, et, par suite, une série infinie d'états successifs des choses dans le monde. Or, l'infinité d'une série consiste précisément en ce que cette série ne peut jamais être achevée par une synthèse successive. Donc, une série infinie écoulée dans le monde est impossible, partant un commencement du monde est une condition nécessaire de son existence, ce qui était le premier point à démontrer.

Quant au second point, si l'on admet le point de vue contraire, le monde sera un tout infini donné de choses existant simultanément. Or, nous ne pouvons concevoir la grandeur d'un quantum qui n'est pas donné avec des limites déterminées à une intuition* qu'au moyen de la synthèse des parties, et la totalité d'un tel quantum que par la synthèse complète ou par l'addition répétée de l'unité à elle-même**. Enfin, pour concevoir comme un tout le monde qui remplit tous les espaces, il faudrait regarder comme complète la synthèse nécessaire des parties d'un monde infini, c'est-à-dire qu'il faudrait considérer comme écoulé un temps infini, dans l'énumération de toutes les choses coexistantes, ce qui est impossible. Donc un agrégat infini de choses réelles ne peut pas être considéré comme un tout donné, ni, par conséquent, comme donné *en même temps*. Donc un monde, quant à son étendue dans l'espace, *n'est pas infini*, mais il est renfermé dans des limites. Ce qui était le second point à démontrer.

* Nous pouvons intuitionner comme un tout un quantum indéterminé, quand il est renfermé dans des limites, sans avoir besoin d'en construire la totalité en le mesurant, c'est-à-dire par la synthèse successive de ses parties. En effet, les limites déterminent déjà cette totalité puisqu'elles écartent toute autre quantité.

** Le concept de la totalité n'est autre chose dans ce cas que la représentation de la synthèse complète de ses parties, car, comme ce n'est que de l'intuition du tout (qui dans ce cas est impossible) que nous pouvons tirer le concept, nous ne pouvons le saisir, du moins en idée, que par la synthèse des parties, poussée jusqu'à l'infini.

Antithèse

Le monde n'a ni commencement dans le temps, ni limite dans l'espace, mais il est infini aussi bien dans le temps que dans l'espace.

Preuve

En effet, admettons que le monde ait un commencement. Comme le commencement est une existence précédée d'un temps où la chose n'est pas, il doit y avoir un temps antérieur où le monde n'était pas, c'est-à-dire un temps vide. Or, dans un temps vide il n'y a pas de naissance possible de quelque chose, parce qu'aucune partie de ce temps n'a en soi plutôt qu'une autre une condition distinctive de l'existence, plutôt que de la non-existence (qu'on suppose, d'ailleurs, que le monde naisse de lui-même ou par une autre cause). Donc, il peut bien se faire que plusieurs séries de choses commencent dans le monde, mais le monde lui-même ne peut pas avoir de commencement, et, par conséquent, il est infini par rapport au temps passé.

Pour ce qui est du deuxième point, si l'on admet d'abord le point de vue contraire, c'est-à-dire que le monde est fini et limité, quant à l'espace, il se trouve dans un espace vide qui n'est pas limité. Il n'y aurait pas seulement, par conséquent, un rapport des choses *dans l'espace*, mais encore un rapport des choses *à l'espace*. Or, comme le monde est un tout absolu, en dehors duquel ne se trouve aucun objet d'intuition, et par suite, aucun corrélatif du monde avec lequel il soit en rapport, le rapport du monde à un espace vide *ne* serait *pas* un rapport du monde à un *objet*. Mais un rapport de cette nature, et par conséquent la limitation du monde par un espace vide, n'est rien ; donc le monde n'est pas limité, quant à l'espace, c'est-à-dire, qu'il est infini, en étendue*.

* L'espace est simplement la forme de l'intuition extérieure (l'intuition formelle).

REMARQUE SUR LA PREMIÈRE ANTINOMIE

I. — Sur la thèse

Dans ces arguments qui s'opposent les uns aux autres, je n'ai pas couru après l'illusion pour établir (comme on dit) une preuve d'avocat, preuve qui se sert à son avantage de l'imprudence de l'adversaire et qui profite volontiers de l'appel qu'il fait à une loi équivoque, pour établir ses propres prétentions injustes sur la réfutation de cette loi. Chacun de ces arguments est tiré de la nature des choses et on laisse de côté l'avantage que pourraient nous fournir les paralogismes où tombent les dogmatiques des deux côtés.

J'aurais pu aussi prouver en apparence la thèse, en mettant en avant, suivant l'habitude des dogmatiques, un concept vicieux de l'infinité d'une grandeur donnée. Une grandeur est *infinie*, quand il ne peut y en avoir de plus grande (c'est-à-dire qui dépasse le nombre de fois qu'y est contenue une unité donnée). Or, aucun nombre n'est le plus grand, parce qu'on peut toujours y ajouter une ou plusieurs unités. Donc, une grandeur infinie donnée est impossible, et, par suite aussi, un monde infini (aussi bien sous le rapport de la série écoulée que sous celui de l'étendue) ; il est donc limité des deux côtés. J'aurais pu disposer ainsi ma preuve, mais ce concept ne s'accorde pas avec ce que l'on entend par un tout infini. On ne représente pas par là *combien ce tout est grand*, et, par suite, son concept n'est pas celui d'un *maximum*, mais on ne conçoit que son rapport à une unité, que l'on choisit arbitrairement, et relativement à laquelle il est plus grand que tout nombre. Or, suivant qu'on prendra l'unité plus grande ou plus petite, l'infini sera aussi plus grand ou plus petit, mais l'infinité, consistant simplement dans le rapport à cette unité donnée, demeurerait toujours la même, bien que, certes, la grandeur absolue du tout ne fût pas connue par là, ce dont il n'est du reste pas question ici.

Le vrai concept transcendantal de l'infinité, c'est que la synthèse successive de l'unité dans la mesure d'un quantum ne puisse jamais être achevée*. Il suit de là très certainement qu'il ne peut pas s'être écoulé une éternité d'états réels qui se succèdent les uns aux autres

* Il contient ainsi une multitude (relativement à l'unité donnée) qui est plus grande que tout nombre, ce qui est le concept mathématique de l'infini.

II. — Sur l'antithèse

La preuve de l'infinité de la série donnée du monde et du concept du monde repose sur ce que, dans le cas contraire, un temps vide, de même qu'un espace vide, devraient former les limites du monde. Or, il ne m'est pas inconnu que l'on cherche à échapper à cette conséquence, en prétendant qu'il peut bien y avoir une limite du monde, quant au temps et quant à l'espace, sans qu'on ait besoin d'admettre par là un temps absolu avant le commencement du monde ou un espace absolu qui s'étende en dehors du monde réel, ce qui est impossible ; je suis parfaitement d'accord, pour cette dernière partie, avec l'opinion soutenue par les philosophes de l'école de Leibniz. L'espace est simplement la forme de l'intuition extérieure, mais non un objet réel qui puisse être intuitionné extérieurement, et il n'est pas un corrélatif des phénomènes mais la forme des phénomènes eux-mêmes. L'espace ne peut pas précéder absolument (par lui seul) comme quelque chose de déterminant dans l'existence des choses, puisqu'il n'est pas un objet, mais seulement la forme d'objets possibles. Par conséquent, les choses, comme phénomènes, déterminent bien l'espace, je veux dire que, parmi tous ses prédicats possibles (grandeur et rapport), elles font que ceux-ci ou ceux-là appartiennent à la réalité, mais l'espace ne peut pas, réciproquement, comme quelque chose qui existe par soi, déterminer la réalité des choses par rapport à la grandeur ou à la figure, puisqu'il n'est rien de réel en lui-même. Il se peut donc bien qu'un espace (plein ou vide)* soit limité par des phénomènes, mais des phénomènes ne peuvent pas être *limités par un espace vide* en dehors d'eux. Il en est de même du temps. Or, tout cela étant admis, il est pourtant incontestable qu'il faut nécessairement admettre ces deux non-êtres : l'espace vide hors du monde et le temps vide avant le monde, aussitôt qu'on admet une limite du monde, que ce soit quant à l'espace ou quant au temps.

En effet, pour ce qui concerne le subterfuge par lequel on veut échapper à la conséquence qui nous fait dire que si le monde a des

mais non un objet réel qui puisse être intuitionné extérieurement. L'espace, avant toutes les choses qui le déterminent (le remplissent ou le limitent), ou plutôt qui donnent une *intuition empirique* qui se règle sous sa forme, n'est, sous le nom d'espace absolu, rien autre chose que la simple possibilité des phénomènes extérieurs, en tant qu'ils peuvent, ou exister par eux-mêmes, ou s'ajouter à des phénomènes donnés. L'intuition empirique n'est donc pas composée de phénomènes et de l'espace (de la perception et de l'intuition vide). L'un n'est pas le corrélatif de la synthèse de l'autre, mais ils sont unis dans une seule et même intuition empirique comme matière et forme de cette intuition. Veut-on mettre l'un de ces deux éléments en dehors de l'autre (l'espace en dehors de tous les phénomènes), il en résulte toutes sortes de déterminations vides de l'intuition externe, qui ne sont cependant pas des perceptions possibles ; par exemple, le mouvement ou le repos du monde dans un espace infini et vide ; ce qui est une détermination de rapport de deux choses entre elles qui ne peut jamais être perçue et qui, par conséquent, est aussi le prédicat d'un simple être de raison.

* On remarque aisément qu'on veut dire par là que *l'espace vide, en tant qu'il est limité par des phénomènes*, partant celui qui est dans l'intérieur du monde, ne contredit pas du moins les principes transcendantaux et que, par conséquent, il pourrait être admis, par rapport à ces principes, bien que sa possibilité ne soit pas affirmée par là.

jusqu'à un moment donné (le moment présent) et que, par suite, le monde doit avoir un commencement.

Quant à la deuxième partie de la thèse, la difficulté d'une série infinie et pourtant écoulée disparaît, il est vrai, car les éléments divers d'un monde infini en étendue sont donnés *simultanément*. Mais pour concevoir la totalité d'une telle multitude, comme nous ne pouvons invoquer des limites qui constituent par elles-mêmes cette totalité dans l'intuition, nous devrons rendre compte de notre concept qui, dans ce cas, ne peut pas partir du tout pour aller à la multitude déterminée des parties, mais doit au contraire montrer la possibilité d'un tout par la synthèse successive des parties. Or, comme cette synthèse ne saurait jamais constituer une série complète, on ne peut concevoir une totalité avant elle ni, par suite, non plus par elle. En effet, le concept de la totalité elle-même est dans ce cas la représentation d'une synthèse achevée des parties ; et cet achèvement — et par suite aussi, son concept — est impossible.

limites (quant au temps et quant à l'espace), le vide infini doit déterminer l'existence des choses réelles, quant à leur grandeur, ce subterfuge ne consiste, sans qu'on s'en doute, qu'en ceci : qu'au lieu d'un *monde sensible*, on conçoit je ne sais quel monde intelligible, qu'au lieu du premier commencement (existence que précède un temps de non-existence), on conçoit en général une existence qui *ne suppose pas d'autre condition* dans le monde, et enfin qu'au lieu de la limite de l'étendue, on conçoit des *bornes* de l'univers et qu'on évite ainsi de rencontrer sur son chemin le temps et l'espace. Mais il n'est ici question que du monde des phénomènes et de sa grandeur ; or, dans ce monde, on ne peut d'aucune manière faire abstraction des conditions déjà exposées de la sensibilité, sans lui enlever son essence. Si le monde sensible est limité, il réside nécessairement dans le vide infini. Veut-on laisser ce vide de côté et, par suite, l'espace en général en qualité de condition *a priori* de la possibilité des phénomènes, alors disparaît tout le monde sensible. Mais dans notre problème ce dernier seul est donné. Le monde intelligible n'est rien que le concept universel d'un monde en général, dans lequel on fait abstraction de toutes les conditions de l'intuition de ce monde et, au regard duquel par conséquent, il n'est aucune proposition synthétique, ni positive ni négative, qui soit possible.

DEUXIÈME CONFLIT DES IDÉES TRANSCENDANTALES

Thèse

Toute substance composée, dans le monde, se compose de parties simples, et il n'existe absolument rien que le simple ou ce qui en est composé.

Preuve

En effet, si l'on admet que les substances composées ne le soient pas de parties simples, il ne subsisterait, en supprimant par la pensée toute composition, aucune partie composée, et (comme il n'y a pas de parties simples) il ne demeurerait non plus aucune partie simple ni, par suite, absolument rien, par conséquent, aucune substance ne serait donnée. Ou bien donc il est impossible de supprimer par la pensée toute composition, ou il faut qu'après cette suppression, il reste quelque chose qui subsiste sans aucune composition, c'est-à-dire le simple. Mais, dans le premier cas, le composé ne se composerait pas de substances (puisqu'en elles la composition n'est qu'une relation accidentelle des substances, sans laquelle relation elles devraient subsister comme des êtres existants par soi). Or, comme ce cas contredit l'hypothèse, il ne reste plus que le

Antithèse

Aucune chose composée, dans le monde, n'est formée de parties simples, et il n'existe rien de simple dans le monde.

Preuve

Supposez qu'une chose composée (une substance) le soit de parties simples. Puisque tout rapport extérieur, par suite aussi toute composition de substances, ne sont possibles que dans l'espace, le composé doit nécessairement être formé d'autant de parties qu'il y a de parties dans l'espace qu'il occupe. Or, l'espace ne se compose pas de parties simples, mais d'espaces. Donc, toute partie du composé doit occuper un espace. Mais les parties absolument premières de tout le composé sont simples. Le simple occupe donc un espace. Or, comme tout le réel qui occupe un espace renferme en soi des éléments divers qu'on trouve les uns en dehors des autres, et comme par suite, il est composé, et cela, il est vrai, en qualité de composé réel, non d'accidents (car les accidents ne peuvent pas être extérieurs les uns aux autres sans substance), mais de substances, il s'ensuit que le simple serait un composé substantiel ; ce qui est contradictoire.

La seconde proposition de l'antithèse, à savoir que dans le monde il n'existe rien de simple, doit seulement ici signifier que l'existence de l'absolument simple ne peut être prouvée par aucune expérience ni par aucune perception, soit extérieure, soit intérieure, second, à savoir que le composé substantiel dans le monde est formé de parties simples. Il suit de là immédiatement que les choses du monde sont toutes des êtres simples, que la composition n'est qu'un état extérieur de ces choses et que, bien que nous ne puissions jamais faire sortir complètement ces substances élémentaires de cet état de liaison et les isoler, la raison doit cependant les concevoir comme les premiers sujets de toute composition, et, par conséquent, comme des êtres simples, antérieurement à cette composition.

et qu'ainsi l'absolument simple n'est qu'une simple idée dont la réalité objective ne peut jamais être démontrée dans n'importe quelle expérience possible et que, par suite, dans l'exposition des phénomènes, elle est sans application et sans objet. En effet, admettons que l'on puisse trouver pour cette idée transcendantale un objet de l'expérience, il faudrait que l'intuition empirique de quelque objet fût reconnue pour une intuition qui ne contînt absolument pas d'éléments divers extérieurs les uns aux autres et ramenés à l'unité. Or, comme, de ce que nous n'avons pas conscience d'un tel divers, on ne peut pas conclure à l'entière impossibilité de ces éléments divers dans quelque intuition d'un objet *(Object)* et que cela, pourtant, est entièrement nécessaire pour l'absolue simplicité, il suit que cette simplicité ne peut être conclue d'aucune perception quelle qu'elle soit. Comme rien ne peut jamais, à titre d'objet *(Object)* absolument simple, être donné dans n'importe quelle expérience possible, et que le monde sensible doit être considéré comme l'ensemble de toutes les expériences possibles, il n'y a rien de simple qui soit donné en lui.

La seconde proposition de l'antithèse va donc beaucoup plus loin que la première qui ne bannit le simple que de l'intuition du composé, tandis que celle-ci l'exclut de toute la nature ; aussi n'a-t-elle pas pu être démontrée par le concept d'un objet donné de l'intuition extérieure (du composé), mais par son rapport à une expérience possible en général.

REMARQUE SUR LA DEUXIÈME ANTINOMIE

I. — Sur la thèse

Quand je parle d'un tout qui se compose nécessairement de parties simples, je n'entends par là qu'un tout substantiel, comme le composé propre, c'est-à-dire l'unité accidentelle du divers qui, *donné séparément* (du moins dans la pensée), est posé en liaison réciproque et forme par là un tout. On devrait proprement appeler l'espace non un composé, mais un tout, puisque ses parties ne sont possibles que dans le tout, tandis que le tout ne l'est point par les parties. Il devrait, en tout cas, pouvoir s'appeler un composé idéal, et non un composé réel. Mais ce n'est là qu'une subtilité. Comme l'espace n'est pas un composé de substances (pas même d'accidents réels), si je supprime en lui toute composition, il ne doit rien rester, pas même le point, car celui-ci n'est possible que comme limite d'un espace (et, par suite, d'un *composé*). L'espace et le temps ne se composent donc pas de parties simples. Ce qui n'appartient qu'à l'état d'une substance, bien qu'ayant une quantité (v. g. le change-

II. — Sur l'antithèse

Contre cette proposition d'une division infinie de la matière, dont la démonstration est simplement mathématique, des objections ont été soulevées par des *monadistes* ; ils se sont fait déjà soupçonner de ne pas vouloir accorder aux preuves mathématiques les plus claires le pouvoir de nous donner quelque connaissance de la nature de l'espace, en tant qu'il est, de fait, la condition formelle de la possibilité de toute matière, et de ne les considérer, au contraire, que comme des conséquences tirées de concepts abstraits, mais arbitraires qui ne sauraient s'appliquer à des choses réelles ; tout comme s'il était possible d'imaginer une autre espèce d'intuition que celle qui est donnée dans l'intuition originaire de l'espace et comme si les déterminations *a priori* de cet espace n'atteignaient pas en même temps tout ce qui n'est possible qu'à la condition de remplir cet espace. Si on les écoutait, il faudrait, outre le point mathématique qui est simple et qui n'est pas une partie, mais simplement la limite d'un espace, concevoir encore des points physiques qui, à la vérité, sont simples aussi, mais qui ont le privilège, comme parties de l'espace, de le remplir par leur simple agrégation. Sans reprendre ici les réfutations communes et claires de cette absurdité, réfutations qui se présentent en foule, comme il est, d'ailleurs, tout à fait inutile de vouloir attaquer subtilement l'évidence mathématique par des concepts simplement discursifs, ment) ne se compose pas non plus du simple, c'est-à-dire qu'un certain degré de changement ne résulte pas d'une addition de plusieurs changements simples. Notre conclusion du composé au simple ne vaut que des choses subsistant par elles-mêmes. Or, des accidents d'état ne subsistent pas par eux-mêmes. Il est donc facile de ruiner la preuve de la nécessité du simple, donné comme formant les parties constitutives de tout composé substantiel, et de perdre ainsi en général sa cause, en étendant cette preuve trop loin et en voulant la rendre valable pour tout composé, sans distinction, comme on l'a déjà fait en réalité bien des fois.

Je ne parle, du reste, ici du simple qu'autant qu'il est donné nécessairement dans le composé, puisque celui-ci peut y être résolu comme en ses parties constitutives. La signification propre du mot *monade* (au sens où l'emploie Leibniz) ne devrait porter que sur le simple qui est *immédiatement* donné comme substance simple (par exemple, dans la conscience de soi) et non comme élément du composé, élément qu'il serait mieux de nommer atome. Et comme je ne veux démontrer les substances simples que par rapport au composé dont elles sont les éléments, je pourrais nommer la thèse de la deuxième antinomie l'*atomistique* transcendantale. Mais comme ce terme est employé depuis longtemps déjà pour désigner un mode particulier d'explication des phénomènes corporels *(molecularum)* et qu'il suppose aussi des concepts empiriques, on peut l'appeler le principe dialectique de la *Monadologie*.

je me borne à remarquer que, si la philosophie est en chicane ici avec la mathématique, c'est uniquement parce qu'elle oublie que, dans cette question, il s'agit seulement des phénomènes et de leurs conditions. Mais il ne suffit pas ici de trouver pour le *concept intellectuel* pur du composé le concept du simple, mais il faut trouver l'*intuition* du simple pour l'intuition du composé (de la matière) et cela est tout à fait possible suivant les lois de la sensibilité, par suite aussi dans les objets des sens. On peut donc toujours admettre, d'un tout de substances conçu simplement par l'entendement pur, que nous devons avoir le simple antérieurement à toute composition de ce tout, mais cela ne s'applique pas au *totum substantiale phaenomenon* qui, comme intuition empirique dans l'espace, implique cette propriété nécessaire qu'aucune partie n'en est simple, puisqu'aucune partie de l'espace n'est simple. Cependant, les monadistes ont été assez habiles pour vouloir échapper à cette difficulté, en n'admettant pas l'espace comme une condition de la possibilité des objets de l'intuition extérieure (des corps) et en supposant, au contraire, cette intuition et le rapport dynamique des substances en général, comme la condition de la possibilité de l'espace. Or, nous n'avons un concept des corps qu'en tant qu'ils sont des phénomènes, et, comme tels, ils supposent nécessairement l'espace, comme la condition de la possibilité de tout phénomène extérieur. Le subterfuge est donc en pure perte et nous l'avons déjà suffisamment démasqué plus haut dans l'Esthétique transcendantale. Si les corps étaient des choses en soi, la preuve des monadistes serait incontestablement valable.

La deuxième assertion dialectique a cela de particulier qu'elle a contre elle une assertion dogmatique qui, de toutes les assertions sophistiques, est la seule qui entreprenne de démontrer péremptoirement, dans un objet de l'expérience, la réalité de ce que nous mettons, plus haut, au nombre des idées transcendantales, c'est-à-dire la simplicité absolue de la substance, ce qui revient à démontrer que l'objet du sens interne, le moi qui pense, est une substance absolument simple. Sans m'étendre à présent sur ce point (qui a été examiné en détail plus haut), je me borne à remarquer que si quelque chose est conçu simplement comme objet, sans qu'on y ajoute quelque détermination synthétique de son intuition (comme cela arrive précisément pour la représentation tout à fait nue, moi) je ne puis assurément percevoir rien de divers ni aucune composition dans une telle représentation. De plus, comme les prédicats par lesquels je conçois cet objet sont simplement des intuitions du sens interne, je n'y puis rien trouver qui prouve des éléments divers en dehors les uns des autres, ni, par suite, une composition réelle. La conscience de soi présente donc ceci de particulier que, puisque le sujet qui pense est en même temps son propre objet *(Object)*, il ne peut pas se diviser lui-même (bien qu'il puisse diviser les déterminations qui lui sont inhérentes) : car, par rapport à lui-même, tout objet est une unité absolue. Il n'en est pas moins vrai que, si on considère ce sujet *extérieurement*, comme un objet de l'intuition, il manifestera pourtant une composition dans le phénomène. Or, c'est toujours ainsi qu'il faut le considérer quand on veut savoir s'il y a ou non en lui des éléments divers *extérieurs* les uns aux autres.

DOCUMENT N° 11

LETTRE DE SPINOZA A LOUIS MEYER
DU 20 AVRIL 1663
SUR L'INFINI

(...)

Le problème de l'Infini a toujours paru à tous très difficile et même inextricable, parce qu'on n'a pas distingué ce qui est infini par une conséquence de sa nature ou par la vertu de sa définition et ce qui n'a point de limite non par la vertu de son essence mais par celle de sa cause. Et aussi pour cette raison qu'on n'a pas distingué entre ce qui est dit infini parce que sans limites, et une grandeur dont nous ne pouvons déterminer ou représenter les parties par aucun nombre, bien que nous en connaissions la valeur la plus grande et la plus petite. Et enfin parce qu'on n'a pas distingué entre ce que nous pouvons seulement concevoir par l'entendement, mais non imaginer, et ce que nous pouvons aussi nous représenter par l'imagination. Si l'on avait tenu compte de toutes ces distinctions, on n'aurait pas été accablé sous le poids de tant de difficultés. On aurait clairement connu quel Infini ne peut être divisé en parties ou est sans parties, quel au contraire est divisible, et cela sans qu'il y ait contradiction. On aurait connu, en outre, quel Infini peut être sans difficulté conçu comme plus grand qu'un autre Infini, quel au contraire ne peut l'être, et c'est ce que je vais montrer clairement ci-après. Auparavant toutefois il me faut traiter en quelques mots de quatre sujets : la Substance, le Mode, l'Eternité, la Durée.

Au sujet de la Substance, voici ce que je veux que l'on considère : 1° l'existence appartient à son essence, c'est-à-dire qu'il suit qu'elle existe de sa seule essence et définition ; si ma mémoire ne me trompe, je vous ai démontré cela de vive voix et sans le secours d'autres propositions. 2^{e} point qui découle du premier : il n'existe pas plusieurs substances de même nature, mais une substance unique. 3^{e} point enfin : une substance ne peut être conçue autrement que comme infinie. J'appelle Modes, d'autre part, les affections d'une Substance, et leur définition, n'étant pas celle d'une substance, ne peut envelopper l'existence. C'est pourquoi, bien que les Modes existent, nous pouvons les concevoir comme n'existant pas, d'où suit que, si nous avons égard à la seule essence des modes et non à l'ordre de toute la nature, nous ne pouvons conclure de ce que présentement ils existent, qu'ils existeront par la suite ou qu'ils n'existeront pas, qu'ils ont existé antérieurement ou n'ont pas existé. On voit clairement par là que nous concevons l'existence des Modes comme entièrement différente de celle de la Substance. D'où se tire la différence entre l'Eternité et la Durée ; sous le concept de Durée nous ne pouvons concevoir que l'existence des modes, tandis que celle de la Substance est conçue comme Eternité, c'est-à-dire comme une jouissance infinie de l'existence ou de l'être.

De tout cela il ressort clairement que si, comme il arrive bien souvent, nous avons égard à la seule essence des modes et non à l'ordre de la nature, nous pouvons fixer à volonté et cela sans porter la moindre atteinte au concept que nous en avons, l'existence et la durée, la concevoir plus grande ou plus petite et la diviser en parties. Sur l'Eternité au contraire et sur la Substance puisqu'elles ne peuvent être conçues autrement que comme infinies, aucune de ces opérations ne saurait s'exécuter, sans que le concept même que nous avons d'elles fût détruit. Ceux-là donc tiennent de vains propos, pour ne pas dire qu'il déraisonnent, qui pensent que la Substance étendue est composée de parties, c'est-à-dire de corps réellement distincts les uns des autres. C'est comme si, en joignant des cercles, en les accumulant, l'on s'efforçait de composer un triangle ou un carré ou n'importe quoi d'une essence tout opposée à celle du cercle. Tout ce fatras d'arguments par lesquels les philosophes veulent habituellement montrer que la Substance étendue est finie, s'effondre de lui-même : tous ces discours supposent une Substance corporelle composée de parties. De la même manière d'autres auteurs, après s'être persuadés que la ligne se compose de points, ont pu trouver beaucoup d'arguments pour montrer qu'une ligne n'est pas divisible à l'infini.

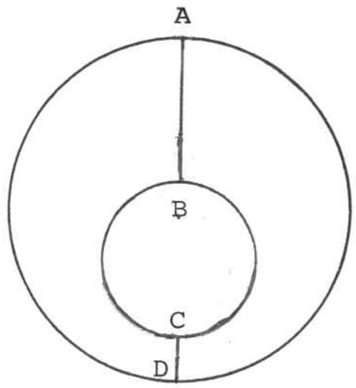
Si cependant vous demandez pourquoi nous sommes si naturellement portés à diviser la substance étendue, je répondrai : c'est parce que la grandeur est conçue par nous de deux façons : abstraitement ou superficiellement ainsi que nous la représente l'imagination avec le concours des sens, ou comme une substance, ce qui n'est possible qu'au seul entendement. C'est pourquoi, si nous considérons la grandeur telle qu'elle est pour l'imagination, ce qui est le cas le plus fréquent et le plus aisé, nous la trouverons divisible, finie, composée de parties et multiple. Si, en revanche, nous la considérons telle qu'elle est dans l'entendement, et si la chose est perçue comme elle est en elle-même, ce qui est très difficile, alors, ainsi que je vous l'ai suffisamment démontré auparavant, on la trouve infinie, indivisible et unique.

Maintenant, du fait que nous pouvons à volonté délimiter la Durée et la Grandeur, quand nous concevons celle-ci en dehors de la Substance et faisons abstraction en celle-là de la façon dont elle découle des choses éternelles, proviennent le Temps et la Mesure. Le Temps sert à délimiter la

Durée, la Mesure, à délimiter la Grandeur de telle sorte que nous les imaginions facilement, autant que la chose est possible. Puis, du fait que nous séparons de la Substance même les affections de la Substance et les répartissons en classes pour les imaginer aussi facilement qu'il est possible, provient le Nombre à l'aide duquel nous arrivons à des déterminations précises. On voit clairement par là que la Mesure, le Temps et le Nombre ne sont rien que des manières de penser ou plutôt d'imaginer. Il n'est donc pas étonnant que tous ceux qui ont entrepris de concevoir la marche de la nature à l'aide de notions semblables et encore mal comprises, se soient embarrassés dans des difficultés inextricables dont ils n'ont pu se tirer qu'en brisant tout et en admettant les pires absurdités. Comme il y a beaucoup de choses, en effet, que nous ne pouvons saisir que par le seul entendement, non du tout par l'Imagination, et telles sont, avec d'autres, la Substance et l'Eternité, si l'on entreprend de les ranger sous des notions comme celles que nous avons énumérées, qui ne sont que des auxiliaires de l'Imagination, on fait tout comme si l'on s'appliquait à déraisonner avec son imagination. Les modes mêmes de la Substance ne pourront jamais être connus droitement, si on les confond avec ces Etres de raison que sont les auxiliaires de l'imagination. Quand nous faisons cette confusion, en effet, nous les séparons de la Substance et faisons abstraction de la manière en laquelle ils découlent de l'Eternité, c'est-à-dire que nous perdons de vue les conditions sans lesquelles ces modes ne peuvent être droitement connus.

Pour le voir plus clairement, prenez cet exemple : dès que l'on aura conçu abstraitement la Durée et que, la confondant avec le Temps, on aura commencé de la diviser en parties, il deviendra impossible de comprendre en quelle manière une heure, par exemple, peut passer. Pour qu'elle passe, en effet, il sera nécessaire que la moitié passe d'abord, puis la moitié du reste et ensuite la moitié de ce nouveau reste, et retranchant ainsi à l'infini la moitié du reste, on ne pourra jamais arriver à la fin de l'heure. C'est pour cela que beaucoup, n'ayant pas accoutumé de distinguer les êtres de raison des choses réelles, ont osé prétendre que la Durée se composait d'instants et, de la sorte, pour éviter Charybde, ils sont tombés en Scylla. Car il revient au même de composer la Durée d'instants et de vouloir former un nombre en ajoutant des zéros.

On voit encore par ce qui vient d'être dit, que ni le nombre ni la mesure ni le temps, puisqu'ils ne sont que des auxiliaires de l'imagination, ne peuvent être infinis, sans quoi le nombre ne serait plus le nombre, ni la mesure, la mesure, ni le temps, le temps. D'où l'on voit clairement pourquoi beaucoup de gens, confondant ces trois êtres de raison, avec les choses réelles dont ils ignoraient la vraie nature, ont nié l'Infini. Mais pour mesurer la faiblesse de leur raisonnement, rapportons-nous-en aux mathématiciens qui ne se sont jamais laissé arrêter par des arguments de cette qualité, quand ils avaient des perceptions claires et distinctes. Outre, en effet, qu'ils ont trouvé beaucoup de grandeurs qui ne se peuvent exprimer par aucun nombre, ce qui suffit à montrer l'impossibilité de tout déterminer par les nombres, ils connaissent aussi des grandeurs qui ne peuvent être égalées à aucun nombre



mais dépassent tout nombre assignable. Ils n'en concluent pas cependant que de telles grandeurs dépassent tout nombre par la multitude de leurs parties ; cela résulte de ce que, à leurs yeux, ces grandeurs ne se prêtent, sans une contradiction manifeste, à aucune détermination numérique. Par exemple, la somme des distances inégales comprises entre deux cercles AB et CD et celle des variations que la matière en mouvement peut éprouver dans l'espace ainsi délimité, dépassent tout nombre assignable. Cela ne résulte pas de la grandeur excessive de cet espace, car, si petit que nous le supposions, la somme des distances inégales dépassera toujours tout nombre. Cela ne résulte pas, non plus, comme il arrive dans d'autres cas, de ce que nous n'avons pas pour ces distances de maximum et de minimum car, dans cet exemple, il y a un maximum AB et un minimum BC ; cela résulte seulement de ce que la nature de l'espace compris entre deux cercles non concentriques n'admet pas un nombre déterminé de distances inégales. Si donc l'on voulait déterminer par le nombre la somme de toutes ces distances inégales, il faudrait faire en même temps qu'uncercle ne fût plus un cercle.

De même, pour revenir à notre sujet, si l'on voulait déterminer tous les mouvements de la matière qui ont eu lieu jusqu'à l'instant présent, en les ramenant ainsi que leur durée à un nombre et à un temps déterminés, ce serait comme si l'on s'efforçait de priver de ses affections la Substance corporelle que nous ne pouvons concevoir autrement que comme existante, et de faire qu'elle n'ait pas la nature qui est la sienne. Je pourrais démontrer cela clairement, ainsi que beaucoup d'autres points que j'ai touchés dans cette lettre, si je ne le jugeais inutile.

Dans tout ce qui précède on voit clairement que certaines choses sont infinies par leur nature et ne peuvent être conçues en aucune façon comme finies ; que certaines choses le sont par la vertu de la cause dont elles dépendent, et que toutefois, quand on les conçoit abstraitement, elles peuvent être divisées en parties et être regardées comme finies, que certaines autres enfin peuvent être dites infinies ou, si vous l'aimez mieux, indéfinies, parce qu'elles ne peuvent être égalées par aucun nombre, bien qu'on les puisse concevoir comme plus grandes ou plus petites ; il n'est donc pas nécessaire que des choses qu'on ne peut égaler par un nombre soient égales, comme on le voit assez par l'exemple donné ci-dessus et par beaucoup d'autres.

Je vous ai enfin, en peu de mots, mis sous les yeux, sauf erreur, la cause des erreurs et des confusions qui se sont produites au sujet de cette question de l'Infini et j'ai expliqué ces erreurs de telle sorte qu'il n'y ait plus, à ce que je pense, une seule question relative à l'Infini que je n'aie pas touchée ou dont la solution ne se déduise très facilement de mon exposé. Je ne juge donc pas qu'il vaille la peine de vous retenir plus longtemps sur ce sujet.

Je voudrais cependant noter encore que les Péripatéticiens modernes ont mal compris, à ce que je crois, une démonstration donnée par les Péripatéticiens anciens pour tenter d'établir l'existence de Dieu. Telle, en effet, que je la trouve dans un certain auteur juif appelé Rab Ghasdaj, voici comment elle s'énonce. S'il existe un progrès à l'infini des causes dans la nature, tout ce qui existe sera l'effet d'une cause. Or, à aucune chose qui dépend d'une cause, il n'appartient d'exister par la vertu de sa nature. Donc il n'existe dans la nature aucune chose à l'essence de laquelle il appartient d'exister nécessairement. Mais cette conclusion est absurde, donc la supposition d'où on la déduit l'est aussi. La force de l'argument ne réside pas en ce qu'il est impossible qu'un Infini en acte soit donné ou encore un progrès des causes à l'infini, mais seulement dans cette supposition que les choses qui n'existent pas nécessairement par nature ne sont pas déterminées à exister par une chose qui, elle, existe.

(...)

DOCUMENT N° 12

TROISIEME PROPOSITION DU LIVRE D'ARCHIMEDE

DE LA MESURE DU CERCLE

GLOSE SUR LA PROPOSITION TIREE

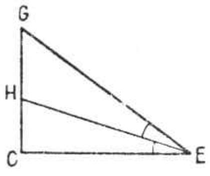
DE MATHEMATIQUES ET MATHEMATICIENS

P. DEDRON ET J. ITARD

Le texte de cette troisième proposition est certainement difficile. La marche du raisonnement est très simple et élégante, mais les calculs n'étant pas effectués — seuls leurs résultats sont donnés — l'ensemble est pénible à suivre.

Comme il représente un bel exemple de géodésie (géométrie pratique) et de logistique (calcul numérique) nous allons nous efforcer de l'éclaircir. Les calculs portent sur l'extraction des racines carrées.

La partie géométrique s'appuie sur le théorème de Pythagore, sur celui qui est relatif à la bissectrice d'un angle d'un triangle (Euclide, liv. VI, *prop.* 3) *et, dans la deuxième partie, sur un corollaire de cette proposition.*



Première partie. — *On va réitérer le raisonnement suivant : on sait que* $\frac{EC}{CG} > \frac{a_1}{b_1}$. *On en tire* $\frac{EC^2}{CG^2} > \frac{a_1^2}{b_1^2}$ *(a_1 et b_1 sont deux nombres), puis*

$$\frac{EG^2}{CG^2} = \frac{EC^2 + CG^2}{CG^2} > \frac{a_1^2 + b_1^2}{b_1^2},$$

et si a_2 est une racine carrée par défaut *de*

$$a_1^2 + b_1^2, \quad \frac{EG}{CG} > \frac{a_2}{b_1}.$$

Mais, EH étant bissectrice de l'angle CEG,

$$\frac{EC}{HC} = \frac{GE}{HG} = \frac{EC + GE}{CG} > \frac{a_1 + a_2}{b_1},$$

donc :

$$\frac{EC}{HC} > \frac{a_1 + a_2}{b_1} = \frac{a_3}{b_1}$$

On formera donc la suite de nombres :

$$a_1, \; a_2 < \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \; a_3 = a_1 + a_2, \; a_4 < \sqrt{a_3^2 + b_1^2}, \; etc...$$

Archimède part d'un angle de 30°, *de façon qu'au départ* $\frac{EC}{CF}$ *dans sa figure soit égal à* $\sqrt{3}$, *qui est supérieur à* $\frac{265}{153}$.

Il forme alors la suite

$$b_1 = 153, a_1 = 265, \; a_2 = 591 \, \frac{1}{8} < \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \text{ etc...}$$

pour arriver à :

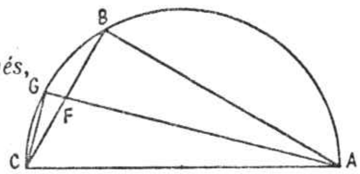
$$\frac{EC}{CL} > \frac{4\,673 \, \frac{1}{2}}{153}.$$

Ayant constaté que CL est le demi-côté du polygone circonscrit de 96 côtés il conclut aisément.

Deuxième partie :

Ici, AG, bissectrice de l'angle A du triangle CAB, coupe le cercle en G, CB en F.

On sait que



$\frac{AB}{BC} < \frac{a_1}{b_1}$, a_1 et b_1 *étant des nombres donnés,*

$$\textit{et que } \frac{AC}{BC} < \frac{a_2}{b_1}.$$

On se propose de calculer une valeur par excès de $\frac{AG}{CG}$. *La similitude des triangles, FGC, CGA, donne*

$$\frac{AG}{CG} = \frac{CG}{GF} = \frac{AC}{CF}.$$

Mais (théorème de la bissectrice)

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AC + AB}{BC} < \frac{a_2 + a_1}{b_1},$$

et

$$\frac{AG}{CG} < \frac{a_2 + b_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_1}$$

$$\frac{AC^2}{CG^2} = \frac{AG^2 + GC^2}{CG^2} < \frac{a_3^2 + b_1^2}{b_1^2}$$

et si

$$a_4 > \sqrt{a_3^2 + b_1^2}, \quad \frac{AC}{CG} < \frac{a_4}{b_1}.$$

On formera donc ici une suite de nombres a_1, a_2, a_3, a_4, mais par extraction des racines carrées par excès.

De plus, et par deux fois, Archimède simplifie les rapports obtenus pour ne pas manipuler de trop grands nombres. En résumé les calculs d'Archimède conduisent aux deux tableaux que nous empruntons à Paul Tannery, en modifiant ses notations :

POLYGONES CIRCONSCRITS				POLYGONES INSCRITS		
Nombre de côtés	*a* de rang impair	*a* de rang pair	b	*a* de rang impair	*a* de rang pair	b
6	265	306		1 351	1 560	780
12	571	$591\frac{1}{8}$		2 911	$3\,013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	780
24	$1\,162\frac{1}{8}$	$1\,172\frac{1}{8}$	153	$5\,924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$		780
				1 823	$1\,838\frac{9}{11}$	240
48	$2\,334\frac{1}{4}$	$2\,339\frac{1}{4}$		$3\,661\frac{9}{11}$		240
				1 007	$1\,009\frac{1}{6}$	66
96	$4\,673\frac{1}{2}$			$2\,016\frac{1}{6}$	$2\,017\frac{1}{4}$	66

D'où la conclusion

$$3\frac{1}{7} > \frac{96 \times 153}{4\,673\frac{1}{2}} > \pi > \frac{96 \times 66}{2\,017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$$

Ce résultat servira pendant longtemps de contrôle à toute tentative de quadrature. Ainsi lorsque Ptolémée adoptera pour π la valeur sexagésimale 3 ; 8, 30, *valeur qui se déduit de ses tables trigonométriques, il remarquera pour la justifier qu'elle est à très peu près la moyenne des deux bornes archimédiennes. Il faut constater toutefois que cette valeur ptolémaïque est la meilleure qu'il soit possible d'obtenir avec un nombre de trois places sexagésimales.*

DOCUMENT N° 13

TRADUCTION ET COMMENTAIRE

DE PAUL VER EECKE

DANS LES OEUVRES D'ARCHIMEDE

LE PROBLÈME DES BŒUFS

Problème qu'Archimède trouva, et qu'il destina, sous forme d'épigramme, dans une lettre adressée à Eratosthène de Cyrène, à ceux qui, dans Alexandrie, s'occupaient de ces matières.

Ami, si tu as la sagesse en partage, apporte grand soin à calculer à combien s'élevait la multitude des bœufs du Soleil qui, jadis, dans les plaines de l'île de la Sicile Thrinacienne, paissaient, répartis en quatre troupeaux de couleurs différentes, l'un blanc de lait, l'autre d'un noir luisant, le troisième brun et le quatrième tavelé. Il y avait dans chaque troupeau un nombre considérable de taureaux répartis dans les proportions suivantes : imagine, mon ami, que les blancs étaient en nombre égal à la moitié augmentée du tiers des taureaux noirs, et augmentée de tous les bruns, tandis que les noirs étaient en nombre égal aux quatrième et cinquième parties des tavelés, accrues de tous les bruns. Considère, d'autre part, que les tavelés, restants, étaient en nombre égal aux sixième et septième parties des blancs, accrues de tous les bruns. Les vaches étaient réparties de la manière suivante : Les blanches étaient en nombre précisément égal aux troisième et quatrième parties de tout le troupeau noir, tandis que les noires étaient de nouveau en nombre égal aux quatrième et cinquième parties des tavelées qui étaient toutes venues paître en compagnie des taureaux(1). Les tavelées étaient, d'autre part, en nombre égal aux cinquième et sixième parties de tout le troupeau brun, tandis que les brunes étaient

1. C'est-à-dire en compagnie des taureaux tavelés; donc le nombre des vaches noires est égal aux quatrième et cinquième parties de l'ensemble des vaches et des taureaux tavelés.

en nombre égal à la moitié de la troisième partie accrue de la septième partie du troupeau blanc (1).

Ami, si tu me dis exactement combien il y avait de bœufs du Soleil, quel était en particulier le nombre des taureaux gras et en particulier le nombre des vaches pour chacune des couleurs, on ne te qualifiera ni d'ignorant ni de malhabile en matière de nombres ; mais tu ne pourras cependant pas encore compter parmi les savants. Dès lors, observe encore les diverses manières dont les bœufs du Soleil étaient disposés: lorsque les taureaux blancs joignaient leur multitude aux noirs, ils se maintenaient en un groupe compact ayant la même mesure en profondeur qu'en largeur, et ce carré remplissait entièrement les immenses plaines de la Thrinacie. D'autre part, les bruns et les tavelés réunis, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ou sans qu'ils manquassent, étaient groupés de telle sorte que, le premier rang étant constitué par un seul, ils formaient graduellement une figure triangulaire (2).

Ami, si tu trouves toutes ces choses de pair, et si, en un mot, concentrant tes esprits, tu exprimes toutes les mesures de ces multitudes,

---

1. La première partie de l'énoncé du problème engage donc huit inconnues dans sept équations. Si nous désignons respectivement les taureaux blancs, noirs, bruns et tavelés par les lettres B, N, B', T, et les vaches blanches, noires, brunes et tavelées par les lettres b, n, b', t, on aura :
$B=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})N+B'$; $N=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})T+B'$; $T=(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})B+B'$; $b=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(N+n)$; $n=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(T+t)$; $t=(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(B'+b')$, et $b'=(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{7})(B+b)$.

2. La seconde partie de l'énoncé impose les conditions auxquelles doivent satisfaire les quatre premières inconnues : $B+N=$ nombre carré $=p^2$, et $B'+T=$ nombre triangulaire $=\frac{q(q+1)}{2}$. Toutefois, si l'on considère qu'une pièce de bétail est plus longue que large, le nombre des taureaux blancs et noirs réunis dans la figure quadrangulaire peut ne pas être un nombre carré, mais un produit de deux nombres différents. De là, une interprétation de nature à simplifier le problème dans une certaine mesure, d'après laquelle les deux relations précédentes deviennent : $B+N=$ produit de deux nombres entiers, et $B'+T=$ nombre triangulaire. Archimède ne nous a pas laissé d'indications sur la marche qu'il aurait suivie pour résoudre ce problème difficile, proposé en défi aux savants de l'Ecole d'Alexandrie. Le problème a cependant fait l'objet d'études intéressantes de la part de plusieurs mathématiciens modernes. Ainsi Wurm a résolu le problème dans le cas le plus simple que nous avons mentionné, et il arrive à un chiffre de plus de six mille milliards de têtes de bétail. Amthor a traité le problème dans le cas plus compliqué du nombre carré ; il arrive à des expressions dont l'établissement seul peut intéresser au point de vue de l'algèbre supérieure, mais dont le développement complet aboutirait à des chiffres qui dépassent l'entendement, car il estime que la totalité des bœufs s'exprimerait par un nombre dont les chiffres rempliraient un volume de plus de 660 pages d'une impression analogue à celle d'une table de logarithmes.

va, te glorifiant d'avoir remporté la victoire, et persuadé que l'on te juge complètement consommé dans cette science [1].

1. On pourra consulter au sujet du *Problème des Bœufs* d'Archimède :

G. HERMANN. *De Archimedis problemate bovino*, Lipsiae, 1828 (thèse académique de 12 pages).

G. H. F. NESSELMANN. *Algebra der Griechen*. Berlin, 1842, p. 481.

B. KRUMBIEGEL. *Zeitschrift für Math. u. Physik*, XXV (1880), p. 121.

TERQUEM. *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique*, I, p. 121.

A. I. H. VINCENT. *Bulletin Terquem*, I, p. 165.

AMTHOR. *Zeitschrift für Math. u. Physik*. XXV, p. 156. Cette étude comporte la solution donnée par Wurm.

P. TANNERY. *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux*, 1880, III, p. 369, et *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1881, V, p. 25.

J. L. HEIBERG. *Quaestiones Archimedeae*. Copenhague, 1879, p. 66-69.

M. CANTOR. *Zeitschrift für Math. u. Physik*. XXIV, p. 169.

T. L. HEATH. *Diophantus of Alexandria*, p. 142.

T. L. HEATH. *The Works of Archimedes*. Cambridge, 1897, p. 320.

Une solution en symboles modernes du *Problème des Bœufs* d'Archimède a été donnée par Gino Loria dans son ouvrage *Scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano, 1914.

DOCUMENT N° 14

CORRESPONDANCE CANTOR-DEDEKIND

EXTRAIT DE

PHILOSOPHIE MATHEMATIQUE

DE

JEAN CAVAILLES

Halle, le 25 juin 1877

Sur une carte postale que je vous ai adressée avant-hier, j'ai reconnu la lacune découverte par vous dans ma démonstration, et remarqué en même temps que j'étais en état de la combler, bien que je ne puisse me retenir de regretter quelque peu que cette question ne se laisse pas régler sans faire intervenir des considérations plus compliquées ; mais cela tient sans doute à la nature même du sujet, il faut donc que je me console ; peut-être se trouvera-t-il plus tard que ce qui manque dans cette démonstration peut se traiter plus simplement qu'il ne serait en mon pouvoir de faire en ce moment. Mais comme je tiens avant tout à vous convaincre, si possible, de l'exactitude de mon théorème, savoir :

(A) « Une multiplicité continue à e dimensions (a) peut être mise en correspondance univoque avec une multiplicité continue à une dimension, ou (ce qui n'est qu'une autre forme du même théorème) les points (éléments) d'une multiplicité à ρ dimensions peuvent se déterminer par une coordonnée réelle t de telle sorte qu'à chaque valeur réelle de t dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ corresponde un point de la multiplicité, mais aussi réciproquement, qu'à chaque point de la multiplicité corresponde une valeur déterminée de t dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$. »

(a) *Une multiplicité continue à e dimensions* : en allemand *Eine nach e Dimensionen ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit.*

je me permets de vous en soumettre une autre démonstration (1), sur laquelle j'étais même tombé plus tôt que sur celle-là.

Je pars du théorème suivant lequel tout nombre irrationnel $e \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$ peut être représenté d'une manière complètement déterminée par une fraction continue :

$$e = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \ddots + \cfrac{1}{x_\nu + \ddots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$$

où α_ν est un nombre entier rationnel positif. A chaque nombre irrationnel $\begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$ correspond une suite infinie déterminée α_ν, et, réciproquement, à chaque suite illimitée α_ν correspond un nombre irrationnel déterminé $e \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$.

Si $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$, sont alors ρ grandeurs indépendantes les unes des autres, dont chacune peut prendre toutes les valeurs irrationnelles de l'intervalle $(0 \ldots 1)$ et ces valeurs seulement, posons :

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{1.1}, \alpha_{1.2}, \ldots, \alpha_{1.\nu}, \ldots) \\ e_2 &= (\alpha_{2.1}, \alpha_{2.2}, \ldots, \alpha_{2.\nu}, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_\rho &= (\alpha_{\rho.1}, \alpha_{\rho.2}, \ldots, \alpha_{\rho.\nu}, \ldots) \end{aligned}$$

et définissons à partir de ces nombres un $\overline{\rho + 1}^{\text{ieme}}$ nombre irrationnel :

$$\delta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots)$$

par le système d'équations :

$$(1) \qquad \beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}, \ \ldots \ \beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma.n}, \ \ldots \ \beta_{n\rho} = \alpha_{\rho,n}$$

(1) [Publiée sous une forme semblable dans le travail *Contribution à la théorie des multiplicités* (*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*) *Crelle*, 84 (1878) (*Œuvres complètes*, p. 122).]

alors réciproquement, chaque nombre irrationnel $\partial \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$ engendrera, par l'intermédiaire de (I), un système déterminé $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$.

On ne rencontre pas ici, me semble-t-il, l'obstacle que vous avez relevé pour ma précédente démonstration.

Il s'agit alors de démontrer le théorème suivant :

(B) « Un nombre variable e, qui peut prendre toutes les valeurs *irrationnelles* de l'intervalle $(0 \ldots 1)$, peut être mis en correspondance *univoque* avec un nombre x, qui prend *toutes* les valeurs de cet intervalle sans exception. »

Car, une fois ce théorème (B) démontré, on met alors en correspondance univoque une par une les variables désignées plus haut par $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ et ∂ respectivement avec d'autres variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_\rho, y$$

qui ont toutes un domaine de variation (*) sans restrictions dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$. On a ainsi défini également une relation univoque et réciproque entre le système

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\rho),$$

d'une part, et l'unique variable y, de l'autre, ce qui conduit à la démonstration du théorème (A).

Pour démontrer maintenant (B), on met d'abord tous les nombres *rationnels* de l'intervalle $(0 \ldots 1)$ (extrémités comprises) sous forme d'une suite, soit :

$$r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$$

Les valeurs que peut prendre la variable e sont alors *toutes* celles de l'intervalle $(0 \ldots 1)$ à *l'exception* des nombres r_ν.

On prend ensuite arbitrairement dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ une suite infinie ε_ν de nombres *irrationnels*, qui satisfont seulement aux conditions $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ et $\lim (\varepsilon_\nu) = 1$ pour $\nu = \infty$, et l'on désigne par f une grandeur variable qui peut prendre

(*) *Domaine de variation* : en allemand *Spielraum*.

toutes les valeurs réelles $\begin{smallmatrix} \geq 0 \\ \leq 1 \end{smallmatrix}$ à l'exception des valeurs ε_ν. Les deux grandeurs variables e et f soumises aux restrictions indiquées peuvent alors être mises en relation univoque et réciproque par les définitions suivantes :

si f n'est égal à aucun r_ν, soit alors pour le e correspondant :

$$e = f;$$

si $f = r_\nu$, soit alors pour le e correspondant $e = \varepsilon_\nu$; on se convaincra facilement que, réciproquement : si e n'est égal à aucun ε_ν, le f correspondant $= e$ et si $e = \varepsilon_\nu$, alors $f = r_\nu$.

Le théorème (B) est alors ramené au suivant :

(C) « Un nombre f, qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots 1)$, à l'exception de certaines d'entre elles ε_ν, satisfaisant aux conditions suivantes : $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ et $\lim \varepsilon_\nu = 1$, peut être mis en correspondance univoque avec une variable continue x qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots 1)$ sans exception. »

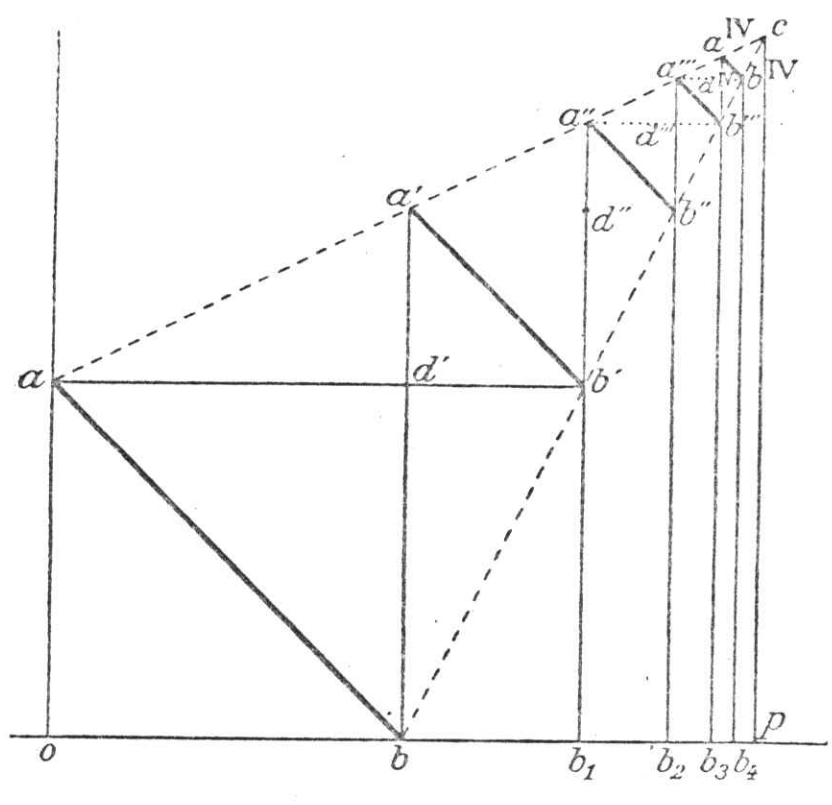
Nous utiliserons ici le fait que les points $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ forment une *suite* (*), et que, par conséquent, l'intervalle $(0 \ldots 1)$ est divisé par eux en une infinité d'intervalles partiels.

Comme vous ne manquerez pas de le voir, ce théorème (C) peut alors se démontrer par application successive du théorème suivant :

(D) « Un nombre y, qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots 1)$ à la seule exception de la valeur 0, peut être mis en correspondance univoque avec un nombre x qui prend toutes les valeurs de cet intervalle sans exception. »

Ce dernier théorème (D) peut alors être reconnu comme vrai par la considération de la curieuse courbe ci-jointe. Les coordonnées d'un point courant m de cette courbe sont mes grandeurs x et y dont l'une est une fonction univoque de l'autre ; mais, tandis que x prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots 1)$, le domaine de variation de y est le même intervalle *à la seule exception de la valeur* 0.

(*) *Une suite* : en allemand ***Eine Folge***.



La courbe se compose d'une infinité de segments de droites parallèles, devenant toujours plus petits, $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$, ..., et du point c. *Les extrémités* b, b', b'', ..., *ne sont pas considérées comme appartenant à la courbe.* Les longueurs des segments sont :

$$\overline{op} = \overline{pc} = 1 \; ; \quad \overline{ob} = \frac{1}{2} \; ; \quad \overline{bb_1} = \frac{1}{4}, \quad \overline{b_1b_2} = \frac{1}{8}, \quad \overline{b_2b_3} = \frac{1}{16} \cdots$$

$$\overline{oa} = \frac{1}{2} \; ; \quad \overline{a'd'} = \frac{1}{4} \; ; \quad \overline{a''d''} = \frac{1}{8} \; ; \quad \overline{a'''d'''} = \frac{1}{16}, \cdots$$

J'ai suivi avec intérêt depuis plusieurs années les efforts que l'on a consacrés, après Gauss, Riemann, Helmholtz et d'autres, à la clarification des questions qui touchent aux premières hypothèses de la géométrie. Il m'est apparu à cet égard que toutes les recherches faites dans ce domaine partent *elles-mêmes* d'une hypothèse non démontrée, qui ne m'apparaît pas comme allant de soi, mais bien plutôt comme ayant besoin d'être fondée. Je veux parler de l'hypothèse selon laquelle une multiplicité continue ρ fois étendue (a) nécessite pour la détermination de ses éléments ρ coordonnées réelles indépendantes entre-elles, le nombre de ces coordonnées ne pouvant être, pour une même multiplicité, ni augmenté ni diminué.

J'en étais venu à croire moi aussi à cette hypothèse, j'étais presque persuadé de son exactitude ; mon point de vue différait seulement de tous les autres en ceci, que je considérais cette hypothèse comme un théorème qui nécessitait au plus haut point une démonstration, et j'avais précisé mon point de vue sous forme d'une question que j'avais soumise à quelques collègues, en particulier aussi à l'occasion du jubilé Gauss, à Göttingen, savoir la question suivante :

« Une variété (b) continue à ρ dimensions, avec $\rho > 1$, peut-elle être mise en relation univoque avec une variété continue à une dimension, de telle sorte qu'à un point de l'une corresponde un point et un seul de l'autre ? »

La plupart de ceux à qui j'ai soumis cette question se sont beaucoup étonnés que j'aie seulement pu la poser, car il *se comprenait de soi* que, pour la détermination d'un point dans une extension (c) à ρ dimensions, il fallait toujours employer ρ coordonnées indépendantes. Celui qui, pourtant, pénétrait le sens de la question, devait reconnaître qu'il fallait au moins démontrer pourquoi la réponse était « évidemment » *non*. Comme je l'ai dit, je faisais partie de ceux, qui tenaient pour *vraisemblable* que la réponse fût négative — jusqu'au moment tout récent où, par une succession assez complexe de pensées, je suis arrivé à la conviction que la réponse était *affirmative* sans aucune restriction.

(a) *Une multiplicité continue ρ fois étendue* : en allemand *eine ρ fach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit.*
(b) *Variété* : en allemand *Gebilde.*
(c) *Extension* : en allemand *Ausgedehntheit.*

Peu après, je trouvai la démonstration que vous avez aujourd'hui sous les yeux.

On voit ici quelle force prodigieuse il y a dans les nombres réels habituels, rationnels et irrationnels, si bien que par elle on peut déterminer de façon univoque, *à l'aide d'une seule coordonnée*, les éléments d'une multiplicité continue ρ fois étendue ; et je veux ajouter tout de suite que leur force va plus loin encore, puisque, comme vous ne manquerez pas de le voir, ma démonstration peut s'étendre, sans que les difficultés en soient sensiblement accrues, à des multiplicités à un nombre infini de dimensions, pourvu que ces dimensions en nombre infini prennent la forme d'une suite simplement infinie.

Il me semble donc que toutes les déductions philosophiques ou mathématiques qui utilisent cette hypothèse erronée sont inadmissibles. Il faut plutôt rechercher la différence qui existe entre deux variétés ([a]) à un nombre *différent* de dimensions, dans quelque raison tout autre que celle, généralement tenue pour caractéristique, du nombre de coordonnées indépendantes.

Halle, le 29 juin 1877

Veuillez excuser mon zèle pour cette affaire, si je fais appel tellement souvent à votre bonté et à votre peine ; ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi-même si inattendu, si nouveau, que je ne pourrai pour ainsi dire pas arriver à une certaine tranquillité d'esprit avant que je n'aie reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : Je le vois, mais je ne le crois pas ([b]). C'est pourquoi je vous prie de m'envoyer une carte postale pour me dire quand vous pourriez avoir terminé l'examen de la chose et si je peux compter vous voir exaucer ma demande, certainement bien exigeante.

La démonstration du théorème (C) sera considérablement facilitée par l'emploi du symbolisme suivant :

Si a et b sont deux grandeurs variables qui peuvent être mises en relation univoque l'une avec l'autre, on écrit :

$$a \sim b.$$

([a]) *Variétés* : en allemand *Gebilde*.
([b]) En français dans le texte.

Si alors $a \sim b$ et $b \sim c$, on a aussi :

$$a \sim c.$$

Si de plus a', a'', ... est une suite finie ou infinie de variables bien définies ou de constantes, qui ne prennent deux à deux aucune valeur commune, mais telles que la réunion de leurs domaines de variations soit exactement celui de la variable unique a, on pose :

$$a \equiv (a', a'', \ldots).$$

On a alors le théorème suivant :

(E) « Si :
$$a \equiv (a', a'', \ldots)$$
$$b \equiv (b', b'', \ldots)$$

et si de plus :

$$a' \sim b'$$
$$a'' \sim b''$$
$$a''' \sim b'''$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

on a alors aussi :

$$a \sim b.$$

Grâce aux substitutions :

$$y = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}; \qquad x = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

on déduit de (D) la généralisation suivante :

(F) « Un nombre z, qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ à l'exception de α, peut être mis en correspondance univoque avec un nombre u, qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ sans exception. »

De là résulte immédiatement le théorème suivant :

(G) « Un nombre w, qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, à l'exception des deux valeurs extrêmes α, β, peut être mis en correspondance univoque avec un nombre variable u qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$. »

Démonstration. Soit un nombre $\gamma \begin{smallmatrix} < \alpha. \\ > \beta \end{smallmatrix}$

w' une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \ldots \gamma)$ à l'exception de α *et* de γ ; w'' une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \ldots \beta)$ à l'exception de la seule extrémité β.

On a alors :

$$(1) \qquad w \equiv (w', w'').$$

Si l'on désigne alors par u'' une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \ldots \beta)$ sans exception, par z une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ à l'exception de α, on a :
d'après (F) :

$$(2) \qquad w'' \sim u'',$$

et, à cause de (1) et (E) :

$$w \sim (w', u'').$$

Mais : $(w', u'') \equiv z$, donc :

$$w \equiv z.$$

Mais d'après (F) on a aussi :

$$z \sim u, \quad \text{donc enfin :}$$
$$w \sim u, \quad \text{q. e. d.}$$

Pour démontrer maintenant (C), nous décomposons f en variables $f', f'', \ldots$ et la valeur isolée 1, f' prenant toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots \varepsilon_1)$ à l'exception de ε_1, $f^{(\nu)}$ toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots \varepsilon_\nu)$ à l'exception des valeurs extrêmes $\varepsilon_{\nu-1}$ et ε_ν. On a alors :

$$f \equiv (f', f'', f''', \ldots f^{(\nu)}, \ldots, 1).$$

Soit x'' une variable qui prend toutes les valeurs de $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2)$ sans exception, $x^{(IV)}$ une variable qui prend toutes les valeurs de $(\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_4)$ sans exception, $x^{(2\nu)}$ une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots \varepsilon_{2\nu})$ sans exception, alors on a, à cause de (G) :

$$\begin{aligned} f'' &\sim x'' \\ f^{IV} &\sim x^{IV} \\ &\cdots\cdots \\ f^{(2\nu)} &\sim x^{(2\nu)} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

par suite :

$$f \sim (f', x'', f''', x^{IV}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1).$$

Mais :

$$(f', x'', f''', x^{IV}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots, 1) \equiv x,$$

donc :

$$f \sim x.$$

Dedekind a Cantor

J'ai examiné encore une fois votre démonstration, et n'y ai pas trouvé de lacune ; je suis convaincu que votre intéressant théorème est exact et je vous en félicite. Mais je voudrais, comme je vous l'ai déjà annoncé sur ma carte postale, faire une remarque, qui est dirigée *contre* les conséquences que vous avez ajoutées dans votre lettre du 25 juin à la communication et à la démonstration du théorème, et qui ont trait au concept d'une multiplicité continue à ρ dimensions. D'après ce que vous dites, il pourrait sembler — mais mon opinion peut être inexacte — que vous vouliez, à partir de votre théorème, mettre en doute la signification ou l'importance de ce concept ; vous dites par exemple à la fin de cette lettre : « *Il me semble donc* que toutes les déductions philosophiques ou mathématiques qui utilisent cette hypothèse erronée » [celle du caractère déterminé du nombre de dimensions] « sont inadmissibles. Il faut plutôt rechercher la différence qui existe entre deux variétés à un nombre différent de dimensions dans quelque raison tout autre que celle, généralement tenue pour caractéristique, du nombre de coordonnées indépendantes. »

A l'encontre de ce point de vue, je déclare être convaincu (malgré votre théorème, ou plutôt par suite des considérations occasionnées par votre théorème) ou croire (je n'ai pas encore eu le temps de faire même seulement l'essai d'une démonstration) que le nombre de dimensions d'une multiplicité continue est, après comme avant, le premier et le plus important de ses invariants, et je dois prendre ici la défense de tous ceux qui ont écrit sur ce sujet jusqu'à ce jour. Je vous concède volontiers que cette constance du nombre de dimensions exige absolument une démonstration, et que, aussi longtemps que cette démonstration n'a pas été faite, l'on est en droit de mettre en doute la proposition. Mais je ne doute pas de cette constance bien qu'elle semble anéantie par votre théorème. Mais tous les auteurs ont évidemment fait l'hypothèse tacite, tout à fait naturelle, que pour une nouvelle détermination des points d'une multiplicité continue à l'aide de nouvelles coordonnées, ces dernières doivent être aussi des fonctions *continues* (en général) des anciennes coordonnées, afin que ce qui apparaît comme étant continuement connexe ([a]) dans la première détermination de position) reste continuement lié ([b]) dans la deuxième détermination de position. Je crois donc provisoirement à l'exactitude du théorème suivant : « Si l'on réussit à établir une correspondance complète univoque et réciproque ([c]) entre les points d'une multiplicité continue A à a dimensions d'une part, et les points d'une multiplicité continue B à b dimensions, d'autre part, alors, si a et b sont *inégaux*, cette correspondance est nécessairement partout *discontinue*. Ce théorème expliquerait aussi le phénomène qui s'est manifesté lors de votre première démonstration de votre théorème, à savoir justement l'insuffisance de cette démonstration ; la relation que vous vouliez y établir (à l'aide de fractions décimales) entre les points d'un domaine à ρ dimensions et les points d'un « segment à une dimension » aurait été, si je ne me trompe, *continue*, pourvu seulement qu'elle ait englobé *tous* les points du segment à une dimension ; de même, dans votre démonstration actuelle, la correspondance *initiale* entre les points du segment à ρ dimensions dont les coordonnées sont toutes irrationnelles et les points à une coordonnée également irrationnelle du segment à une dimension est, me semble-t-il, aussi continue que possible en un certain sens (petitesse des changements) ; mais, pour remplir les lacunes, vous êtes obligé d'introduire dans la correspondance une discontinuité, à donner le vertige, une discontinuité qui réduit tout en atomes, telle que toute partie continuement connexe, si petite qu'elle soit, de l'un des domaines a une image complètement déchirée, discontinue.

J'espère m'être expliqué assez clairement ; cette lettre n'a d'autre but que de vous prier de ne pas entreprendre publiquement des polémiques contre les articles de foi admis jusqu'à présent de la théorie des multiplicités avant d'avoir soumis mon objection à un examen approfondi.

Brunswick, le 2 juillet 1877

([a]) *Continuement connexe* : en allemand *als stetig zusammenhängend.*
([b]) *Continuement lié* : en allemand *stetig verbunden.*
([c]) *Une correspondance complète, univoque et réciproque* : en allemand ***eine gegenseitige eindeutige und vollständige Correspondenz.***

CANTOR A DEDEKIND

(Carte ; timbre de la poste du 2-7-77)

Je suis très heureux que vous ayiez étudié mon travail et l'ayez trouvé exact. Je vous prie, de persévérer dans votre projet et de me communiquer vos idées sur la signification du résultat, en détail et avec précision ; d'après elles j'aimerais former mon jugement sur la façon de poursuivre toute l'affaire.

Halle, le 4 juillet 1877

J'ai été très heureux de recevoir votre lettre du 2 juillet, et je vous remercie de vos remarques précises et extraordinairement pertinentes.

A la fin de ma lettre du 25 juin, j'ai, contre ma volonté, donné l'impression de vouloir, par ma démonstration, m'opposer au concept même de multiplicité continue ρ fois étendue, alors que tous mes efforts n'ont d'autre but que de clarifier ce concept et de lui donner un fondement correct. Lorsque je disais : « Il me semble donc que toutes les déductions philosophiques ou mathématiques qui utilisent cette hypothèse erronée sont inadmissibles », *ce n'est pas* au « caractère déterminé du nombre de dimensions » que se rapportait cette hypothèse, mais bien au caractère déterminé des coordonnées indépendantes dont le nombre est supposé par certains auteurs égal en toute circonstance au nombre de dimensions, alors que, si l'on prend le concept de coordonnées *dans sa généralité*, sans aucune hypothèse sur la nature des fonctions utilisées, le nombre de coordonnées indépendantes, univoques, complètes peut, comme je l'ai démontré, être ramené à tout nombre donné. Je suis aussi de votre avis que, si l'on impose à la correspondance d'être continue, on ne peut plus alors mettre en relation univoque que des variétés à un nombre égal de dimensions, et que, de cette manière, le nombre de coordonnées indépendantes constitue un invariant qui pourrait conduire à la définition du nombre de dimensions d'une variété continue.

Je ne suis pourtant pas encore capable de reconnaître à quel degré peuvent s'élever les difficultés dans cette voie (celle qui conduit au concept du nombre de dimensions), parce que je ne sais pas si l'on est en état de délimiter le concept de *correspondance continue en général* (*). Mais de la possibilité d'une telle délimitation me paraît tout dépendre dans cette voie.

Je crois apercevoir une autre difficulté en ceci que cette voie n'aboutirait sans doute pas dès que la variété cesse d'être partout continue ; et pourtant l'on aimerait avoir dans ce cas aussi quelque chose qui corresponde au nombre de dimensions, d'autant que, pour les multiplicités qui se présentent dans la nature, leur continuité partout semble difficile à établir.

Je voudrais seulement indiquer par ces lignes que je suis bien loin d'avoir voulu utiliser inconditionnellement mon résultat contre les articles de foi de la théorie des multiplicités, et, bien au contraire, que je souhaite pouvoir contribuer avec son aide à en raffermir autant que possible les théorèmes. Je ne voudrais pas vous déranger davantage aujourd'hui ; je vous prie, si vous en trouvez le temps, d'examiner les questions qui s'imposent, de ne pas dédaigner ce travail, et de me faire connaître ensuite vos résultats.

(*) *Correspondance continue en général* : en allemand *Im Allgemeinen stetigen Correspondenz.*

Halle sur la Saale, le 17 janvier 1879

Je crois avoir réglé maintenant de la manière la plus simple et la plus rigoureuse la question de l'application univoque et *continue* des multiplicités, qui s'est posée naturellement à la suite de mes recherches ; je la ramène au théorème fondamental bien connu de l'analyse, d'après lequel :

(I) Une fonction continue d'*une* variable continue t, qui, pour $t = t_0$, prend une valeur négative, pour $t = t_1$, une valeur positive, s'annule au moins une fois entre ces valeurs.

Les tentatives respectives de Thomae et de Netto sont incomplètes, comme vous l'avez peut-être remarqué ; ainsi, par exemple, Thomae s'appuie sur un théorème de Riemann indémontrable *pour lui* (4) (*Œuvres complètes*, page 450, (1) : Un

(1) Il s'agit des ordres d'annulation d'une fonction ; dans leur description — en tant que domaine non archimédien de grandeurs —, Thomae se rencontre de manière curieuse avec les recherches de Du Bois Raymond, parues peu avant (*Annali di Mat.*, IV, 1871).

(2) Sur cette exclusion, souvent soulignée (*Œuvres complètes*, p. 156, p. 172, etc...) des grandeurs infiniment petites actuelles, cf. la lettre à Weierstrass du 16 mai 1887 (*Contributions à la théorie des nombres transfinis*, VI, *Œuvres complètes*, p. 408), où Cantor croit avoir trouvé une démonstration. En réalité, la seule raison en était sa définition du continu comme système connexe — c'est-à-dire soumis à l'axiome d'Archimède.

(3) [Thomae, ***Théorèmes de la théorie des fonctions***, *Göttinger Nachrichten* (1878), Lüroth, ***Application de multiplicités de différentes dimensions l'une sur l'autre***, Erlangen, *Phys. med. Soc.*, *Sitz-Ber*, **10** (1878), Jürgens, *Sur l'application continue et univoque de multiplicités*, *Tagebl. d. Versamme. Deutsch. Naturforscher u. Aetzte* in Cassel 1878. Netto. *Zur Mannigfaltigkeitslehre*. *Borch. J.* 86 (1879).]

(4) Il l'appelle : « axiome ».

segment (a) à moins de $n - 1$ dimensions, etc., etc...) ; alors que, je l'ai maintenant clairement reconnu, ce théorème de Riemann est, dans une certaine mesure, équivalent à celui qu'il s'agit maintenant de démontrer dans le cas où $\nu = n - 1$; mais comme $n - 1$ n'est pas un nombre moins général que n, Thomae fait une sorte de cercle vicieux avec sa démonstration.

La démonstration générale que je vais donner maintenant, je la connais à vrai dire déjà depuis longtemps, en fait depuis plus d'un an ; mais je ne la croyais pas rigoureuse jusqu'à présent, et c'est pourquoi je me gardais bien d'en parler. La découverte que j'ai faite il y a quelques jours réside donc au fond seulement en ce que cette démonstration est rigoureuse. Si je pensais le contraire, c'est que les relations qui s'y présentent ne sont pas univoques *des deux côtés*. Mais leur *caractère multivoque ne* nuit *pas* au résultat, parce qu'il n'intervient que dans le passage d'une variété (b) à un nombre supérieur de dimensions à une variété (b) à un nombre inférieur de dimensions (1).

Dans ce qui suit, j'entends par sphère (c) du p^{ieme} ordre la variété (b) continue du p^{ieme} ordre qui est extraite par le moyen de l'équation :

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_{p+1} - a_{p+1})^2 = r^2$$

de la multiplicité $p + 1$ uple, dont les coordonnées sont x_1, x_2, ..., x_{p+1}, de telle sorte que par exemple la circonférence dans le plan est une sphère du 1er ordre.

Le théorème à démontrer est, sous une forme élargie, le suivant :

« Une M_μ continue et une M_ν continue, si $\mu < \nu$, ne peuvent être mises en correspondance *continue* de telle sorte qu'à chaque élément de M_μ corresponde *un seul* élément de M_ν, et à chaque élément de M_ν *un ou plusieurs* éléments de M_μ. »

Pour le cas de $\nu = 1$, le théorème est immédiat. Pour le

(a) *Segment* : en allemand *Vielstreck*.
(b) *Variété* : en allemand *Gebilde*.
(1) [Il est pourtant bien connu que ce théorème est faux dans le cas d'une correspondance multivoque, comme suffit à le montrer la courbe de Peano. La démonstration ci-dessus a été publiée : *Sur un théorème de la théorie des multiplicités continues* (*Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*) Göttinger Nachrichten. 1879 (*Œuvres complètes*, p. 134).]
(c) *Sphère* : en allemand *Kugel*.

prouver dans le cas général, supposons-le vrai pour $\nu = n - 1$, et montrons qu'il est alors aussi vrai pour $\nu = n$.

A cette fin, supposons l'existence d'une relation continue entre une M_μ et une M_n, avec $\mu < n$, de telle sorte que le passage de M_μ à M_n soit *univoque* ; et montrons qu'il y a une contradiction interne à la base de cette hypothèse, ou plutôt une contradiction avec le théorème fondamental I énoncé plus haut.

Soit a et b deux points intérieurs de M_μ, A et B les points correspondants de M_n.

Autour de A comme centre, construisons dans M_n une sphère du $\overline{n - 1}^{eme}$ ordre, K_{n-1}, qui soit assez petite pour que le point B soit à l'extérieur de l'espace qu'elle délimite.

Autour de a comme centre, construisons de même dans M_μ une sphère du $\overline{\mu - 1}^{eme}$ ordre $K_{\mu-1}$, qui soit assez petite pour que :

1) le point b soit à l'extérieur de cette sphère ;

2) la variété continue (a) du $\overline{\mu - 1}^{eme}$ ordre correspondant dans M_n à cette sphère soit tout entière contenue à l'intérieur de l'espace délimité par la sphère K_{n-1}, ce qui peut être réalisé, à cause de la continuité de la relation dans le voisinage des points a et A.

Soit z un point quelconque de $K_{\mu-1}$, ζ le point correspondant de $G_{\mu-1}$; traçons le rayon rectiligne $A\zeta$; prolongé dans cette direction, il rencontre la sphère K_{n-1} en un point et un seul, Z.

Ainsi, *au moyen de cette construction*, à chaque point z de K_{n-1}, correspond *un* point Z de $K_{\mu-1}$ qui varie de façon continue avec z.

Mais le point Z ne peut pas atteindre n'importe quel point de K_{n-1}, *car cela irait contre notre théorème, qui a été supposé démontré dans le cas* $\nu = n - 1$.

Nous concluons donc avec certitude qu'il y a des points P de la sphère K_{n-1} qui ne sont pas atteints par le point Z ; si l'on joint A à un tel point P, ce rayon AP ne rencontrera *pas* la variété $G_{\mu-1}$.

Si l'on joint alors P encore au point B, qui est à l'extérieur de K_{n-1}, par une courbe continue contenue dans l'espace M_n, on obtient

(II) une ligne continue composée APB, *qui n'a aucun point commun avec la variété* $G_{\mu-1}$.

(a) *Variété continue* : en allemand *Stetige Gebilde*.

A cette ligne, par l'intermédiaire de la relation continue posée au départ entre M_μ et M_n, correspondent une ou plusieurs courbes situées dans M_μ qui joignent continûment a à b et qui (III) à cause du théorème fontamental I, doivent rencontrer *nécessairement* la sphère $K_{\mu-1}$ *une fois au moins.*

Ces deux faits, II et III, se contredisent mutuellement ; donc l'hypothèse d'une relation continue entre M_μ et M_n est incorrecte, et notre théorème est démontré pour le cas $\nu = n$.

Comme l'académie de Göttingen m'a récemment fait membre correspondant, et que Thomae a publié sa démonstration dans les *Göttinger. Anzeigen*, je pense envoyer également à ce même périodique cette démonstration ; c'est pourquoi j'aimerais bien savoir ce que vous en pensez.

Dedekind a Cantor

J'ai étudié votre démonstration avec soin, et je n'y ai rencontré qu'un détail qui pourrait soulever le doute. Après avoir construit autour du point A de M_n une sphère K_{n-1}, et autour du point a de M_μ une sphère $K_{\mu-1}$ dont l'image dans M_n est désignée par $G_{\mu-1}$, vous en déduisez une application de $K_{\mu-1}$ sur K_{n-1} : au point z de $K_{\mu-1}$ correspond un point déterminé ζ de $G_{\mu-1}$, l'intersection Z du rayon $A\zeta$ avec K_{n-1} sera alors considérée comme une nouvelle image de z. Mais il est alors concevable que ζ coïncide avec A, puisque vous admettez qu'à *plusieurs* points de M_μ correspond un seul et même point de M_n ; dans ce cas l'image Z serait en général *indéterminée.* Cette difficulté est visiblement facile à écarter lorsque le nombre de points a' dans M_μ auxquels correspond le même point A dans M_n est *fini*, car il suffit alors de prendre le rayon de la sphère $K_{\mu-1}$ assez petit pour que les autres points a' tombent à l'extérieur. Mais si le nombre de points a' est infini, je vois pour le moment dans cette circonstance une véritable difficulté, et celle-ci intervient encore à une deuxième place dans votre démonstration. Vous dites en effet qu'à la ligne APB correspondront une ou plusieurs lignes dans M_μ qui y joignent continûment a à b ; ceci exigerait à mon avis d'être expliqué et fondé de façon plus précise, *même* lorsque B est seulement l'image d'un point ou d'un nombre *fini* de points distincts b' de M_μ ; mais si une infinité de points b' de M_μ possèdent la même image B dans M_n, l'existence d'une ligne joignant continûment a à b, et dont l'image doit être la ligne APB, devient encore un peu plus douteuse. Je *crois* d'ailleurs que le théorème reste encore vrai si l'on admet que chaque point de M_n peut être l'image d'une infinité de points distincts de M_μ. Peut-être parviendrez-vous à écarter immédiatement les deux difficultés en question. Pour une publication, je tiendrais pour souhaitable que soient exactement définis les noms ou expressions techniques de la théorie des multiplicités (à ce propos, je donnerais décidément la préférence au terme de « domaine » ([a]), également employé par Riemann, comme étant bien plus court que le terme pesant de « multiplicité » ([b])) ; il serait très méritoire de développer ab ovo toute cette « théorie des domaines », sans faire appel à l'intuition géométrique, et il faudrait alors définir d'une façon nette et précise par exemple le concept d'une ligne joignant continûment le point a au point b à l'intérieur du domaine G. Les définitions de Netto (dont le mémoire me plait beaucoup, et dont la démonstration devient, à ce que je crois, tout à fait correcte avec quelques modifications) contiennent un bon germe, mais elles me semblent susceptibles d'être simplifiées et en même temps complétées. Je ne me permettrais pas un tel jugement, si je ne m'étais pas déjà beaucoup occupé de questions de ce genre, il y a un bon nombre d'années, lorsque je voulais encore éditer les leçons de Dirichlet sur la théorie du potentiel, et, à cette occasion, fonder plus rigoureusement ce qu'on appelle le principe de Dirichlet. J'ai moi-même quelques définitions de ce genre ([1]), qui me semblent fournir une base satisfaisante, mais j'ai par la suite laissé toute l'affaire de côté, et ne pourrais en ce moment donner que quelque chose d'incomplet, car je suis entièrement pris par le remaniement de la théorie des nombres de Dirichlet. Toutefois, votre communication, j'ai à peine besoin de le dire, m'a intéressé au plus haut point, et, en vous remerciant très vivement, je reste avec mes salutations cordiales...

Brunswick, le 19 janvier 1879

([a]) *Domaine* : en allemand *Gebiet.*
([b]) *Multiplicité* : en allemand *Mannigfaltigkeit.*
([1]) [Cf. « Théorèmes généraux sur les espaces » (Allgmeine Sätze über Räume) extraits des œuvres posthumes (*Œuvres complètes*, vol. II, p. 352).]

DOCUMENT N° 15

TABLE DES MATIERES ET DEBUT DES PRELIMINAIRES
DU COURS D'ANALYSE DE CAUCHY

COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1821

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

SECONDE SÉRIE.

MÉMOIRES DIVERS ET OUVRAGES.

II. — OUVRAGES CLASSIQUES.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Pages

PREMIÈRE PARTIE.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

TABLE DES MATIÈRES.

TABLE DES MATIÈRES.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTES SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

PRÉLIMINAIRES.

REVUE DES DIVERSES ESPÈCES DE QUANTITÉS RÉELLES QUE L'ON PEUT CONSIDÉRER, SOIT EN ALGÈBRE, SOIT EN TRIGONOMÉTRIE, ET DES NOTATIONS A L'AIDE DESQUELLES ON LES REPRÉSENTE. — DES MOYENNES ENTRE PLUSIEURS QUANTITÉS.

Pour éviter toute espèce de confusion dans le langage et l'écriture algébriques, nous allons fixer dans ces préliminaires la valeur de plusieurs termes et de plusieurs notations que nous emprunterons soit à l'Algèbre ordinaire, soit à la Trigonométrie. Les explications que nous donnerons à ce sujet sont nécessaires, pour que nous ayons la certitude d'être parfaitement compris de ceux qui liront cet Ouvrage. Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paraît convenable d'attacher à ces deux mots, *nombre* et *quantité*.

Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est-à-dire aux nombres précédés des signes $+$ ou $-$. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe $+$ ou du signe $-$, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce. Cela posé, le signe + ou — placé devant un nombre en modifiera la signification, à peu près comme un adjectif modifie celle du substantif. Nous appellerons *valeur numérique* d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités *égales* celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités *opposées* deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires. En partant de ces principes, il est facile de rendre compte des diverses opérations que l'on peut faire subir aux quantités. Par exemple, deux quantités étant données, on pourra toujours en trouver une troisième qui, prise pour accroissement d'un nombre fixe, si elle est positive, et pour diminution dans le cas contraire, conduise au même résultat que les deux quantités données, employées l'une après l'autre à pareil usage. Cette troisième quantité, qui à elle seule produit le même effet que les deux autres, est ce qu'on appelle leur *somme*. Ainsi les deux quantités — 10 et + 7 ont pour somme — 3, attendu qu'une diminution de 10 unités, jointe à une augmentation de 7 unités, équivaut à une diminution de 3 unités. *Ajouter* deux quantités, c'est former leur somme. La différence entre une première quantité et une seconde, c'est une troisième quantité qui, ajoutée à la seconde, reproduit la première. Enfin, on dit qu'une quantité est *plus grande* ou *plus petite* qu'une autre, suivant que la différence de la première à la seconde est positive ou négative. D'après cette définition, les quantités positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles-ci doivent être considérées comme d'autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes.

En Algèbre, on représente, non seulement les nombres, mais aussi les quantités, par des lettres. Comme on est convenu de ranger les nombres absolus dans la classe des quantités positives, on peut désigner la quantité positive qui a pour valeur numérique le nombre A, soit par + A, soit par A seulement, tandis que la quantité négative opposée se trouve représentée par — A. De même, dans le cas où la lettre *a* représente une quantité, on est convenu de regarder comme synonymes les deux expressions a et $+a$, et de représenter par $-a$ la quantité opposée à $+a$. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle la *règle des signes* (*voir* la Note I).

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif*, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignés conjointement sous le nom de *quantités infinies*.

Les quantités qui se présentent, dans le calcul, comme résultats d'opérations faites sur une ou plusieurs autres quantités constantes ou variables, peuvent être divisées en plusieurs espèces suivant la nature des opérations qui les produisent. C'est ainsi que l'on distingue, en Algèbre, les sommes et différences, les produits et quotients, les puissances et racines, les exponentielles et les logarithmes: en Trigonométrie, les sinus et cosinus, sécantes et cosécantes, tangentes et cotangentes, et les arcs de cercle dont une ligne trigonométrique est donnée. Pour bien comprendre ce qui est relatif à ces dernières espèces de quantités, il est nécessaire de se rappeler les principes suivants.

Une longueur, comptée sur une ligne droite ou courbe, peut être, comme toute espèce de grandeurs, représentée soit par un nombre, soit par une quantité, savoir : par un nombre, lorsqu'on a simplement égard à la mesure de cette longueur, et par une quantité, c'est-à-dire par un nombre précédé du signe + ou —, lorsque l'on considère la longueur dont il s'agit comme portée, à partir d'un point fixe, sur la ligne donnée dans un sens ou dans un autre, pour servir soit à l'augmentation, soit à la diminution d'une autre longueur constante aboutissant à ce point fixe. Le point fixe dont il est ici question, et à partir duquel on doit porter les longueurs variables désignées par des quantités, est ce qu'on appelle l'*origine* de ces mêmes longueurs. Deux longueurs comptées à partir d'une origine commune, mais en sens contraires, doivent être représentées par des quantités de signes différents. On peut choisir à volonté le sens dans lequel on doit compter les longueurs désignées par des quantités positives; mais, ce choix une fois fait, il faudra nécessairement compter dans le sens opposé les longueurs qui seront désignées par des quantités négatives.

Dans un cercle dont le plan est supposé vertical, on prend ordinairement pour origine des arcs l'extrémité du rayon tiré horizontalement de gauche à droite, et c'est en s'élevant au-dessus de ce point que l'on compte les arcs positifs, c'est-à-dire ceux que l'on désigne par des quantités positives. Dans le même cercle, lorsque le rayon se réduit à l'unité, le sinus d'un arc, c'est-à-dire la projection sur le diamètre vertical du rayon qui passe par l'extrémité de cet arc, se compte positivement de bas en haut et négativement en sens contraire, à partir du centre du cercle pris pour origine des sinus. La tangente se compte positivement dans le même sens que le sinus, mais à partir de l'origine des arcs et sur la verticale menée par cette origine. Enfin, la sécante se compte à partir du centre sur le rayon mené à l'extrémité de l'arc que l'on considère, et positivement dans le sens de ce rayon.

Souvent le résultat d'une opération effectuée sur une quantité peut avoir plusieurs valeurs différentes les unes des autres. Lorsque nous voudrons désigner indistinctement une quelconque de ces valeurs, nous nous servirons de notations dans lesquelles la quantité sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses, et nous réserverons la notation ordinaire pour la valeur la plus simple ou celle qui paraîtra mériter davantage d'être remarquée. Ainsi, par exemple, a étant une quantité positive, la racine carrée de cette quantité aura deux valeurs numériquement égales, mais de signes contraires, dont l'une quelconque sera exprimée par la notation

$$((a))^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\!\!\sqrt{a}},$$

tandis que la valeur positive seule sera représentée par

$$a^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a};$$

en sorte qu'on aura

$$\sqrt{\!\!\sqrt{a}} = \pm\sqrt{a} \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même,

$$((a))^{\frac{1}{2}} = \pm a^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

De même encore, si l'on représente par a une quantité positive ou négative, la notation

$$\operatorname{arc}\sin((a)) \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc}\operatorname{tang}((a))$$

désignera un quelconque des arcs qui ont la quantité a pour sinus ou pour tangente, tandis que la notation

$$\operatorname{arc}\sin(a) \quad \text{ou} \quad \operatorname{arc}\operatorname{tang}(a)$$

indiquera seulement celui de ces arcs qui a la plus petite valeur numérique. A l'aide de ces conventions, on évite la confusion que pourrait entrainer l'emploi de signes dont la valeur n'aurait pas été déterminée d'une manière assez précise. Afin de lever à cet égard toute difficulté, je vais présenter ici le Tableau des notations dont nous ferons usage pour exprimer les résultats des opérations algébriques ou trigonométriques.

La somme de deux quantités sera indiquée à l'ordinaire par la juxtaposition de ces deux quantités, chacune d'elles étant exprimée par une lettre précédée du signe + ou —, que l'on pourra supprimer (si c'est le signe +) devant la première lettre seulement. Ainsi

$$+a+b \quad \text{ou simplement} \quad a+b$$

désignera la somme des deux quantités $+a$, $+b$, et

$$+a-b \quad \text{ou simplement} \quad a-b$$

désignera la somme des deux quantités $+a$, $-b$, équivalente à la différence des deux quantités $+a$, $+b$.

On indiquera l'égalité des deux quantités a et b par le signe $=$ interposé entre elles, comme il suit,

$$a=b,$$

et l'on exprimera que la première surpasse la seconde, c'est-à-dire que la différence $a-b$ est positive, en écrivant

$$a>b \quad \text{ou} \quad b<a.$$

Nous représenterons encore à l'ordinaire par

$$+a\times+b, \quad \text{ou simplement} \quad a.b \quad \text{ou} \quad ab$$

le produit des deux quantités $+a$, $+b$, et par

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a:b$$

leur quotient....

DOCUMENT N° 16

QUELQUES EXTRAITS DU LIVRE X D'EUCLIDE
(TRADUCTION FRANCAISE DE PEYRARD)

PROPOSITION III

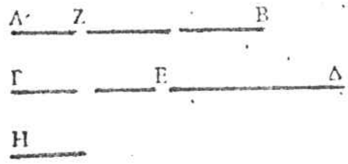
Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient AB, ΓΔ les deux grandeurs commensurables données; que AB soit la plus petite; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

Car la grandeur AB mesure ΓΔ ou ne le mesure pas. Si AB mesure ΓΔ, à cause qu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ, et il est évident qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

Mais que AB ne mesure pas ΓΔ. Retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent (Prop. 2, Livre X) parce que les grandeurs AB, ΓΔ ne sont pas incommensurables; que AB mesurant EΔ laisse EΓ plus petit que lui; que EΓ mesurant ZB laisse AZ plus petit que lui, et enfin que AZ mesure ΓE.

Puisque AZ mesure ΓE, et que ΓE mesure ZB, AZ mesurera ZB. Mais AZ se mesure lui-même; donc AZ mesurera AB tout entier. Mais AB mesure AE; donc



AZ mesurera ΔE. Mais il mesure ΓE; il mesure donc ΓΔ tout entier; donc AZ mesure les grandeurs AB, ΓΔ; donc AZ est une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ. Je dis aussi qu'il en est la plus grande. Car si cela n'est point, il y aura une certaine grandeur plus grande que AZ qui mesurera AB et ΓΔ. Qu'elle soit H. Puisque H mesure AB, et que AB mesure EΔ, H mesurera EΔ. Mais H mesure ΓΔ tout entier; donc H mesurera le reste ΓE. Mais ΓE mesure ZB; donc H mesurera ZB. Mais il mesure AB tout entier; il mesurera donc le reste AZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc quelque grandeur plus grande que AZ ne mesurera pas AB et ΓΔ; donc AZ est la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure AZ des deux grandeurs commensurables données AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

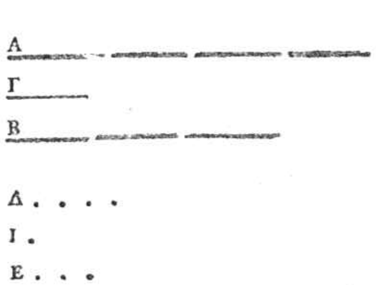
COROLLAIRE.

De là il est évident que si une grandeur mesure deux grandeurs, elle mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROPOSITION V.

Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs commensurables A, B; je dis que A a avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre.



Car puisque les grandeurs A, B sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Δ que Γ mesure de fois A; qu'il y ait aussi autant d'unités dans E que Γ mesure de fois B.

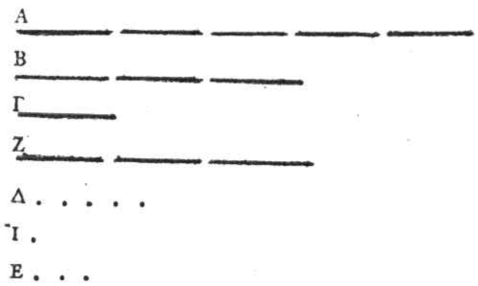
Puisque Γ mesure A par les unités qui sont en Δ, et que l'unité mesure Δ par les unités qui sont en lui, l'unité mesure le nombre Δ autant de fois que la grandeur Γ mesure A; donc Γ est à A comme l'unité est à Δ; donc, par conversion, A est à Γ comme Δ est à l'unité. De plus, puisque Γ mesure B par les unités qui sont en E, et que l'unité mesure E par les unités qui sont en lui, l'unité mesure E autant de fois que Γ mesure B; donc Γ est à B comme l'unité est à E. Mais on a démontré que A est à Γ comme Δ est à l'unité; donc, par égalité, A est à B comme le nombre Δ est à E.

Donc les grandeurs commensurables A, B ont entr'elles la raison que le nombre Δ a avec le nombre E. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

Que les deux grandeurs A, B ayent entr'elles la même raison que le nombre Δ a avec le nombre E ; je dis que les grandeurs A, B sont commensurables.

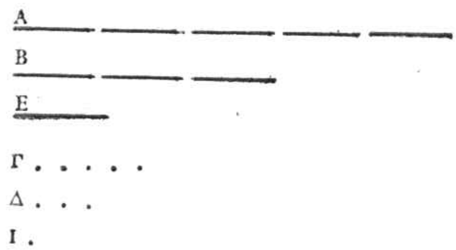


Car que A soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Δ ; que Γ soit égal à une de ces parties ; et que Z soit composé d'autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en E.

Puisqu'il y a dans A autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Δ, Γ sera la même partie de A que l'unité l'est de Δ ; donc Γ est à A comme l'unité est à Δ. Mais l'unité mesure le nombre Δ ; donc Γ mesure A. Et puisque Γ est à A comme l'unité est au nombre Δ, par conversion A est à Γ comme le nombre Δ est à l'unité. De plus, puisqu'il y a en Z autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en E, Γ sera à Z comme l'unité est au nombre E. Mais on a démontré que A est à Γ comme Δ est à l'unité ; donc par égalité A est à Z comme Δ est à E. Mais Δ est à E comme A est à B ; donc A est à B comme A est à Z ; donc A a la même raison avec B et avec Z ; donc B égale Z (9. 5). Mais Γ mesure Z ; donc il mesure B. Mais Γ mesure A ; donc Γ mesure A et B ; donc A est commensurable avec B (déf. 1. 10). Donc, etc.

AUTREMENT.

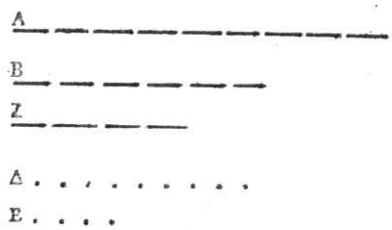
Que les deux grandeurs A et B ayent entr'elles la même raison que le nombre Γ avec le nombre Δ ; je dis que ces grandeurs sont commensurables.



Que A soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Γ, et que E soit égal à une de ces parties ; l'unité sera au nombre Γ comme E est à A. Mais Γ est à Δ comme A est à B ; donc, par égalité, l'unité est à Δ comme E est à B. Mais l'unité mesure Δ ; donc E mesure B. Mais E mesure A, puisque l'unité mesure Γ; donc E mesure A et B ; donc A et B sont commensurables, et E est leur commune mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si l'on a deux nombres comme Δ et E, et une droite comme A, il sera possible de faire en sorte que le nombre Δ soit au nombre E comme la droite A est à une autre droite. Mais si l'on prend une moyenne pro-



portionnelle comme B entre A et Z (cor. 20. 6), A sera à Z comme le quarré de A est au quarré de B ; c'est-à-dire que la première sera à la troisième, comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et semblablement décrite sur la troisième (cor. 20. 6). Mais A est à Z comme le nombre Δ est au nombre E; on a donc fait de telle manière que le nombre Δ est au nombre E comme la figure décrite sur la droite A est à la figure décrite sur la droite B.

PROPOSITION VII.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs incommensurables A, B; je dis que A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car si A avait avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre, A serait commensurable avec B (6. 10). Mais il ne l'est pas; donc A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

Que les deux grandeurs A, B n'ayent pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre; je dis que les grandeurs A, B sont incommensurables.

A

B

Car si elles étaient commensurables, A aurait avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais il ne l'a pas; donc les grandeurs A, B sont incommensurables; donc, etc.

PROPOSITION IX.

Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

Car que les droites A, B soient commensurables en longueur; je dis que le quarré de A a avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

A B

Γ . . . . . . Δ . . .

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, A aura avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Qu'il ait celle que Γ a avec Δ. Puisque A est à B comme Γ est à Δ; que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A à B, car les figures semblables sont en raison double de leurs côtés homologues (20. 6); que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double de celle de Γ à Δ, car il y a un moyen proportionnel entre deux nombres quarrés (11. 8); et que le quarré d'un nombre a avec le quarré d'un nombre une raison double de celle d'un côté à un côté, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ.

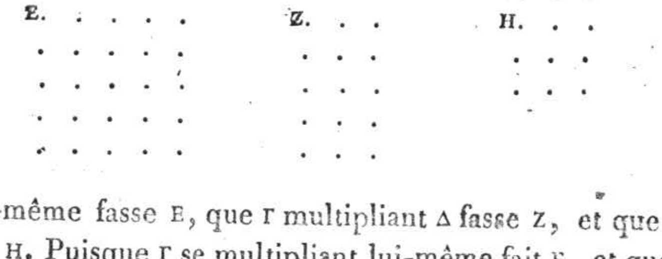
Mais que le quarré de A soit au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ; je dis que A est commensurable en longueur avec B. Car puisque le quarré de A est au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ, que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A à B (20. 6), et que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double aussi de la raison de Γ à Δ (11. 8), A sera à B comme Γ est à Δ; donc A a avec B la raison que le nombre Γ a avec le nombre Δ; donc A est commensurable en longueur avec B (6. 10).

Mais que A soit incommensurable en longueur avec B; je dis que le quarré de A n'a pas avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Car si le quarré de A avait avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, A serait commensurable en longueur avec B. Mais cela n'est point; donc le quarré de A n'a pas avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

De plus, que le quarré de A au quarré de B n'ait pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; je dis que A est incommensurable en longueur avec B. Car si A étoit commensurable en longueur avec B, le quarré de A aurait avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Mais il ne l'a pas; donc A n'est pas commensurable en longueur avec B; donc, etc.

AUTREMENT.

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, il a avec lui la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Que ce soit celle que Γ a avec Δ; que Γ se



multipliant lui-même fasse E, que Γ multipliant Δ fasse Z, et que Δ se multipliant lui-même fasse H. Puisque Γ se multipliant lui-même fait E, et que Γ multipliant Δ fait Z, Γ est à Δ, c'est-à-dire A est à B comme E est à Z (17. 7). Mais A est à B comme le quarré de A est au rectangle sous A, B (1. 6); donc le quarré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z. De plus, puisque Δ se multipliant lui-même a fait H, et que Δ multipliant Γ a fait Z, Γ est à Δ, c'est-à-dire A est à B comme Z est à H (17. 7). Mais A est à B comme le rectangle sous A, B est au quarré de B (1. 6); donc le rectangle sous A, B est au quarré de B comme Z est à H. Mais le quarré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z; donc par égalité le quarré de A est au quarré de B comme E est à H. Mais les nombres E, H sont des quarrés, car E est le quarré de Γ, et H le quarré de Δ; donc le quarré de A a avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Mais que le quarré de A ait avec le quarré de B la raison que le nombre quarré E a avec le nombre quarré H; je dis que A est commensurable en longueur avec B. Car que Γ soit le côté de E, et Δ le côté de H, et que Γ multipliant Δ fasse Z, les nombres E, Z, H seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ (17. 7). Et puisque le rectangle sous A, B est moyen proportionnel entre les quarrés de A et de B (1. 6), et que Z l'est entre E et H (11. 8), le quarré de A sera au rectangle sous A, B comme E est à Z. Mais le rectangle sous A, B est au quarré de B comme Z est à H, et le quarré de A est au rectangle sous A, B comme A est à B; donc A et B sont commensurables, car ils ont la raison qu'a le nombre E avec le nombre Z, c'est-à-dire la raison que Γ a avec Δ; car Γ est à Δ comme E est à Z, puisque Γ se multipliant lui-même fait E, et que Γ multipliant Δ a fait Z; donc Γ est à Δ comme E est à Z (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

D'après ce qui a été démontré, il est évident que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance; que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur; que celles qui sont incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, et que celles qui sont incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

Car puisque les quarrés des droites commensurables en longueur ont la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que les grandeurs qui ont la raison qu'un nombre a avec un nombre sont commensurables, les droites commensurables en longueur sont commensurables non seulement en longueur, mais encore en puissance.

De plus, puisqu'on a démontré que les quarrés qui sont entr'eux comme un nombre quarré est à un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur, et que des droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés ont la raison qu'un nombre a avec un nombre, les quarrés qui n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et qui n'ont simplement que la raison qu'un nombre a avec un nombre, ont leurs côtés commensurables en puissance, mais non en longueur; donc les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, et les droites commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longueur, à moins que leurs puissances n'ayent entre elles la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Je dis aussi que les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance; car elles peuvent n'avoir pas la raison qu'un nombre a avec un nombre, et elles sont à cause de cela commensurables en puissance et incommensurables en longueur; donc les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, mais les droites incommensurables en longueur peuvent être commensurables et incommensurables en puissance.

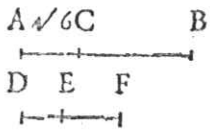
Mais les droites incommensurables en puissance sont toujours incommensurables en longueur; car si elles étaient commensurables en longueur, elles seraient commensurables en puissance. Mais on les suppose incommensurables, ce qui est absurde; donc les droites incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

DOCUMENT N° 17

EXTRAITS DE LA SECONDE PARTIE DES INCOMMENSURABLES GRANDEURS DE SIMON STEVIN

EXEMPLE IIII.

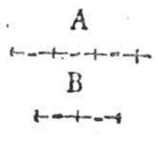
Explication du donné. Soit donné la ligne A B, & les nombres donnez $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, & $\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{2}$. *Explication du requis.* Il faut trouuer vne ligne en telle raison à la A B, comme $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, à $\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{2}$. *Construction.* Posons que A B face $\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{2}$, & coupons de la mesme quelque son nom (par le suiuant 2 probleme) qui soit A C, faisant $\sqrt{6}$. Puis se trouuera la ligne D E, (par le 1 exemple) en telle raison à la A C, comme $\sqrt{3}$ à $\sqrt{6}$, puis la ligne E F, en telle raison à la A C, comme $\sqrt{5}$ à $\sqrt{6}$.



Ie di que D F est la ligne requise, dont la demonstration est manifeste par les precedens.

EXEMPLE V.

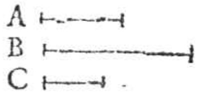
Explication du donné. Soit donné la ligne A & nombres donnez $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ & $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$. *Explication du requis.* Il faut trouuer vne ligne en telle raison à la A, comme $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ à $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$. *Construction.* On conuertira les nombres rompuz donnez, en multinomies nombres entiers de la mesme raison des donez, les multipliant par croix c'est à dire $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ par $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, faict $\sqrt{6}+\sqrt{12}+3+\sqrt{18}$; Puis $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ par $\sqrt{2}+\sqrt{5}$, faict $\sqrt{10}+5+\sqrt{14}+\sqrt{35}$.



Puis se trouuera par le precedent 4[e] exemple la ligne B en telle raison à la A, comme $\sqrt{6}+\sqrt{12}+3+\sqrt{18}$, à $\sqrt{10}+5+\sqrt{14}+\sqrt{35}$. Ie di que B est la ligne requise, dont la demonstration est manifeste.

EXEMPLE VI.

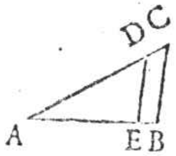
Explication du donné. Soit donné la ligne A, & nombres donnez $\sqrt{}$ *trino.* $\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$, & $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. *Explication du requis.* Il faut trouuer vne ligne en telle raison à la A, comme $\sqrt{}$ *trino.* $\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$, à $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. *Construction.* On trouuera la ligne B, par le 4[e] exemple, en telle raison à la A, comme $\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$, à $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, Puis on prendra la racine quarrée de ladicte B, par le suiuant 3[e] probleme laquelle soit C. Ie di que C, est la ligne requise, dont la demonstration est manifeste.



Dans le problème ci-dessous, il s'agit de diviser un segment donné dans un rapport donné. Euclide le fit au Livre VI (Proposition 9) en prenant le rapport $\frac{1}{3}$. Aussi Stevin prend-il le rapport $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Il ne s'agit bien sûr que d'appliquer le théorème de Thalès, mais les explications de Stevin sont intéressantes surtout si on les compare à celles de Descartes pour le même problème (cf. Chap. 3 § 6).

De la ligne droicte donnée, Couper partie requiſe.

Nota. Ce probleme eſt la 9 propoſition du 6 liure d'Euclide, la ou la requiſe partie aux exemples de la meſme, eſt touſiours expliquée par nombres Arithmetiques; Mais l'on peut auſſi bien requirer partie à la ligne donnée incommenſurable, que commenſurable, nous deſcriprons doncques ici pour parfection d'icelle propoſition, la maniere de couper parties incommenſurables. *Explication du donné & requis.* Soit la ligne donnée A B, de laquelle il faut couper ſa $\sqrt{\frac{1}{3}}$. *Conſtruction.* On menera du point A, quelque ligne A C, faiſant quelque angle B A C, poſant que la meſme A C face $\sqrt{3}$, nominateur donné; puis l'on trouuera A D (par le precedent 1 probleme) en telle raiſon à A C, comme $\sqrt{1}$ numerateur donné, à $\sqrt{3}$ nominateur donné, puis ſe menera la ligne C B, & ſa parallele D E. Ie di que A E eſt la requiſe $\sqrt{\frac{1}{3}}$ de la donnée A B; *Demonſtration.* La ligne A D; à telle raiſon à la ligne A C, comme $\sqrt{1}$, à $\sqrt{3}$, par la conſtruction; mais comme A D a A C, ainſi A E a A B, par la 12 propoſition du 6 liure d'Euclide; Doncques A E à telle raiſon a A B, comme $\sqrt{1}$ a $\sqrt{3}$, parquoi A E eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$ de A B; ce qu'il falloit demonſtrer. *Concluſion.* Nous auons doncques coupé partie requiſe de la ligne donnée; ce qu'il falloit faire.



Nota I. Si l'on euſt voulu couper de la ligne A B ci deſſus, ſa $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}$, lon diroit A C faire $\sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{5}$, & de la meſme ſe couperoit la ligne A D, faiſant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, puis menant les paralleles C B & D E comme deſſus, l'on auroit le requis.

Mais ſi lon euſt voulu couper de ladicte ligne A B, ſa $\frac{\sqrt{bino}\ \sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{trino}\ \sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, lon diroit A C faire $\sqrt{trino}.\ \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$. & de la meſme ſe couperoit la ligne A D (laquelle ſe trouueroit par le 6 exemple du premier probleme) faiſant $\sqrt{bino}.\ 5 + \sqrt{5}$, puis menant les paralleles C B & D E comme deſſus, l'on auroit le requis.

Nota II. Il faut que le nominateur du nombre donné, ſoit touſiours maieur que le numerateur, par exemple ſi quelcun requiroit d'auoir coupé d'vne ligne ſa $\frac{3}{2}$, ou $\sqrt{\frac{5}{4}}$ ce ſeroit petition de l'impoſſible, veu que toute partie eſt moindre que ſon entier.

Dans ce même ouvrage, Stevin se pose le problème d'extraction d'une racine cubique, problème dont il rappelle, selon l'usage, qu'il revient à insérer deux moyennes proportionnelles successives et pour lequel il renvoie aux inventions de "Platon, Héron, Phylon Byzantin, Appolone, Diocle, Pappe, Spore, Menechme, Archite, Eratosthène ou Nicomède".

Visiblement, son propos n'est pas là, mais dans la libération du champ numérique.