IREM
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
des Pays de la Loire

Activités en seconde

J.J. Primot
L. Jayez
A. Quidu

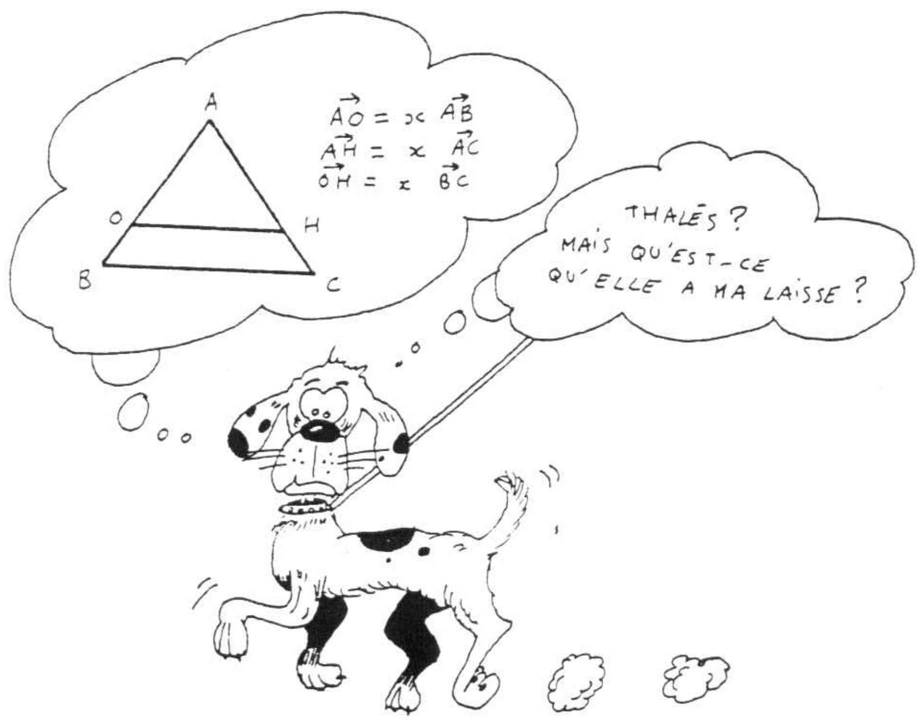
1975

Activités destinées aux révisions de calcul algébrique : page 1 à 8

Majorations-minorations en liaison avec l'étude des courbes : page 9 à 15

Activités sur les angles géométriques : page 16 à 22

Le théorème de Thalès et sa réciproque : page 23 à 27



ACTIVITES DESTINEES AUX REVISIONS DE CALCUL ALGEBRIQUE

Exercice N° I

Distance de deux points en repère orthonormé.
Identités remarquables.
Réciproque du Théorème de Pythagore.
Résolution d'une équation.
Vérification graphique.

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, I, J) [unité 1 cm].
On donne A(2, 1) ; B(-2, 3) et M(x, O).

1] Calculer, en fonction de x, les carrés des distances AM et BM.

2] Déterminer les valeurs du nombre x pour lesquelles le triangle AMB est rectangle en M.

3] vérifier graphiquement les résultats trouvés.

4] Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le triangle AMB est isocèie en M.

Exercice N° II

Calcul numérique.
. Distance d'un point à l'origine en repère orthonormé.
. Calcul algébrique.

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) : unité 6 cm.
t étant un nombre quelconque, on lui associe le point M.
L'abscisse $\frac{2t}{1+t^2}$ et d'ordonnée $\frac{1-t^2}{1+t^2}$

1] Placer les points correspondants aux valeurs suivantes de t :

O, 1, -1, 2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(On rassemblera les calculs des coordonnées dans un tableau). Vérifier que ces points sont sur un même cercle (C) de centre O.

2] Démontrer que, quelle que soit la valeur de t, le point M correspondant est un point de (C).

3] Démontrer que deux points associés à deux valeurs apposées de t sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4] Démontrer que deux points associés à deux valeurs inverses de t sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice N° III : 1) Entiers pairs, entiers impairs
2) Factorisation
3) Identités remarquables.

1] Calculer le quotient et le reste de la division par 4 de : 1789 ; 1790 ; 1791 ; 1792 ; 1793 ; etc.

2] Les premiers jeux Olympiques modernes ont eu lieu à Athènes en 1896. L'année 2006 sera-t-elle une année Olympique ?

3] r désignant le reste de la division du carré de l'entier n, par 4, compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2													
r													

4] Que suggère ce tableau ?

5] Comment traduire l'hypothèse :
a) n est un entier pair ?
b) n est un entier impair ?

6] Démontrer que le résultat que laisse entrevoir le tableau est vrai pour toutes les valeurs de n.

7] Soit x et y deux entiers impairs. Démontrer que x^2+y^2 n'est surement pas le carré d'un entier.

Réponses :

4] Lorsque n est un entier naturel inférieur à 12, le reste de la division de son carré par 4 est 0 ou 1 selon que n est pair ou impair.

5] Pour traduire que n est pair on peut écrire $n = 2p$; p entier. Pour traduire que n est impair on peut écrire $n = 2p+1$, p entier.

6] Si n est pair : $n = 2p$; $n^2 = 4p$. n^2 est un multiple de 4.

Si n est impair : $n = 2p+1$, $n^2 = 4p^2 + 4p + 1$.

$n^2 = 4(p^2 + p)+1$

Cette écriture met en évidence que le reste de la division de n^2 par 4 est 1.

Conclusion : Lorsque l'on divise le carré d'un entier par 4, le reste ne peut être que 0 ou 1.

7] On peut écrire $x = 2p+1$ et $y = 2m+1$, p et m étant deux entiers

$x^2 + y^2 = (2p+1)^2 + (2m+1)^2$

$x^2 + y^2 = 4(\qquad)+2.$

Le reste de la division par 4 de $x^2 + y^2$ est 2.

La question précédente permet d'affirmer que $x^2 + y^2$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice N° IV

1] x, y, z et t sont des entiers impairs.

Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ est un multiple de 4.

2] x, y, z et t sont des entiers consécutifs

Calculer le reste de la division par 4 de $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

Exercice N° V

- Triangles rectangles isométriques.
- Hauteur d'un triangle équilatéral. Diagonale d'un carré.
- Calcul sur des écritures comportant des radicaux.
- Résolution d'une équation du premier degré.
- Calcul d'un cosinus.

ABCD est un carré de côté a. E est le point de [CB] tel que EAB = 15° et F le point de [DC] tel que DAF = 15°.

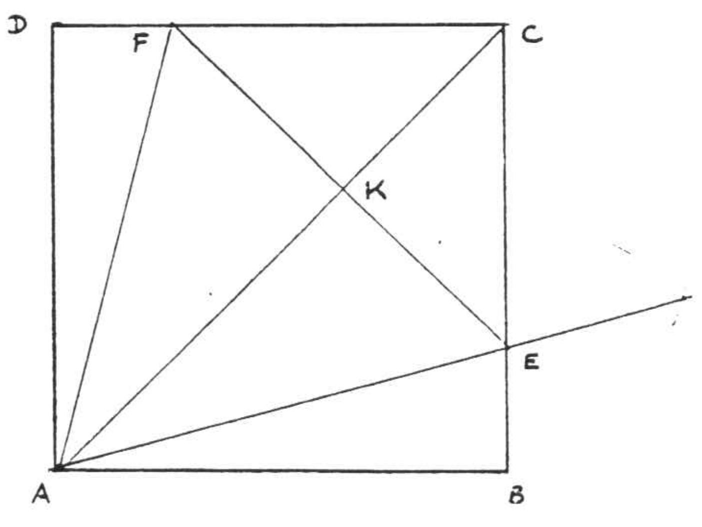
1] Quelle est la nature du triangle AEF ?

2] Démontrer que la droite (AC) est la médiatrice de [EF].

On note K le milieu de [EF] et on pose EF = x.

3] En exprimant de deux façons différentes, AC en fonction de x et de a, déduire le calcul de x en fonction de a.

4] Calculer la valeur exacte de $\cos_0 (15)$.



Dessin : Il est possible de construire les points E et F à la règle et au compas en construisant la bissectrice d'un angle de 30°.

1] Le triangle AEF est isocèle en A et EAF = 60°, c'est par conséquent un triangle équilatéral.

2] On a DF = EB, on en déduit que CF = CE et comme AF = AE (AC) est la médiatrice de [EF].

3] On a d'abord $AC = a\sqrt{2}$

On a aussi :

$$AC = AK + KC$$

$$AC = AK + \frac{1}{2}\ FE$$

$$AC = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2}$$

On en déduit que $a\sqrt{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2}$

$$2a\sqrt{2} = (1+\sqrt{3})x$$

$$x = \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

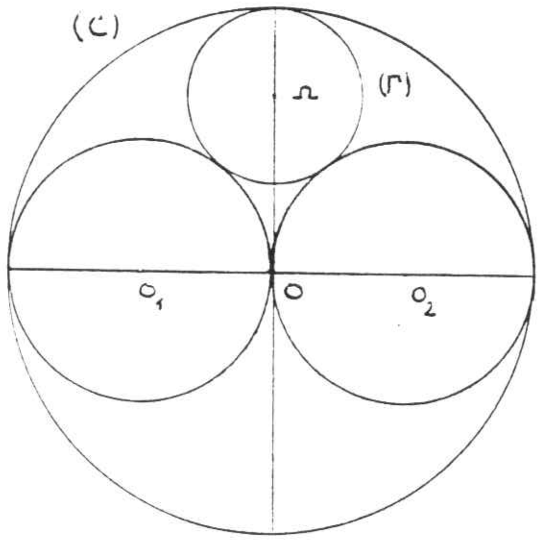
$$x = a\sqrt{2}\ (\sqrt{3}-1)\ ;\ (x = a(\sqrt{6} - \sqrt{2}))$$

4] Dans le triangle ABE, rectangle en B, on a : $\cos_0(15) = \frac{AB}{AE}$

$\mathrm{Cos}_0(15) = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ que l'on peut écrire $\cos_0(15) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Exercice N° VI

Cercles tangents
Théorème de Pythagore
Résolution d'une équation



Les quatre cercles ci-contre sont tangents deux à deux, comme l'indique la figure.
O est le centre du cercle (C), on note R son rayon.
Calculer, en fonction de R, le rayon de r du cercle (Γ).

Solution abrégée : Comme $\Omega o_1 = \Omega o_2$, (Ωo) est la médiatrice de $[O_1, O_2]$.

Dans le triangle rectangle (Ω, O, O_1) : $\Omega o_1^2 = \Omega o^2 + OO_1^2$.

Donc $(\frac{R}{2} + r)^2 = (R - \Gamma)^2 + (\frac{R}{2})^2$, et par suite : $3\ Rr = R^2$ c'est-à-dire $r = \frac{R}{3}$

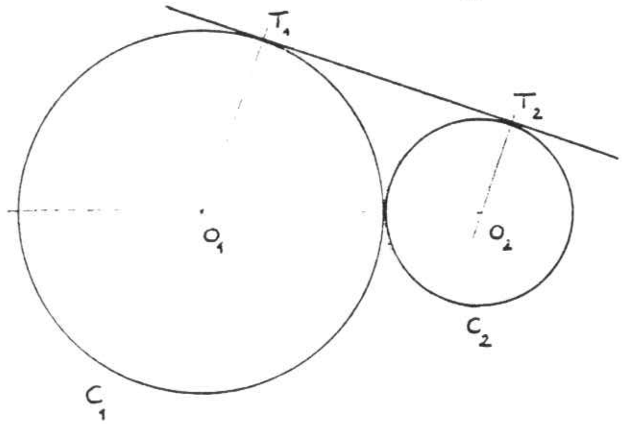
Remarques :

1) La valeur trouvée permet une construction du cercle (Γ).

2) Une autre approche consiste à réaliser la construction de Ω sans calcul préalable de Γ.

Exercice N° VII

Théorème de Pythagore.
Cercles tangents extérieurement



C_1 et C_2 sont deux cercles tangents extérieurement. On considère une tangente commune aux deux cercles, et l'on note T_1 et T_2 ses points de contact respectifs avec C_1 et C_2.
Calculer la distance $T_1 T_2$ en fonction des rayons R_1 et R_2 des deux cercles.

Solution : On suppose par exemple $R_2 \leqslant R_1$.

On note alors O'_1 le projeté orthogonal de O_2 sur $(O_1 T_1)$.

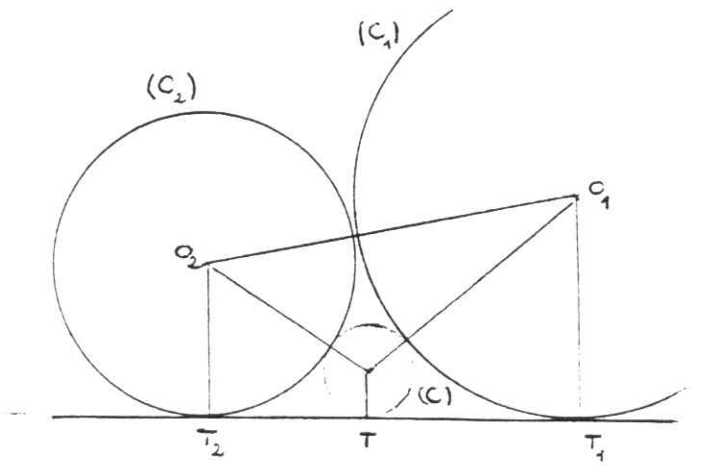
Alors : $T_1 T_2 = O_2 O'_1$.

Or : $O_2 O'^2_1 = O_2 O_1^2 - O_1 O'^2_1$

$= (R_1 + R_1)^2 - (R_1 - R_2)^2$

$= 4 R_1 R_2$ D'où : $T_1 T_2 = 2 \sqrt{R_1 R_2}$

Exercice N° VIII



C_1 est un cercle de rayon 3, C_2 un cercle de rayon 2, tangent extérieurement à C_1.
Une droite est tangente à C_1 en T_1, à C_2 en T_2.
Le cercle C est tangent extérieurement à C_1 et C_2, et tangent en T à la droite (D). Calculer son rayon r.

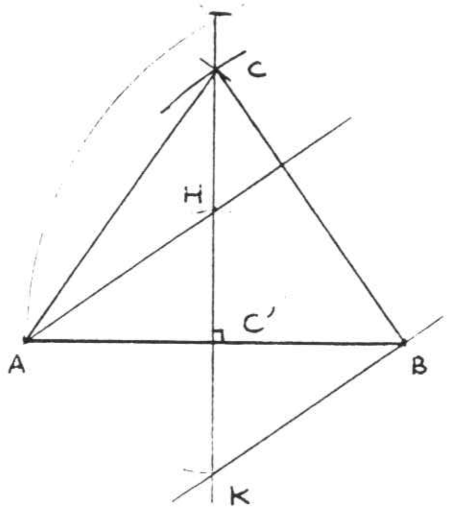
Solution : On applique le résultat de l'exercice précédent pour exprimer, en fonction de r, T_1T et T_2T, et pour calculer T_1T_2 : $T_1T = 2\sqrt{3}r$; $T_2T = 2\sqrt{5}r$; $T_1T_2 = 2\sqrt{15}$

Or $T_1T_2 = T_1T + TT_2$, donc : $2\sqrt{15} = 2\sqrt{3}r + 2\sqrt{5}r$,

D'où : $r = \left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{15}{8+\sqrt{15}}$

Exercice N° IX

Hauteur d'un triangle équilatéral.
Réciproque du théorème de Pythagore.



ABC est un triangle isocèle en C, tel que $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On note C' le milieu de [AB], H celui de [CC'] et K le symétrique de H par rapport à C'.

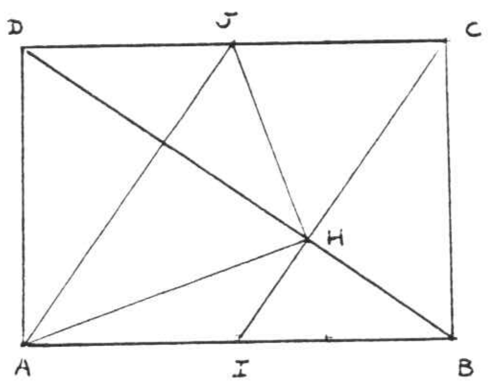
1) Construire à la règle et au compas, un tel triangle.

2) Démontrer que le triangle CBK est rectangle en B.

3) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice N° X

Diagonale d'un carré.
Réciproque du théorème de Pythagore.
Symétrie orghogonale.



ABCD est un rectangle tel que $\frac{AB}{CD} = \sqrt{2}$.

1) Construire à la règle et au compas un tel triangle.

2) On note I le milieu de [AB]. Démontrer que la droite CI est perpendiculaire à la droite DB.

3) On note H le points d'intersection des droites (CI) et DB. et J le milieu de [DC].

Démontrer que la droite AJ est la médiatrice de [DH].

Que peut-on conclure pour le triangle JHA ?

On est amené à privilégier dans un tel exercice la réciproque du théorème de Pythagore.

Le problème provient de ce que le point d'intersection de (CI) avec (DB) n'est pas immédiatement identifiable. Indiquons ici quelques démarches possibles.

1°) Démontrer que (IC) est perpendiculaire à une parallèle à (DB) ou que (DB) est perpendiculaire à une parallèle à (IC).

Par exemple, si I' est le milieu de AD on peut démontrer que I' IC est rectangle en I.

Ou si J' est l'intersection de (DC) avec la parallèle à (AC) passant par B, on démontre que DBJ' est rectangle en B.

2°) On peut aussi remarquer que H est le centre de gravité du triangle ABC et démontrer que BHC est rectangle en H.

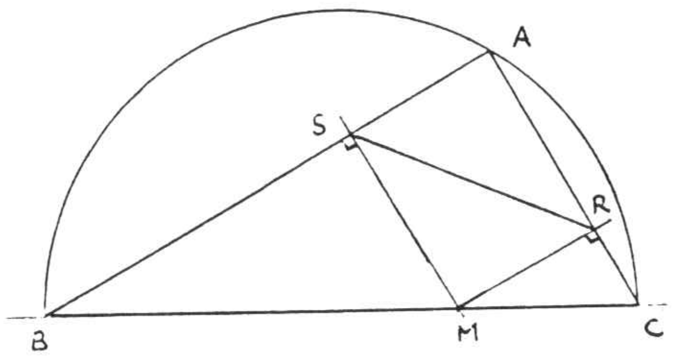
3°) Le théorème de Thalès utilisant le parallélisme des droites (AJ) et (CI) permet de démontrer que $BH = \frac{BD}{3}$.

MAJORATIONS-MINORATIONS EN LIAISON AVEC L'ETUDE COURBE

Exercice N°I

‖ Distance d'un point à une droite.

ABC est un triangle rectangle en A. M est un point de la droite (BC), R est le projeté orthogonal de M sur (AC) et S son projeté orthogonal sur (AB).
Comment choisir M sur (BC) pour que la distance RS soit minimum ?



Commentaire ASMR est un rectangle : AM = SR
AM est minimum quand M est le projeté orthogonal de A sur (BC).

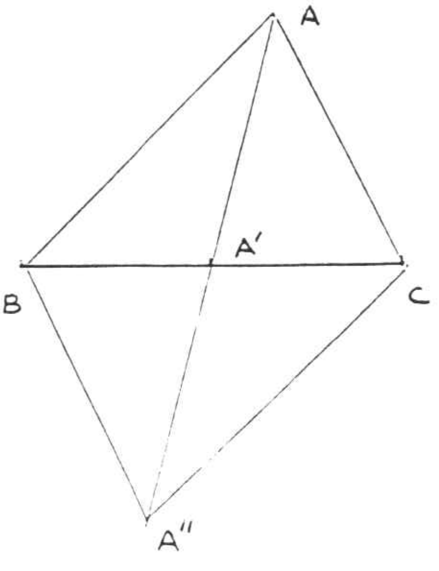
Exercice n°II :

‖ Inégalité triangulaire.
‖ Majoration d'une somme.

ABC est un triangle quelconque. A' est le milieu de [AB], B' celui de [AC] et C' celui de [AB]

1] Démontrer que $AA' \leq \frac{1}{2}$ [AB + AC]

2] En déduire que AA' + BB' + CC' ≤ AB + BC + CA.



1) L'inégalité équivaut à $2AA' \leq AB + AC$; elle suggère de représenter $2AA'$ comme longueur d'un segment.

On note A" le symétrique de A par rapport à A'.
On applique l'inégalité triangulaire aux trois points A, B, A".

$$AA'' \leq AB + BA''$$

On en déduit $AA'' \leq AB + AC$ c'est-à-dire $2AA' \leq AB + AC$.

2) On peut écrire

$$AA' \leq \frac{1}{2} (AB + AC)$$

$$BB' \leq \frac{1}{2} (AB + BC)$$

$$CC' \leq \frac{1}{2} (AC + BC)$$

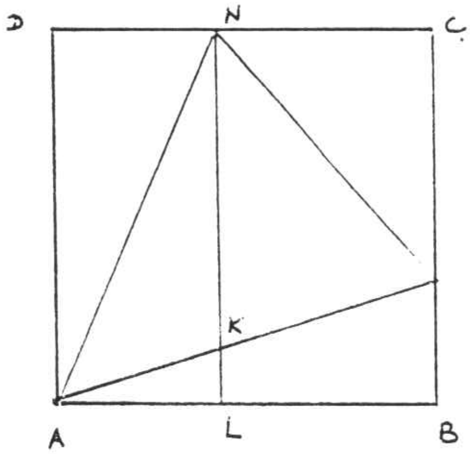
$$\overline{AA' + BB' + CC' \leq AB + BC + CA}$$

Exercice n° III

Aire d'un triangle.
Calcul algébrique.
Manipulation d'inégalités et de majorations.

ABCD est un carré, M est un point de [BC] et N un point du segment [DC].

Trouver la plus grande valeur que peut prendre l'aire du triangle AMN.



Une solution possible :

On pose $AB = a$, $DN = x$ et $BM = y$

aire (AMN) = aire(ABCD)-[aire(ABM) + aire(MCN)+aire(AND)]

aire (AMN) = $a^2 - [\frac{1}{2} ay + \frac{1}{2} (a-x)(a-y) + \frac{1}{2} ax]$

aire (AMN) = $\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} xy$.

On a donc aire (AMN) $\leq \frac{1}{2} a^2$, aire (AMN) $\leq \frac{1}{2}$ aire (ABCD)

aire (AMN) $= \frac{1}{2} a^2$ si, et seulement si, $xy = 0$

c'est-à-dire si, et seulement si $M = B$ ou $N = D$.

<u>Conclusion</u> : l'aire maximum est la moitié de l'aire du carré.

<u>Une autre solution possible</u> : par découpage.

aire (ANK) $= \frac{1}{2}$ NK x AL ; donc :

aire (ANK) $\leq \frac{1}{2}$ NL x AL ; donc :

aire (ANK) $\leq \frac{1}{2}$ aire (ALND). De même :

aire (MNK) $\leq \frac{1}{2}$ aire (BLNC)

---

aire (AMN) $\leq \frac{1}{2}$ aire (ABCD)

En outre, on remarque que, si $M = B$, aire (AMN) $= \frac{1}{2}$ aire (ABCD) :

Il en est évidemment de même si $N = D$.

<u>Exercice N° IV</u>

1) Démontrer que, dans un triangle quelconque, l'un au moins des angles a une mesure inférieur à 60°.

2) Démontrer que, si un triangle a un angle obtus, il a nécessairement un angle de mesure inférieure à 45°.

Exercice n° V

Forme canonique d'un polynôme du second degré.
Intérêt d'une interprétation géométrique : équation d'une droite, distance de l'origine à cette droite.

x et y étant deux réels tels que x+y=1, déterminer le minimum de $x^2 + y^2$.

Une méthode possible :

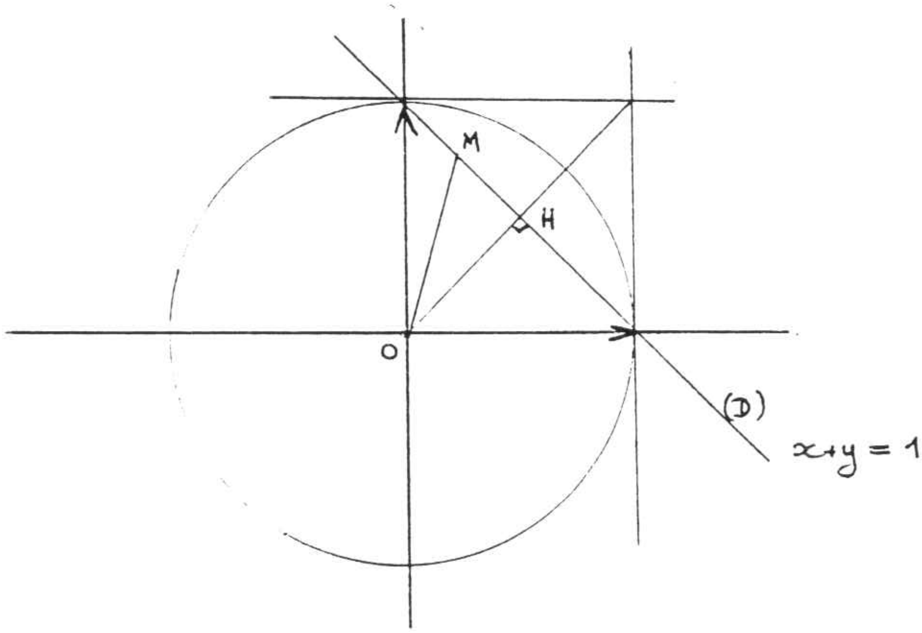
$x^2 + y^2 = x^2 + (1-x)^2$

$x^2 + y^2 = 2x^2 - 2x + 1$

$x^2 + y^2 = 2[x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]$

On en déduit que $\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2$. L'égalité a lieu si, et seulement si, $x = \frac{1}{2}$.

Une autre méthode :



Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, M(x, y) décrit la droite (D) d'équation x+y=1 ; or $x^2 + y^2 = OM^2$; $x^2 + y^2$ est donc minimum lorsque M est en H, projeté orthogonal de O sur (D).

Exercice N° VI

1) Traduire qu'un point est sur une courbe.
2) Coordonnées du milieu d'un segment.
3) Lecture graphique.
4) Exploitation d'une inégalité pour la recherche d'un maximum.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

On note $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y = x^2$.

a et b sont deux nombres quelconques, on désigne par : A le point de $(\mathcal{P})$ d'abscisse a, B celui d'abscisse b, I le milieu de [AB] et J le point de $(\mathcal{P})$ qui a la même abscisse que I.

1) Exprimer en fonction de a et b, les coordonnées de I et celles de J.

2) Comparer graphiquement l'ordonnée de I à celle de J.
Retrouver par le calcul l'inégalité obtenue.
En déduire que la somme de deux réels positifs est inférieure à la racine carrée du double de la somme de leurs carrés. Quand l'égalité a-t-elle lieu?

3) Un point M décrit un demi-cercle de diamètre [EF]
On pose : EF = 2r.
Calculer, en fonction de r, le périmètre du triangle EMF lorsque : $mes_0(MEF) = 30$; $mes_0(MEF) = 45$; $mes_0(MEF) = 60$

4) Pour quelle position de M le périmètre du triangle EMF est-il maximum ?

1] L'ordonnée de A est a^2 : $A(a, a^2)$
L'ordonnée de B est b^2 : $B(b, b^2)$

L'abscisse de I est : $\frac{a+b}{2}$

L'ordonnée de I est : $\frac{a^2+b^2}{2}$

L'ordonnée de J, point de $(\mathcal{P})$ d'abscisse $\frac{a+b}{2}$, est $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

2] La lecture du dessin conduit à l'inégalité $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Solution algébrique

Une première méthode consiste à comparer (si le calcul est simple) la différence

$d = \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ à zéro $\qquad d = \frac{(a-b)^2}{4}$

d est donc un nombre positif et par conséquent $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

On en déduit : $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. L'égalité a lieu si et seulement $d = 0$ c'est-à-dire $a=b$.

3] Deux triangles symétriques par rapport à la médiatrice de [EF] ont le même périmètre.

On pose $EM = x$, $MF = y$ et $p = EF + FM + ME$

$p = 2r + x + y$ et $x^2 + y^2 = 4r^2$

$p \leq 2r + \sqrt{2(x^2 + y^2)}$

$p \leq 2r + \sqrt{8r^2}$

$p \leq 2r(1 + \sqrt{2})$.

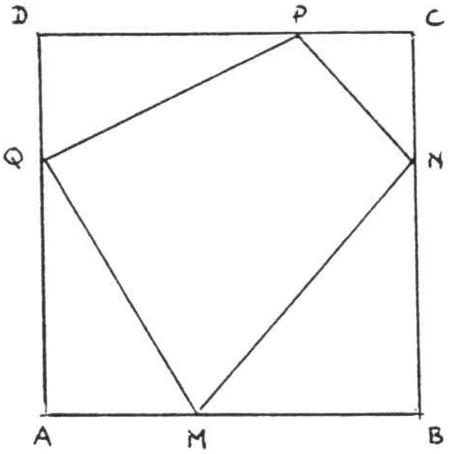
Le périmètre est maximum lorsque MEF est rectangle isocèle en M.

Exercice n° VII

Exercice de recherche

ABCD est un carré de côté 1. M, N, P et Q sont des points situés respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Trouver le maximum et le minimum de la somme $QM^2 + MN^2 + NP^2 + PQ^2$.



On pose AM = x, BN = y, CP = z et DQ = t.

Avec ces choix on obtient

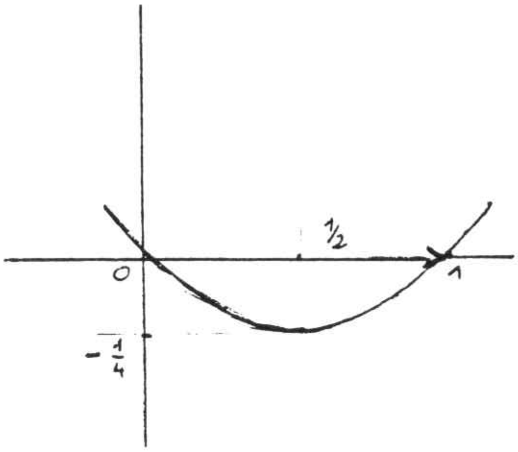
$$QM^2 + MN^2 + NP^2 + PQ^2 = 4 + 2\,(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2(x + y + z + t).$$

x, y, z et t variant de façon indépendante dans [O,1] on regroupe les termes en x, en y, en z et en t afin d'encadrer chacun d'eux.

$$QM^2 + MN^2 + NP^2 + PQ^2 = 4 + 2x(x-1) + 2y(y-1) + 2z(z-1) + 2t(t-1).$$

On est ramené à déterminer le maximum et le minimum de u(u-1) lorsque u décrit l'intervalle [O,1].

ACTIVITES SUR LES ANGLES GEOMETRIQUES



$u(u-1) = (u - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

On en déduit que, pour u dans [O,1],

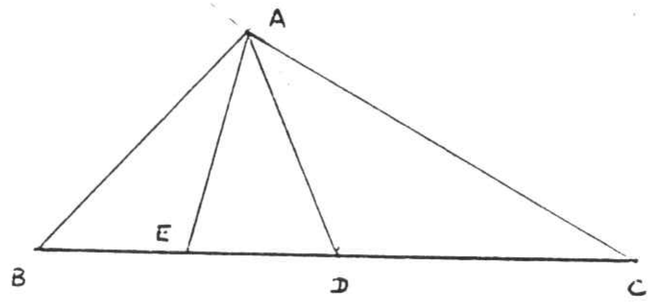
$-\frac{1}{4} \leq u(u-1) \leq 0.$

Ce qui donne

$2 \leq QM^2 + MN^2 + NP^2 + PQ^2 \leq 4.$

Exercice n°I

ABC est un triangle tel que BC = 2AB. D est le milieu de [BC] et E celui de [BD].
Démontrer que (AD) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{EAC}$.



Une méthode possible

L'idée est de faire apparaître la droite (AD) comme axe de symétrie de ([AC), [AE)) ; à cette fin, on construit un triangle isocèle de sommet A dont les deux autres sommets sont sur [AE) et [AC)...

1) Solution utilisant les angles géométriques.

On construit le point F de la demi-droite [AC), tel que AF = AE.

L'observation de la figure (que l'on peut confirmer sur d'autres exemplaires) conduit à penser que F est le milieu de [AC], ou que (DF) est parallèle à (BA). L'exploitation directe de l'égalité "AE = AF" semblant délicate, nous allons plutôt essayer de raisonner sur le milieu de F_1 de [AC].

On a : $DF_1 = \frac{1}{2}$ BA, donc : $DF_1 = DE$.

(D, E, F_1) est donc isocèle en D.

On cherche à prouver que (AD) est médiatrice de [EF]. Il suffit pour cela de prouver que $AF_1 = AD$, ou bien que $\widehat{ADE} = \widehat{ADF_1}$.

La première voie ne semble pas immédiatement exploitable, alors que le parallélisme de (DF_1) et de (BA) permet d'écrire :

$\widehat{ADF_1} = \widehat{DAB}$.

Or le triangle (D, A, B) est isocèle en B ; donc

$\widehat{DAB} = \widehat{ADB}$.

Par suite : ADE = ADF_1 .

La droite (DA) est donc la bissectrice de l'angle EDF du triangle isocèle EDF ; (DA) est donc la médiatrice de [EF].

Remarque : l'analyse empirique conduisant à l'initiative d'introduire le milieu de [AC] peut être remplacé par une analyse théorique qui prouve que, si (AD) EST BISSECTRICE DE EAC, F est alors le milieu de [AC].

2) Autre solution

On construit le point I de la demi-droite [AE) tel que : AI = AC. Une analyse conduit à penser que I est le symétrique I_1 de A par rapport à E, et à raisonner de préférence sur I_1 .

(A, D, I_1, B) est un parallélogramme. Donc : DI_1 = AB. Or : AB = DB

= DC.

On en déduit que le triangle (BI_1C) est rectangle en I_1, puis que (AD) est perpendiculaire à (CI_1).

D étant équidistant de I_1 et de C, la droite (AD) est ainsi la médiatrice de [I_1 C].

Une autre méthode

Il s'agit ici de comparer EAD et DAC. On cherche, à cette fin, à "transporter" l'angle DAC. On peut penser à utiliser les angles alternes-internes, ce qui peut conduire à l'initiative de mener par D la parallèle à (AC).

Cette parallèle à (AC) passe par le milieu de [BA], et par conséquent coupe (AE) au centre de gravité G du triangle (ABD).

Le triangle (ABD) étant isocèle en B, la médiane (BG) est aussi la médiatrice du segment [AD].

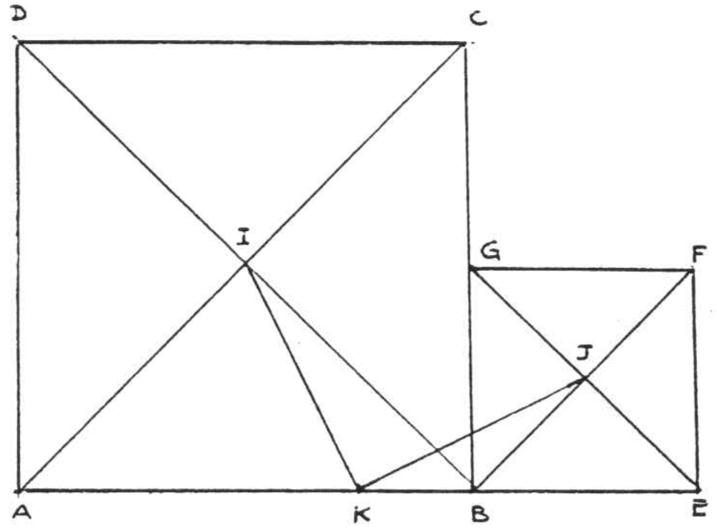
Le triangle (G, A, D) est donc isocèle en G; d'où : GAD = ADG.
Or : ADG = DAC. Donc GAD = DAC.

Exercice n°II

ABCD et BEFG sont deux carrés tels que B soit un point du segment [AE] et G un point du segment [BC].

1) Démontrer que G est l'orthocentre du triangle AEC.

2) On note K le milieu de [AE], I celui de [AC] et J celui de [GE]...
Démontrer que le triangle IKJ est rectangle isocèle en K.



1) (CB) est une hauteur du triangle CAE. Il suffit donc de démontrer que (AG) est perpendiculaire à (CE) ou que (EG) est perpendiculaire à (AC).

Comme (EG) est perpendiculaire à (BF) et que (BF) est parallèle à (AC) on en déduit que (EG) est la hauteur issue de E dans le triangle AEC.

2) La droite (IK) est parallèle à (CE) et $IK = \frac{1}{2}$ CE. De même (KJ) est parallèle à (AG) et

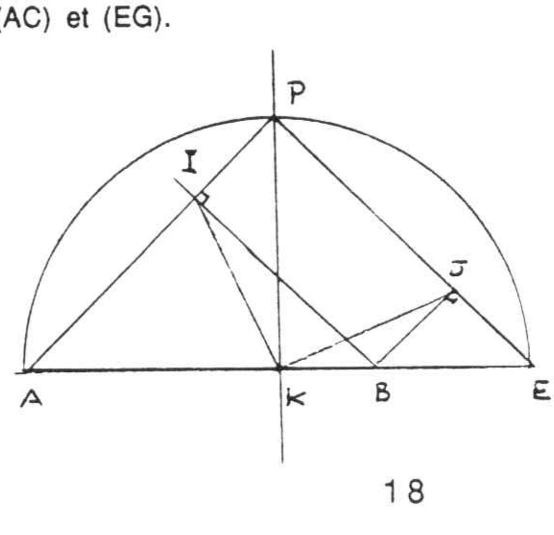
$KJ = \frac{1}{2}$ AG.

Il suffit alors de démontrer que AG = CE et que (AG) et (CE) sont perpendiculaires. Ce dernier point est immédiat puisque (AG) est une hauteur du triangle ACE.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABG et au triangle CBE permet de prouver que AG = CE.

Remarque :

On peut extraire de la figure précédente la configuration suivante, en notant P l'intersection de (AC) et (EG).



On obtient l'énoncé suivant :

APE est un triangle rectangle isocèle en P.

K est le milieu de [AE], B étant un point quelconque de [AE], on note J le projeté orthogonal de B sur (PE) et I son projeté orthogonal sur (AP).

Quelle est la nature du triangle KIJ ?

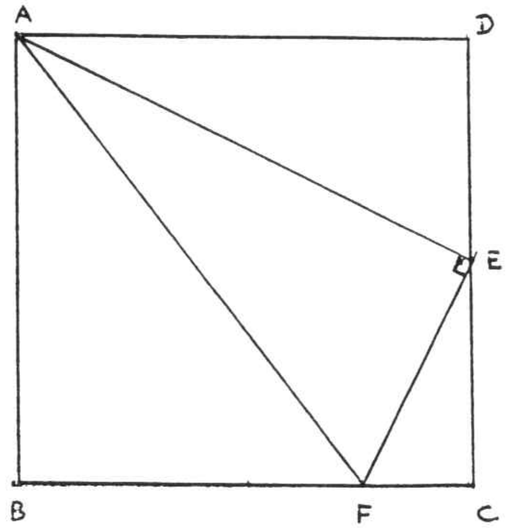
Les points I, P, J, B et K sont sur le cercle de diamètre [PB]. [IJ] est un diamère de ce cerlce et par conséquent le triangle (IKJ, est rectangle en K. (Seule l'hypothèse APE rectangle en P est intervenue).

Les points IKJP sont cocycliques et (KPJ) = 45° donc KIJ = 45° ou KIJ = 135°

KIJ étant nécessairement aigu on a : KIJ = 45°.

Exercice n° III

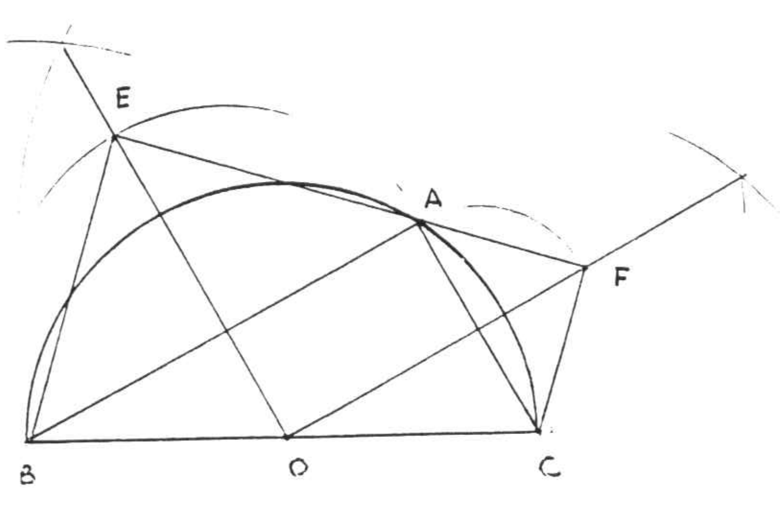
ABCD est un carré. E est le milieu de [CD]. La perpendiculaire en E à (AE) coupe (BC) en F.
Démontrer que EAD = EAF.



Indication : On peut, comme dans l'exercice n° 1, essayer de faire apparaître un "bon" triangle isocèle et pour cela d'introduire le point d'intersection de (FE) et de (AD).

Exercice n° IV

ABC est un triangle rectange en A. On construit, à l'extérieur de ce triangle, le triangle EAB rectangle isocèle en E et le triangle ACF rectangle isocèle en F;
1) Démontrer que E, A et F sont alignés.
2) O désignant le milieu de [BC], étudier le triangle EOF.



1) L'unité de mesure d'angle est le degré.

EAB = 45° , BAC = 90°, CAF = 45° . EAF est donc l'angle plat et par conséquent les points E, A et F sont alignés.

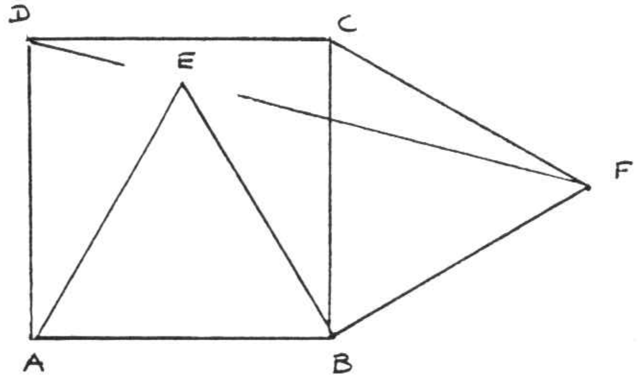
2) Dans le triangle BAC rectangle en A on a : OA = OB = OC.

Comme en outre EA = EB, la droite (EO) est la médiatrice de [AB]. On en déduit que FEO = 45°, de même EFO = 45°.

Le triangle EOF est par conséquent rectangle isocèle en O.

Exercice n° IV

> ABCD est un carré. On construit à l'extérieur de ce caré le triangle équilatéral BCF et à l'intérieur le triangle équilatéral ABE.
> Démontrer que D, E et F sont alignés.



Une méthode possible : Il suffit de prouver que l'angle DEF est plat.

On calcule alors l'angle DEA et l'angle BEF.

Une autre méthode : Il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ s sont colinéaires.

Le carré invite à utiliser un repère orthonormal. Choisissons le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) par exemple.

Le point E a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Le point F a pour coordonnées $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ et de $\overrightarrow{DF}$ puis on vérifie leur proportionnalité.

Encore une autre ... avec les distances : il suffit de prouver que DE + EF = DF.

Si l'on désigne par H le projeté orthogonal de E sur (DA) dans le triangle DEH le théorème de Pythagore permet de calculer

$$DE^2 = a^2(2-\sqrt{3}) ;$$

de façon analogue K étant le projeté orthogonal de E sur (DC) dans le triangle DKF on obtient :

$$DF^2 = a^2(2+\sqrt{3}) ;$$

enfin : EF = $a\sqrt{2}$.

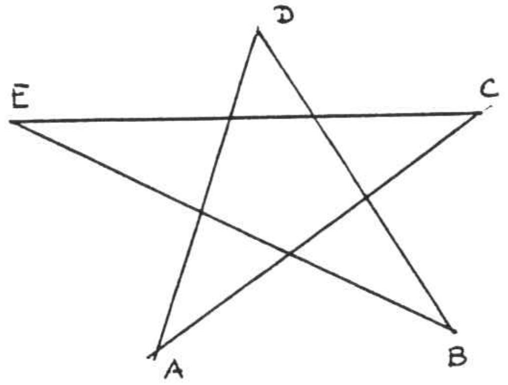
Prouver que DE + EF = DF revient à démontrer : $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

c'est-à-dire que $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

On est alors amené à comparer deux nombres positifs par comparaison de leur carré.

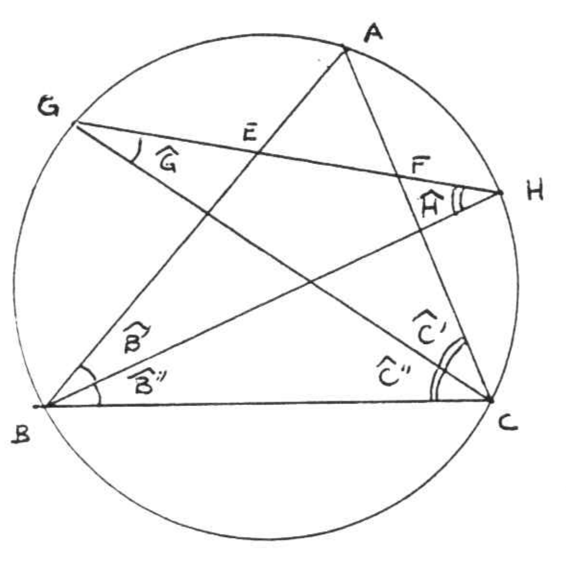
Une autre méthode : Utiliser une rotation suggérée par la figure et la conservation de l'alignement par cette transformation.

Exercice n° VI



Calculer la somme des mesures, en degrés, des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, et $\hat{E}$ de la figure ci-contre

Exercice n° VII



ABC est un triangle quelconque. On désigne par (Γ) son cercle circonscrit.
La bissectrice intérieure de l'angle $\hat{C}$ recoupe (Γ) en G ; la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{B}$ recoupe (Γ) en H.
La droite (GH) coupe (AB) en E et (AC) en F.
Démontrer que le triangle AEF est isocèle en A.

Les notations des angles géométriques sont indiquées sur la figure.

Par hypothèse $\hat{B}' = \hat{B}''$ et $\hat{C}' = \hat{C}''$. H est le milieu de l'arc AB qui ne contient pas B et G est le milieu de l'arc AB qui ne contient pas C. Il en résulte que G est sur l'arc AC qui contient B. On en déduit que $\hat{B}'' = \hat{G}$ et par suite $\hat{B}' = \hat{G}$.

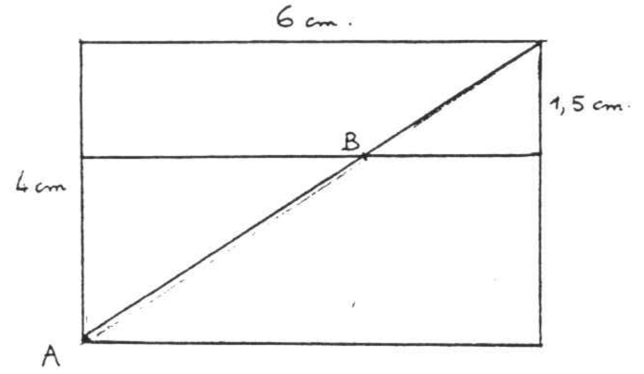
De même $\hat{C}' = \hat{H}$.

Or $\hat{E} = \hat{B}' + \hat{H}$ et $\hat{F} = \hat{C}' + \hat{G}$ d'où $\hat{E} = \hat{F}$

LE THEOREME DE THALES

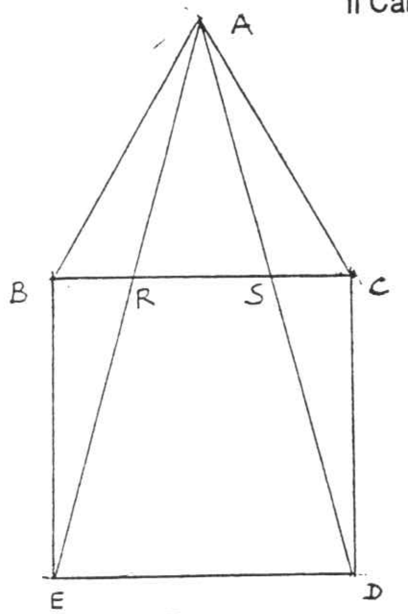
AUTOUR DU THEOREME DE THALES

Exercice n° 1 ‖ Théorème de Pythagore
Théorème de Thalès



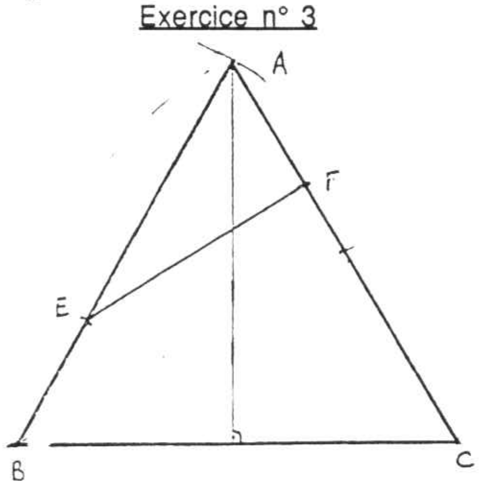
Calculer la valeur exacte de AB

Exercice n° 2 ‖ Hauteur d'un triangle équilatéral
Théorème de Thalès
Calcul sur les quotients et les racines carrées.



ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
BCDE est un carré.
Calculer la valeur exacte de RS.

Exercice n° 3



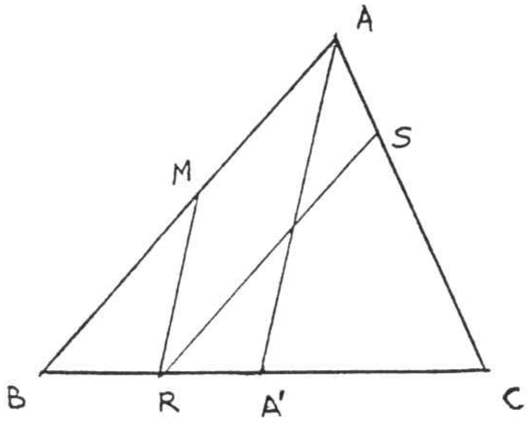
ABC est un triangle équilatéral de côté a F est le point du segment [AC] défini par AF = $\frac{1}{3}$ AC,E est le point du segment [AB] défini par BE = $\frac{1}{3}$ AB.

1) Démontrer que EF est perpendiculaire à AC.

2) On note O le centre de gravité du triangle ABC. Démontrer que les points A, F, O et E sont sur un même cercle.

Commentaire : On peut prendre l'initiative de faire intervenir le point K de [AC] tel que KC = $\frac{1}{3}$ AC ou celle de faire intervenir la hauteur issue de B.

Exercice n° 4



ABC est un triangle quelconque. M est un point de (AB). La parallèle à la médiane, issue de A, passant par M coupe (BC) en R et la parallèle à (AB) passant par R coupe (AC) en S.
Comment doit-on choisir M pour que les droites (MS) et (BC) soient parallèles ?

Solution de l'exercice n° 4

On désigne par k le nombre tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et par x celui tel que $\overrightarrow{AS} = x\overrightarrow{AC}$. Les droites (MS) et (BC) sont parallèles si, et seulement si, x = k. On calcule alors x en fonction de k.

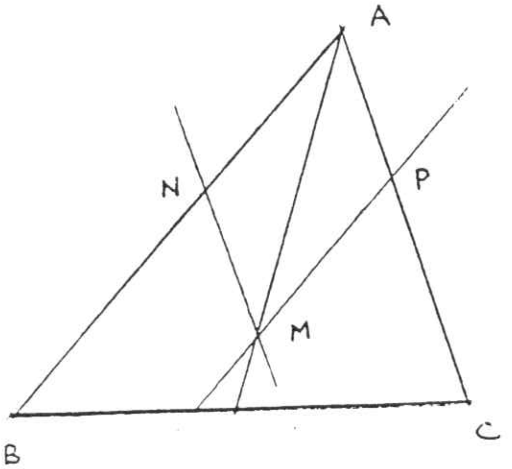
Le théorème de Thalès appliqué dans le triangle BAA' donne : $\overrightarrow{A'R} = k\overrightarrow{A'B}$. En projetant sur (AC) suivant (AB) on obtient $\overrightarrow{B'S} = k\overrightarrow{B'A}$ où B' désigne le milieu de [AC].

On en déduit que $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AS} = (k-1)(\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CA})$ puis $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(1-K)\ \overrightarrow{AC}$.

(MS) et (BC) sont parallèles si, et seulement si $k = \frac{1}{2}(1-k)$ c'est à dire $k = \frac{1}{3}$.

On réalise alors une figure qui permet de vérifier la cohérence du résultat.

Exercice n° 5



ABC est un triangle quelconque. M est un point de la médiane issue de A autre que A. La parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en P et la parallèle à (AC) passant par M coupe (AB) en N.
Démontrer que les droites (NP) et (BC) sont parallèles.

Commentaire : On pourra examiner le cas particulier M = A' et le cas particulier M = A", A" étant le symétrique de A par rapport à A'.

Exercice n°6 | Théorème de Thalès
Théorème de Pythagore et sa réciproque
Calculs algébriques. Relation de Chasles.

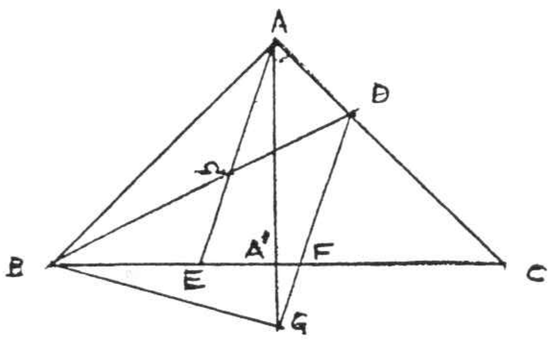
ABC est un triangle rectangle isocèle en A. D est le point de [AC] tel que $\overline{AD} = \frac{1}{3}\ \overline{AC}$, et E le point de [BC] tel que $\overline{BE} = \frac{1}{3}\ \overline{BC}$.

On note Ω le point où se coupent (BD) et (AE). L'objectif est d'évaluer l'angle $A\hat{\Omega}D$.

A' désigne le milieu de [BC]. La parallèle à (AE) passant par D coupe (BC) en F et (AA') en G.

1) Exprimer $\overline{A'F}$ en fonction de $\overline{A'E}$, puis $\overline{A'G}$ en fonction de $\overline{A'A}$.

2) Quelle est la nature du triangle (B, G, D) ? En déduire l'angle $A\hat{\Omega}D$.



D'après le théorème de Thalès : $\overline{CF} = \frac{2}{3}\ \overline{CE}$.

Or : $\overline{CE} = \frac{2}{3}\ \overline{CB}$. Donc : $\overline{CF} = \frac{4}{9}\ \overline{CB} = -\frac{4}{9}\ \overline{BC}$

Donc : $\overline{A'F} = \overline{A'C} + \overline{CF}$

$= \frac{1}{2}\ \overline{BC} - \frac{4}{9}\ \overline{BC}$

$= \frac{1}{18}\ \overline{BC}$

D'autre part : $\overline{A'E} = \overline{A'B} + \overline{BE}$

$= -\frac{1}{2}\ \overline{BC} + \frac{1}{3}\ \overline{BC}$

$= -\frac{1}{6}\ \overline{BC}$.

Il en résulte : $\overline{A'F} = -\frac{1}{3}\ \overline{A'E}$.

Le théorème de Thalès conduit alors à : $\overline{A'G} = -\frac{1}{3}\ \overline{A'A}$.

$\overrightarrow{FG} = -\frac{1}{3}\ \overrightarrow{EA}$

2) Un dessin soigné permet de conjecturer que le triangle (B, G, D) est rectangle isocèle en G. Vérifions le, en posant a = AB.

* $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG}$ $\quad \overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AE}$ $\quad$ Donc : $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AE}$

D'autre part : $\overrightarrow{FG} = -\frac{1}{3}\ \overrightarrow{EA}$ $\quad = \overrightarrow{AE}$ $\quad$, donc : DG = AE

* $BD^2 = a^2 + (\frac{a}{3})^2 = \frac{10}{9}\ a^2$

• $BA' = \frac{BC}{2}$, donc : $BA'^2 = \frac{a^2}{2}$

Donc : $BG^2 = BA'^2 + A'G^2$

Comme $A'G = \frac{1}{3}\ A'A$, on obtient $A'G^2 = \frac{1}{9} \times \frac{a^2}{2}$ $\qquad = \frac{10}{18}\ a^2$

$= \frac{1}{3}\ A'B$ $\qquad = \frac{a^2}{18}$ $\qquad = \frac{5}{9}\ a^2$

• Or : $AE^2 = AA'^2 + A'E^2$

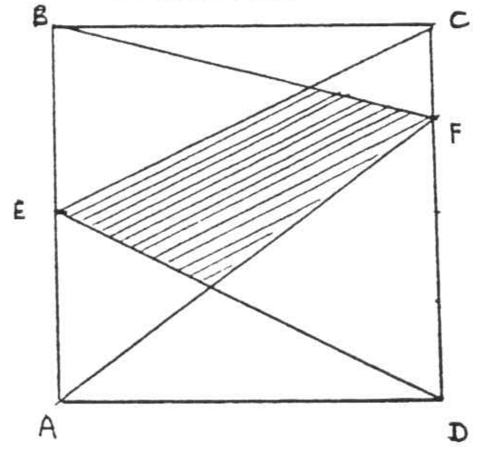
$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{18}$ $\qquad$ Donc : $AE^2 = BG^2$ et par suite : $DG^2 = BG^2$ et $DG^2 + BG^2 = \frac{10\ a^2}{9}$

$= \frac{5}{9}\ a^2$

Donc : $\begin{cases} DG = BG \\ DG^2 + BG^2 = DB^2 \end{cases}$

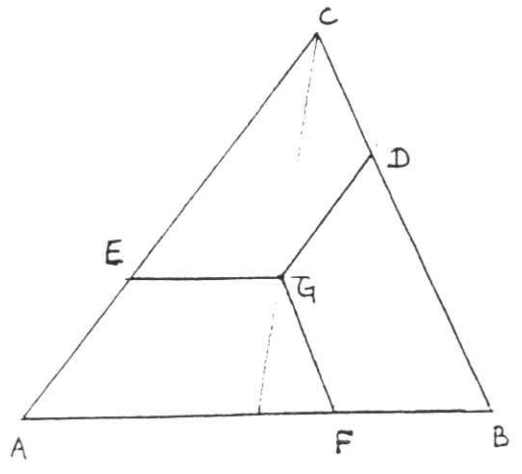
GDB est donc rectangle isocèle en G. Par suite : mes°(GDB) = 45 et donc : mes°($A\hat{\Omega}D$) = 45

Exercice n° 7



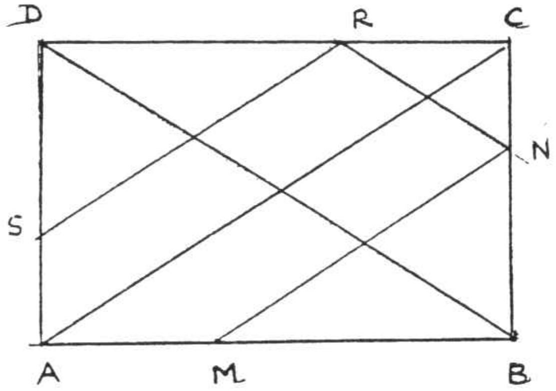
ABCD est un carré. E est le milieu de [AB] et F est tel que FC = 1/4 CD.
Calculer l'aire du domaine hachurée en fonction de celle du carré.

Exercice n° 8



ABC est un triangle quelconque. G est son centre de gravité. (FG) est parallèle à (BD), (GD) est parallèle à (AC) et (GE) est parallèle à (AB).
Démontrer que les trapèzes BDGF, GDCE et GEAF ont la même aire.

Exercice n° 9



ABCD est un rectangle. M est un point de [AB]. La parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en N. La parallèle à (BD) passant par N coupe (DC) en R. La parallèle à (AC) passant par R coupe (AD) en S.

1) Quelle est la nature du quadrilatère MNRS ?

2) Son périmètre dépend-t-il de la position de M sur [AB]?